

L. Kralj, Z. Ćurković, D. Glasnović Gracin, S. Banić, M. Stepić

PETICA+ 6

udžbenik i zbirka zadataka za 6. razred osnovne škole

PRVI SVEZAK

1. izdanje

Zagreb, 2010.

Autorice: Lidija Kralj, Zlata Ćurković, Dubravka Glasnović Gracin, Sonja Banić, Minja Stepić

Urednik: Vinkoslav Galešev

Recenzija: Ines Kniewald, Maja Ljubičić

Lektura: Branka Savić

Ilustracija naslovnice: Ivan Marušić

Ostale ilustracije: Ivan Marušić, Davor Vrcelj

Priprema za tisak: Ivan Marušić, Ivana Biluš, Antonija Jelić, Tomislav Stanojević

Tisak: Gradska tiskara Osijek

Za nakladnika: Robert Šipek

Nakladnik: SysPrint d.o.o.

XIV. trokut 8a, p.p. 84, 10020 Zagreb, Hrvatska

tel: (01) 655 8740, fax: (01) 655 8741

e-mail: udzbenici@sysprint.hr, web: www.sysprint.hr/udzbenici

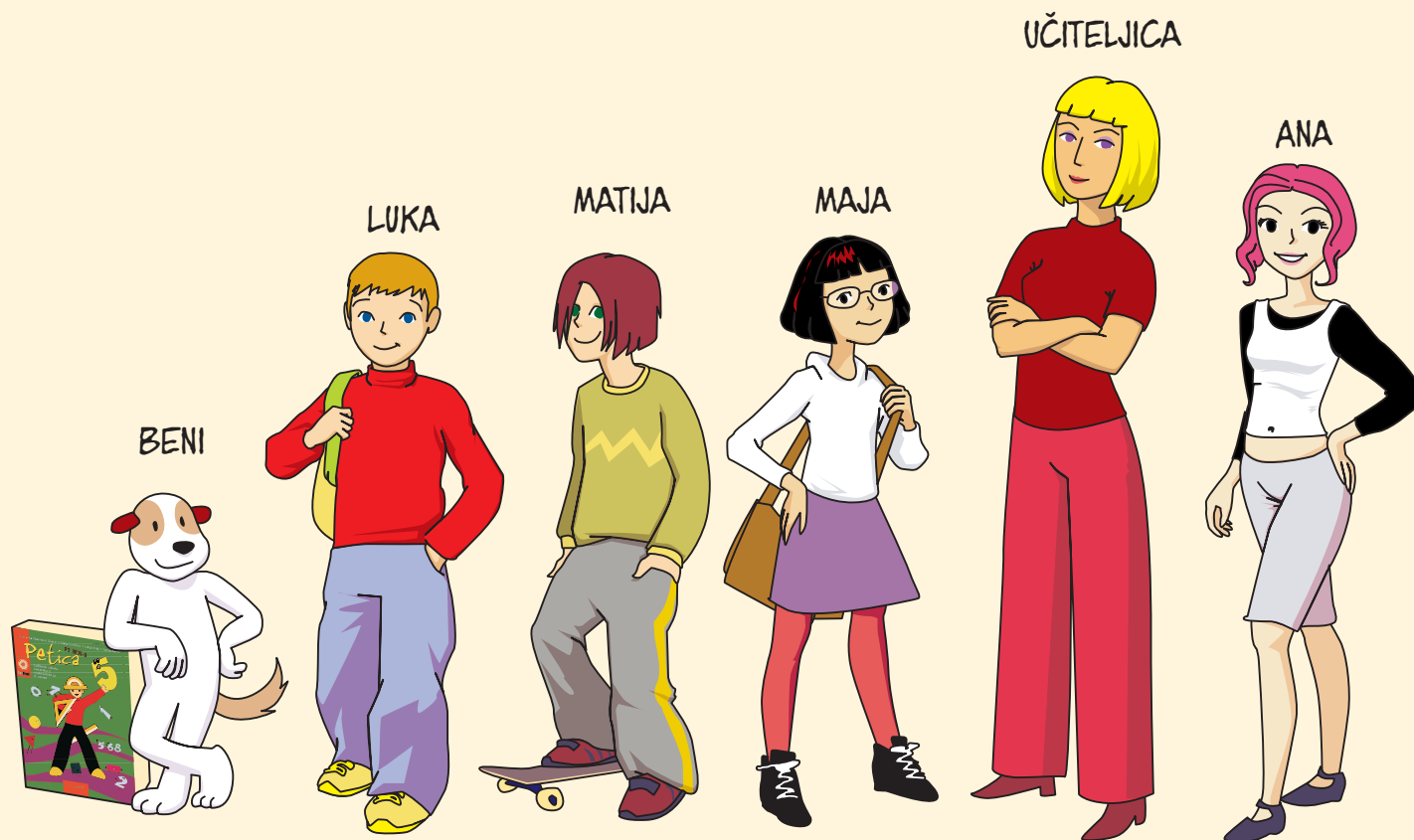
© SysPrint d.o.o, Zagreb, 2010.

Nijedan dio ove knjige ili CD-a ne smije se umnožavati, fotokopirati niti na bilo koji način reproducirati bez nakladnikova pismenog dopuštenja

Sadržaj

0. Uvodno ponavljanje	6	2.8. Sukladnost trokuta	104
1. Operacije s razlomcima	12	2.9. Osnovne konstrukcije trokuta	111
1.1. Svođenje razlomaka na zajednički nazivnik	14	2.10. Visine trokuta	119
1.2. Uspoređivanje razlomaka	17	2.11. Površina trokuta	123
1.3. Brojevni pravac	22	2.12. Ponavljanje	129
1.4. Zbrajanje razlomaka	28	3. Cijeli brojevi	134
1.5. Oduzimanje razlomaka	34	3.1. Pozitivni i negativni cijelih brojeva	135
1.6. Množenje razlomaka	40	3.2. Cijeli brojevi na brojevnom pravcu	139
1.7. Dijeljenje razlomaka	50	3.3. Suprotni brojevi. Apsolutna vrijednost cijelog broja	141
1.8. Povezivanje računskih operacija	55	3.4. Uspoređivanje cijelih brojeva	144
1.9. Ponavljanje gradiva	58	3.5. Zbrajanje cijelih brojeva	150
2. Trokut	62	3.6. Oduzimanje cijelih brojeva	158
2.1. Kutovi uz presječnicu	64	3.7. Računanje sa zgradama	164
2.2. Kutovi s usporednim i okomitim kracima	67	3.8. Množenje cijelih brojeva	168
2.3. Računanje s veličinama kutova	72	3.9. Dijeljenje cijelih brojeva	172
2.4. Trokut	79	3.10. Povezivanje računskih operacija	176
2.5. Zbroj kutova u trokutu	86	3.13. Ponavljanje	183
2.6. Simetrala kuta	93	Upoznajmo džepno računalo	186
2.7. Konstrukcije nekih kutova	97	Rješenja nekih zadataka	192
		Kazalo pojmova	204

Upoznajte likove s kojima ćete se družiti kroz gradivo udžbenika Petica!



Luka je odličan učenik. Iako se kod njega nikad ne zna hoće li imati 4 ili 5, matematika mu je jedan od najdražih predmeta. Kada mu nešto nije jasno, ne srami se pitati učiteljicu da mu pojasni gradivo.

Beni je Lukin pas. Voli dobro jelo, voli spavati, ali voli i prisluškiivati kada Luka kod kuće priča o školi. Beni naročito voli matematiku i voli na šaljiv način komentirati matematičke probleme.

Matija voli playstation i svoj skateboard mnogo više od matematike. No, pravi je stručnjak za računala svih vrsta, pa tako i za džepna. Otkad je učiteljica dozvolila njihovo korištenje, pomaže cijelom razredu u svladavanju gradiva.

Učiteljica na zanimljiv način približava učenicima i najteže gradivo iz matematike. Uvijek je tu ako treba nešto dodatno objasniti i strpljivo odgovara na njihova brojna pitanja.

UČITELJICA

ANA

Maja ima sve petice i najbolja je učenica u razredu. Voli matematiku i redovito piše zadaće. Često se prepire s Lukom i Matijom oko točnih rješenja zadataka. Naravno, smatra da je baš ona uvijek u pravu!

Ana je Lukina starija sestra. Ne voli kad joj Luka kopa po stvarima, ni kad joj Beni sakrije tajno pismo. Iako ima svoje društvo, često se druži s tim "balavcima", pogotovo ako se ide u kupovinu ili slavi rođendan.

Dragi čitatelji,



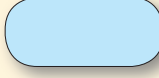

pred vama je udžbenik sa zbirkom zadataka iz matematike za 6. razred osnovne škole, koji je u potpunosti je usklađen sa stručnim i metodičkim zahtjevima Hrvatskog nacionalnog obrazovnog standarda (HNOS). Uz objedinjeni udžbenik sa zbirkom zadataka, u udžbenički komplet ubrajaju se još i CD za učenike te rješenja zadataka, koji će vam približiti gradivo matematike i učiniti ga zanimljivim, pa i zabavnim.

Gradivo šestog razreda započinje ponavljanjem gradiva petog razreda te rada s džepnim računalom. Nakon toga slijedi proširivanje znanja o razlomcima. Ove školske godine učiti ćete o dva skupa brojeva - cijelim brojevima i racionalnim brojevima. U geometrijskom dijelu radit ćete sa svim vrstama trokuta i nekim vrstama četverokuta. Osim toga, naučiti ćete kako rješavati linearne jednadžbe, što će vam često zatrebati u svakodnevnom životu.

Svaki naslov u udžbeniku započinje problemom koji će vas kroz zanimljiv zadatak iz života uvesti u novo gradivo. Zatim slijede riješeni primjeri, putem kojih ćete stjecati nova znanja iz matematike. Znanje ćete utvrditi pomoću raznovrsnih zadataka koji se nalaze iza primjera. Zadaci su složeni po težini od lakših prema težima. Ako neku vrstu zadataka poželite još više uvježbati, na CD-u ćete naći dodatne i dopunske zadatke te druge obrazovne materijale i igre vezane uz matematiku.

Kroz gradivo matematike voditi će vas simpatični likovi: Luka, Maja, Matija, učiteljica, Beni i ostali, koji će se, baš kao i vi, uhvatiti u koštac s gradivom matematike. Svojim razgovorima i savjetima olakšat će vam svladavanje početnih teškoća.

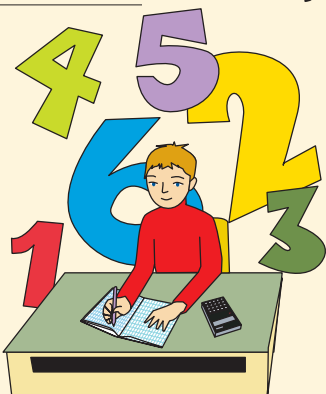
Kako bi vaš uspjeh iz matematike bio još bolji, na kraju svake nastavne teme nalaze se pitanja za ponavljanje i uvježbavanje gradiva. U udžbeniku su posebno označeni dijelovi gradiva koji nisu dio obaveznog programa, ali su namijenjeni učenicima koji žele znati više. Osim toga, i drugi dijelovi građe istaknuti su posebnim okvirima. U tablici su dani njihovi opisi i značenja:

Oblik	Značenje
Zadatak 4.	Lakši zadatak (redni broj zadatka obojan svijetlo-plavom bojom)
Zadatak 5.	Složeniji zadatak i zadaci za nadarene (redni broj zadatka obojan narančastom bojom)
	Važan dio gradiva kojeg treba dobro naučiti
	Dio teksta za lakše praćenje i pamćenje gradiva
	Formula
	Gradivo za radoznalce

Ako se u nekom zadatku traži crtanje ili upisivanje rješenja u udžbenik, riješite zadatak u svojoj bilježnici. Udžbenik trebaju koristiti i generacije iza vas.

Puno uspjeha u radu žele vam autorice udžbenika!

0. Uvodno ponavljanje



Uspoređivanje brojeva

- ✓ Oznake:
 $a = b$ "broj a je jednak broju b "
 $a < b$ "broj a je manji od broja b "
 $a > b$ "broj a je veći od broja b ".
- ✓ Nula je manja od svakog prirodnog broja.
- ✓ Od dva broja veći je onaj koji se nalazi desno odnosno manji je onaj broj koji se nalazi lijevo na brojevnom pravcu.

Svojstva zbrajanja i množenja prirodnih brojeva

- ✓ Komutativnost:
 $a + b = b + a$; $a \cdot b = b \cdot a$
- ✓ Asocijativnost:
 $a + (b + c) = (a + b) + c$;
 $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
- ✓ Zbrajanje s 0 i množenje s 1
 $a + 0 = a$;
 $a \cdot 1 = a$;
- ✓ Distributivnost
 $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$
 $c \cdot (a + b) = c \cdot a + c \cdot b$.

Dijeljenje i nula

- ✓ $0 : a = 0$
- ✓ ~~$a : 0$~~ s nulom se ne dijeli!!

Redoslijed računskih operacija

1. Množenje i dijeljenje
2. Zbrajanje i oduzimanje.

Ako u zadatku postoje zagrade, najprije moramo izračunati vrijednost izraza u njima.

Prirodan broj je djeljiv s:

- ✓ 2, ako mu je posljednja znamenka 0, 2, 4, 6 ili 8
- ✓ 3, ako mu je zbroj znamenaka djeljiv s 3
- ✓ 5, ako mu je posljednja znamenka 0 ili 5
- ✓ 9, ako mu je zbroj znamenaka djeljiv s 9
- ✓ 10, ako mu je posljednja znamenka 0.

Kako odrediti najveći zajednički djelitelj $D(a, b)$ prirodnih brojeva a i b :

- ✓ Rastavimo brojeve na faktore
- ✓ Pomnožimo zajedničke faktore
 $D(3500, 2800) = 100 \cdot 7 = 700$.

$$\begin{array}{r|l} 3500, & 2800 & 100 \\ 35, & 28 & 7 \\ 5, & 4 & \end{array}$$

Kako odrediti najmanji zajednički višekratnik $V(a, b)$ prirodnih brojeva a i b :

- ✓ Rastavimo brojeve na faktore
- ✓ Pomnožimo zajedničke faktore s preostalim faktorima iz rastava

$$\begin{aligned} V(70, 2400) &= \\ &= 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 240 \\ &= 16800. \end{aligned}$$

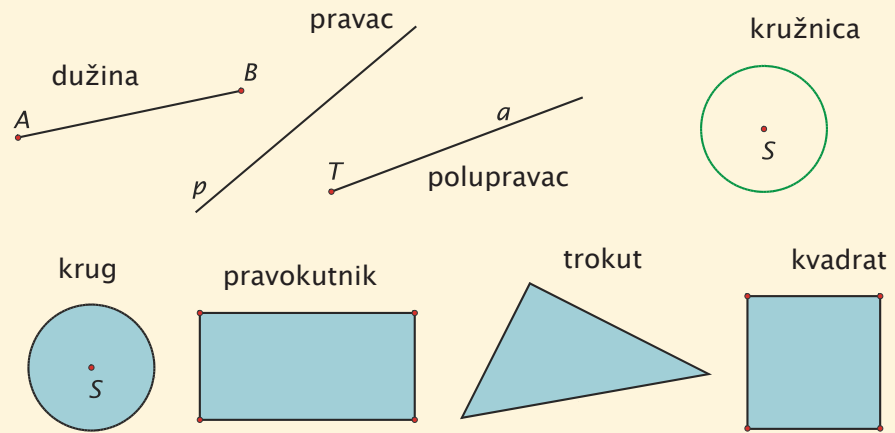
$$\begin{array}{r|l} 70, & 2400 & 2 \\ 35, & 1200 & 5 \\ 7, & 240 & \end{array}$$

Mjerne jedinice za duljinu

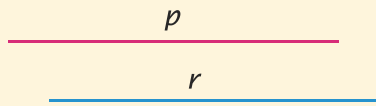
- ✓ Osnovna mjerna jedinica za duljinu je metar (1 m)
- ✓ milimetar: 1 mm
- ✓ centimetar: 1 cm = 10 mm
- ✓ decimetar: 1 dm = 10 cm = 100 mm
- ✓ metar: 1 m = 10 dm = 100 cm = 1000 mm
- ✓ kilometar 1 km = 1000 m.



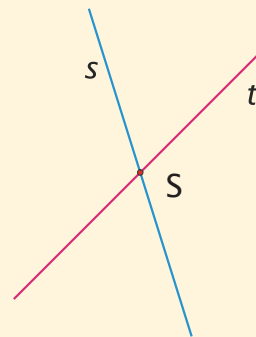
Skupovi točaka u ravnini



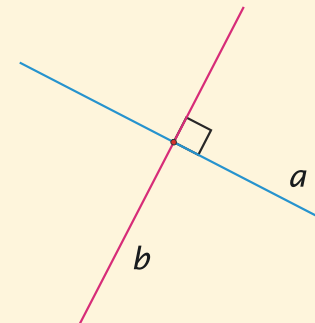
Položaj pravaca u ravnini



Usporedni pravci
(paralelni)
 $p \parallel r$



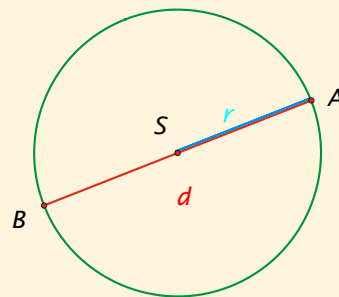
Pravci koji se sijeku
 S - sjecište



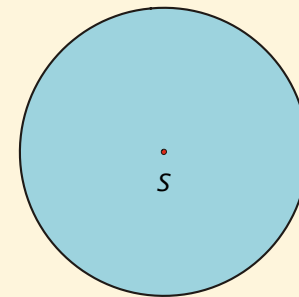
Okomiti pravci:
 $a \perp b$

Kružnica i krug

$k(S, r)$
 S - središte kružnice
 \overline{AB} - promjer ili dijametar
 \overline{AS} - polumjer ili radijus
 $d = |AB|$
 $r = |AS|$



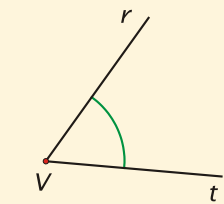
kružnica



krug

Kut

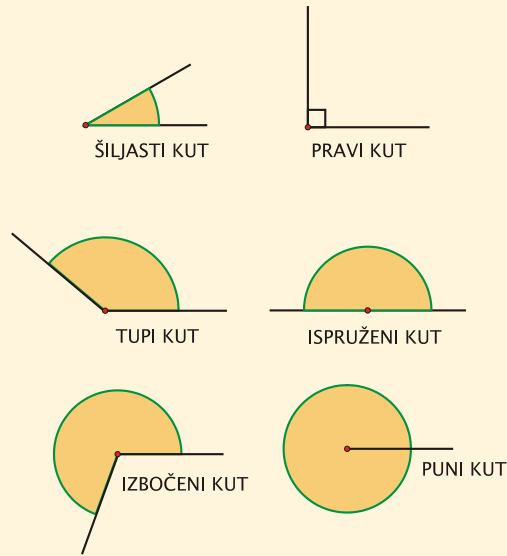
Osnovno o kutu



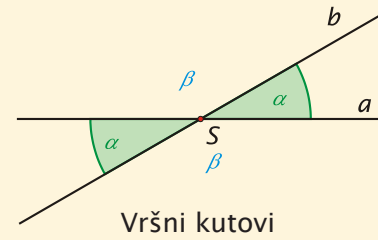
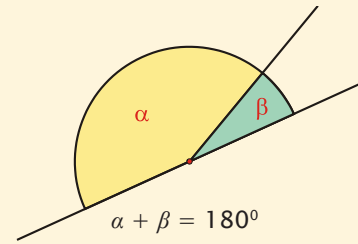
$\sphericalangle rVt$

t, r - kraci kuta
 V - vrh kuta

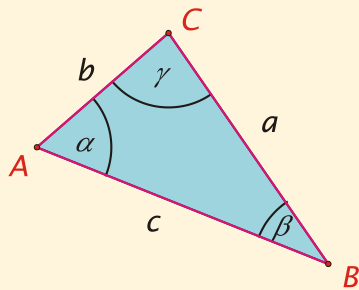
Vrste kutova



Sukuti ili susjedni kutovi



Trokut



$\triangle ABC$

vrhovi: A, B, C

stranice: $\overline{AB}, \overline{BC}$ i \overline{CA}

kutovi: α, β, γ

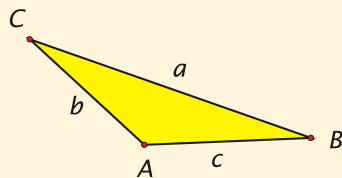
$a = |BC|$

$b = |AC|$

$c = |AB|$

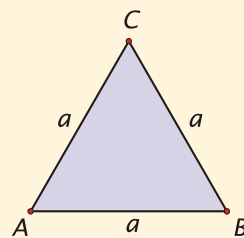
$o = a + b + c$

Vrste trokuta s obzirom na duljine stranica



Raznostraničan trokut

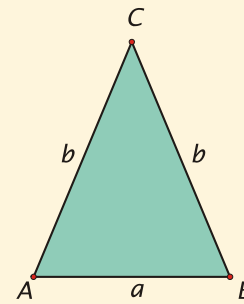
$o = a + b + c$



Jednakostraničan trokut

trokut

$o = 3 \cdot a$



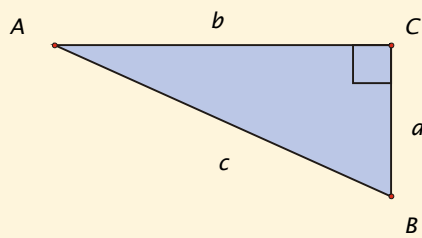
Jednakokrračan trokut

\overline{AB} osnovica

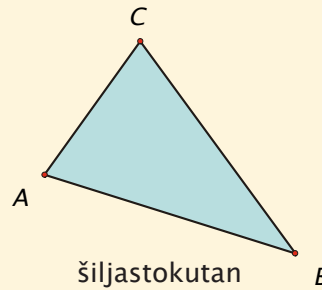
$\overline{AC}, \overline{BC}$ krakovi

$o = a + 2 \cdot b$

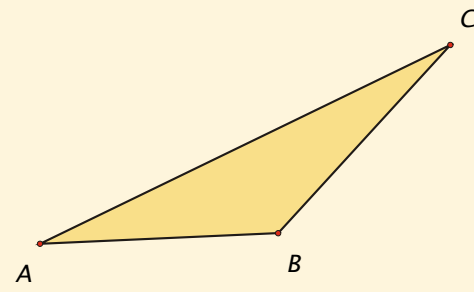
Vrste trokuta obzirom na veličine kutova



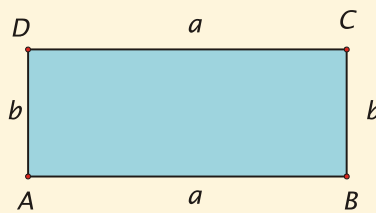
pravokutan
 \overline{AC} , \overline{BC} katete
 \overline{AB} hipotenuza



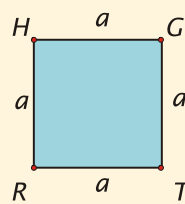
šiljastokutan



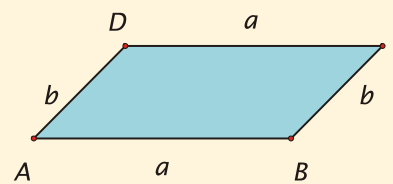
tupokutan



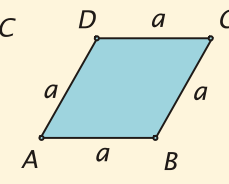
pravokutnik
 $o = 2 \cdot a + 2 \cdot b$
 $o = 2 \cdot (a + b)$
 $P = a \cdot b$



kvadrat
 $o = 4 \cdot a$
 $P = a \cdot a$



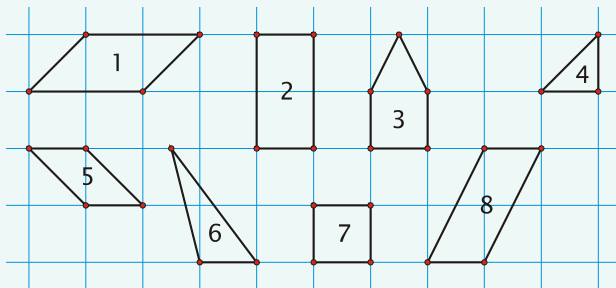
paralelogram
 $o = 2 \cdot a + 2 \cdot b$



romb
 $o = 4 \cdot a$

Zadaci

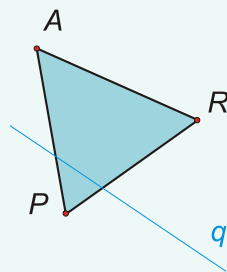
1. Koje likove prepoznaješ na slici:



- Nacrtaj pravac a i točku T koja mu ne pripada. Zatim nacrtaj pravac b kroz točku T takav da je:
 a) $a \perp b$; b) $a \parallel b$.
- Nacrtaj kružnicu:
 a) sa središtem u točki A i polumjerom 4 cm;
 b) sa središtem u točki B i promjerom 32 mm.
- Nacrtaj kutove i ispod svakog zapiši kojoj vrsti pripadaju:
 a) $\alpha = 210^\circ$; b) $\beta = 90^\circ$; c) $\gamma = 8^\circ$; d) $\delta = 170^\circ$.

- Nacrtaj pravce a i b koji se sijeku pod kutom od 75° . Izračunaj veličine svih kutova koje određuju ta dva pravca.
- Nacrtaj jednakostraničan trokut duljine stranice 42 mm. Izračunaj opseg trokuta.
- Nacrtaj jednakokrtačan trokut duljine osnovice 2 cm i kraka 5 cm. Izračunaj opseg trokuta.
- Nacrtaj raznostraničan trokut sa stranicama duljina 42 mm, 38 mm i 3 cm. Izračunaj opseg trokuta.
- Nacrtaj pravokutan trokut s katetama duljina 52 mm i 2 cm. Izmjeri duljinu hipotenuze i izračunaj opseg i površinu tog trokuta.
- Nacrtaj pravokutnik $CDEF$ sa stranicama duljina $|CD| = 7$ cm i $|DE| = 3$ cm. Izračunaj opseg i površinu pravokutnika.
- Nacrtaj kvadrat $ABCD$ sa stranicom duljine 4 cm. Izračunaj njegov opseg i površinu.
- Izračunaj opseg pravokutnika, ako su zadane površina i duljina stranice: $P = 72$ cm², $a = 12$ cm.

13. Izračunaj duljinu katete b pravokutnog trokuta, ako su zadane površina i duljina katete a :
 $P = 30 \text{ cm}^2$, $a = 6 \text{ cm}$.
14. Nacrtaj paralelogram $KLMN$ sa susjednim stranicama duljina 4 cm i 3 cm. Koliki je opseg tog paralelograma?
15. Nacrtaj neku dužinu u ravnini i konstruiraj njenu simetralu.
16. Nacrtaj dvije točke u ravnini. Pronađi sve točke koje su jednako udaljene od obiju točaka.
17. Precrtaj ovu sliku u bilježnicu i nađi osnosimetričnu sliku trokuta APR s obzirom na pravac q :



18. U prazan kvadratić stavi jedan od znakova $>$, $<$ ili $=$.

28 27 408 4040 55 55
 0 23 10 0 0 10

19. Zaokruži brojeve
 239, 3011, 517, 8901, 6755 i 253
 a) na desetice;
 b) na stotice;
 c) na najveću mjesnu vrijednost.
20. Izračunaj:
 a) $34127 + 6090$; b) $4022 - 128$; c) $22 \cdot 341$;
 d) $6 \cdot 5188$; e) $24 \cdot 103$.
21. Izračunaj:
 a) $63 : 7$; b) $1161 : 9$; c) $2925 : 45$;
 d) $312 : 22$; e) $45369 : 213$; f) $6273 : 17$;
 g) $267575 : 973$.
22. Stranice trokuta su tri uzastopna broja. Izračunaj mu opseg, ako je najdulja stranica duga 301 cm.
23. Izračunaj:
 a) $12 + 8 \cdot 3 + 6 \cdot 6$;
 b) $8 \cdot 10 - 6 \cdot 4 + 6$;
 c) $105 - 5 \cdot 10 + 12$;
 d) $33 : 11 + 5 \cdot 7 - 38$.

24. Izračunaj:
 a) $11 + 25 - (3 + 15) + 8$;
 b) $140 + (3 \cdot 20 - 50) : (56 - 54)$;
 c) $24 - [64 : (4 + 2 \cdot 2) - 6] + 25 : 5$;
 d) $10 + \{3 \cdot [57 - (9 + 2 \cdot 3) + 7] - 3\} : 12$.
25. Koliko minuta ima u prosincu?
26. Izračunaj napamet:
 a) $15 - 15$; $9 : 0$; $0 - 0$; $0 + 0$; $1 : 1$; $1 \cdot 0$;
 $0 + 1$; $1 : 0$; $1 - 0$;
 b) $8 \cdot 0$; $8 - 0$; $0 \cdot 8$; $0 : 8$; $8 : 0$; $0 + 27$;
 $55 - 55$; $55 : 55$;
 c) $23 \cdot 0$; $5 + 0$; $6 - 6$; $14 : 0$; $12 - 0$; $33 \cdot 0$;
 $0 + 12$; $12 + 0$; $4 : 4$.
27. Zadani su brojevi 405, 223, 492, 1973, 7000, 5, 10, 1. Koji od ovih brojeva su djeljivi s:
 a) 5; b) 10; c) 100; d) 1000;
 e) 3; f) 9; g) 1; h) 2?
28. Umjesto kvadratića zapiši znamenku tako da broj 402 bude djeljiv s:
 a) 1; b) 2; c) 3; d) 5; e) 9; f) 10.
29. Rastavi na proste faktore: 200, 64, 72.
30. Pronađi D(56, 72) i V(56, 72).
31. Pronađi D(12, 13) i V(12, 13).
32. Tri komada žice duge 400 cm, 350 cm i 375 cm treba izrezati na jednake dijelove. Kolika je najveća duljina tih dijelova?
33. Dva biciklista treniraju po kružnoj stazi i u isto vrijeme kreću sa starta. Prvi biciklist prijeđe stazu za 18 min, a drugi za 27 min. Nakon koliko vremena će se biciklisti opet naći na startu?
34. Izračunaj:
 a) $3.4 + 2.50$; b) $20.9 + 6.25$;
 c) $38.421 + 15.625$; d) $1255.9221 + 39.0625$;
 e) $73.454 + 97.6563$; f) $3490.909 + 244.1406$;
 g) $108.414 + 610.3516$.
35. Izračunaj:
 a) $23.4 - 2.50$; b) $30.9 - 6.25$;
 c) $49.421 - 15.625$; d) $955.9221 - 39.0625$;
 e) $100.454 - 97.6563$; f) $490.9 - 244.1406$;
 g) $808.41 - 610.3516$.
36. Izračunaj:
 a) $5.5 \cdot 3.25$; b) $22.8 \cdot 34.47$;
 c) $40.1 \cdot 65.69$; d) $5.74 \cdot 95$;
 e) $74.7 \cdot 128.13$; f) $92 \cdot 159.35$;
 g) $1.093 \cdot 19.1$; h) $1.266 \cdot 221.79$;
 i) $14.39 \cdot 253.1$; j) $16.12 \cdot 284.23$.

37. Izračunaj:

- a) $78591.6 : 34.47$; b) $263.4169 : 65.69$;
 c) $55.62634 : 96.91$; d) $9571.311 : 1281.3$;
 e) $14660.2 : 15.935$; f) $20829.3 : 190.57$;
 g) $28078.61 : 2.2179$; h) $36408.14 : 253.01$;
 i) $45817.88 : 284.23$.

38. Automobil vozi brzinom 80.5 km na sat. Koliku udaljenost će prijeći za

- a) 2 sata; b) 3.5 sati; c) 9.25 sati?

39. Maja želi počastiti prijatelje u razredu za svoj rođendan. U njenom razredu ima 25 učenika. Maja želi svakom dati tri bombona, dvije čokoladice i jednu žvaku. Koliko bombona, čokoladica i žvaka treba nabaviti? Koliko novaca je potrebno Ani za tu kupovinu ako je cijena jednog bombona 1.50 kn, jedne čokoladice 3.69 kn i jedne žvake 0.73 kn?

40. Razred 5.a u kojem je 29 učenika odlučio je ići u kino pogledati novi nastavak filma "Harry Potter". S njima idu i dvije učiteljice u pratnji. Koliko će ukupno stajati njihove karte, ako ulaznica za jednog učenika stoji 18.50 kn, a za jednu odraslu osobu 23.99 kn?

41. Majina mama je kupila 15 pari čarapa i ukupno ih platila 112.35 kn. Koliko je stajao jedan par čarapa?

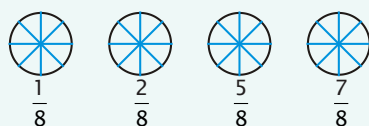
42. Vinogradar želi 9.8 l vina prelići u boce. U jednu bocu može uliti 0.7 l. Koliko mu je boca potrebno?

43. Za prehranu životinja dnevno se potroši 35.4 kg sijena. Za koliko dana će biti dovoljne zalihe od 1 486.8 kg?

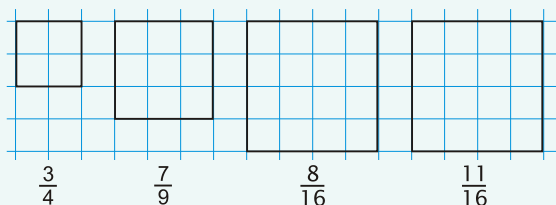
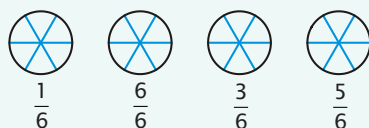
44. Anini roditelji kupuju stan površine 75.75 m² za 250000 kn. Kolika je cijena jednog kvadratnog metra toga stana?

45. Lukin tata je kupio 15.25 kg mandarina za 45.75 kn. Kolika je cijena 1 kg mandarina?

46. Oboji naznačeni dio kruga:



47. Nacrtaj kvadrate kao na slici. U svakom kvadratu oboji dio zadan razlomkom. Koji dio kvadrata je ostao neobojan?



48. Na stolu se nalazi 15 kuglica, među njima je 9 crvenih. Koliki dio svih kuglica čine crvene kuglice?

49. Između razlomaka u kvadratić stavi jedan od znakova =, < ili >:

a) $\frac{1}{4} \square \frac{5}{4}$; b) $\frac{11}{5} \square 1$; c) $\frac{3}{3} \square 1$; d) $\frac{7}{8} \square \frac{6}{8}$.

50. Poredaj zadane razlomke po veličini, počevši s najmanjim:

$\frac{2}{15}, \frac{24}{15}, \frac{3}{15}, \frac{33}{15}, \frac{101}{15}$.

51. Na stolu se nalazi 25 kuglica, među njima je 8 crvenih, 7 plavih, a ostalo su žute kuglice.

- a) Koliki dio svih kuglica čine crvene kuglice?
 b) Koliki dio svih kuglica čine plave kuglice?
 c) Koliki dio svih kuglica čine žute kuglice?

52. Majka ima 9 jabuka i želi ih pravedno razdijeliti na četvero djece. Koliki dio će dobiti svako dijete?

53. Koliki je dio mjeseca studenog:

- a) jedan dan; b) jedan tjedan; c) dva tjedna?

54. Koliko je:

- a) $\frac{1}{2}$ od 12 kg; b) $\frac{4}{25}$ od 100 l;
 c) $\frac{3}{1000}$ od 5000 m; d) $\frac{7}{100}$ od 200 min.

55. Koliko je:

- a) $\frac{1}{2}$ od 6 sati; b) $\frac{2}{3}$ od 12 mjeseci; c) $\frac{3}{4}$ od 100 dana?

56. Izračunaj. Mjernu jedinicu pretvori u manju tako da dijeljenje bude moguće:

- a) $\frac{3}{10}$ od 2 m; b) $\frac{5}{8}$ od 7 m; c) $\frac{13}{4}$ od 2 h;
 d) $\frac{3}{25}$ od 1 dm?

57. Proširi razlomke:

- a) $\frac{1}{3} \text{ s } 11$; b) $\frac{2}{5} \text{ s } 4$; c) $\frac{1}{4} \text{ s } 8$; d) $\frac{7}{8} \text{ s } 6$.

58. Koji razlomci su jednaki 1, koji su manji, a koji

veći od 1? $\frac{17}{5}, \frac{4}{41}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{17}{17}, \frac{102}{12}$.

59. Kojim brojem treba proširiti razlomak $\frac{3}{7}$ da dobijemo $\frac{27}{63}$?

60. Skrati do neskrativog razlomka:

- a) $\frac{15}{40}$; b) $\frac{90}{36}$; c) $\frac{100}{200}$; d) $\frac{360}{450}$.

61. Izračunaj. Ako možeš, rezultat skrati:

- a) $\frac{3}{8} + \frac{19}{8}$; b) $\frac{15}{16} - \frac{15}{16}$; c) $\frac{10}{4} - \frac{6}{4}$; d) $\frac{17}{20} + \frac{18}{20}$.

1. Operacije s razlomcima

Važni pojmovi

zajednički nazivnik

proširivanje razlomaka

skraćivanje razlomaka

uspoređivanje razlomaka

zbrajanje razlomaka

oduzimanje razlomaka

množenje razlomaka

recipročna vrijednost

dijeljenje razlomaka

$$\frac{1}{12}$$



$$\frac{2}{12}$$



$$\frac{3}{12}$$



$$\frac{4}{12}$$



$$\frac{5}{12}$$



$$\frac{6}{12}$$



$$\frac{7}{12}$$



$$\frac{8}{12}$$



$$\frac{9}{12}$$



$$\frac{10}{12}$$



$$\frac{11}{12}$$



$$\frac{12}{12}$$



$$\frac{1}{4}$$



$$\frac{2}{4}$$



$$\frac{3}{4}$$



$$\frac{4}{4}$$



$$\frac{1}{3}$$



$$\frac{2}{3}$$



$$\frac{3}{3}$$



$$\frac{1}{2}$$



$$\frac{1}{2}$$



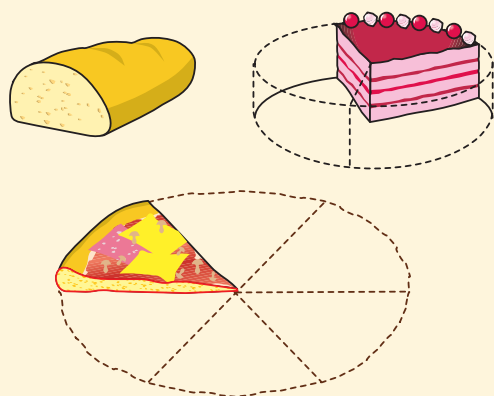
$$\frac{1}{1}$$



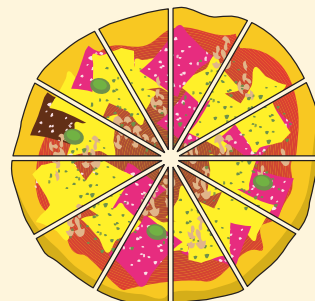
Zašto nam trebaju razlomci?

Da bismo znali:

- koliko je sati kad netko kaže: sedam i pol, tri četvrt devet, dva i četvrt
- kako razrezati pizzu na dvanaest jednakih dijelova
- kako pravedno podijeliti čokoladu s prijateljem
- izračunati svoj džeparac, ako mama kaže da će nam dati desetinu plaće
- odrediti trajanje nota kao što su četvrtinka i šesnaestinka



$\frac{12}{12}$ pizze



MLJAC, MLJAC
IZGLEDA DA ČEMO
OVDJE PUNO UČITI
O ČOKOLADAMA I
PIZZAMA

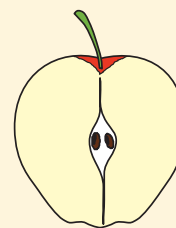


jedna cijela jabuka



$\frac{1}{1}$

jedna polovina jabuke



$\frac{1}{2}$

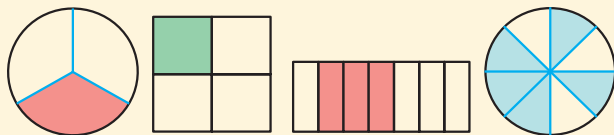
Kratki zadaci za ponavljanje:



1. Pročitaj razlomke: $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{7}{6}$, $\frac{11}{10}$, $\frac{17}{100}$, $\frac{193}{234}$.

2. Kako nazivamo dijelove razlomka $\frac{a}{b}$?

3. Koji razlomci su prikazani na slikama?

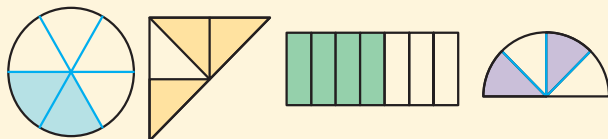


4. Na prvoj slici je nacrtana cijela čokolada. Napiši razlomkom dijelove čokolade koji su nacrtani na ostalim slikama.



5. Na koliko su dijelova podijeljeni likovi. Koliki dio lika je obojan?

a) b) c) d)



6. Zbroji razlomke: $\frac{3}{11} + \frac{4}{11} =$

a) Kako se naziva rezultat kod zbrajanja?
b) Kako se nazivaju brojevi koje zbrajamo?

7. Oduzmi razlomke: $\frac{19}{17} - \frac{11}{17} =$

a) Kako se naziva rezultat kod oduzimanja?
b) Kako se nazivaju brojevi koje oduzimamo?

8. Ponovi tablicu množenja!

a) Kako se naziva rezultat kod množenja?
b) Kako se nazivaju brojevi koje množimo?
c) Koliko je $4 \cdot 1$; $3 \cdot 0$; $1 \cdot 0$; $9 \cdot 1$?

9. Ponovi tablicu dijeljenja!

a) Kako se naziva rezultat kod dijeljenja?
b) Kako se nazivaju brojevi koje dijelimo?
c) Koliko je $2 : 1$; $0 : 9$; $16 : 1$; $1 : 1$; $0 : 3$?

10. Kojim redoslijedom izvršavamo računске operacije?



1.1. Svođenje razlomaka na zajednički nazivnik



Čokolada

Ana je pojela trećinu čokolade, a Maja pola čokolade.

Pogledaj sliku i odgovori:

- koliko "kockica" čokolade je pojela Ana;
- koliko "kockica" čokolade je pojela Maja;
- koliko "kockica" čokolade su pojele zajedno;
- jesu li pojele cijelu čokoladu;
- koliki dio cijele čokolade su djevojčice pojele?

$$\frac{3}{2} > \frac{1}{2}$$

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{4} = \frac{8}{4}$$

$$\frac{12}{7} - \frac{3}{7} = \frac{9}{7}$$

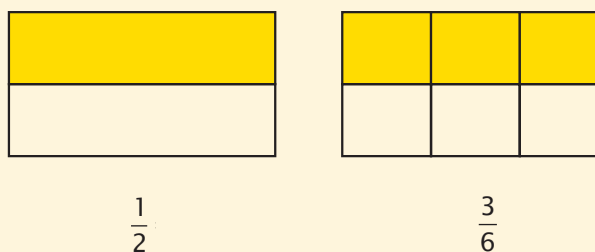
Prošle ste godine naučili zbrajati, oduzimati i uspoređivati razlomke s jednakim nazivnicima. No često nam se, kao u 1. zadatku, pojavljuju razlomci s različitim nazivnicima. Da bismo razlomke s različitim nazivnicima mogli uspoređivati, zbrajati ili oduzimati, najprije ih moramo svesti na zajednički nazivnik.

Proširivanje
razlomka

"Svesti na zajednički nazivnik" znači proširivanjem preoblikovati razlomke tako da im nazivnici budu jednaki. Prisjetimo se da proširiti razlomak znači pomnožiti mu brojnik i nazivnik istim brojem, različitim od nule.

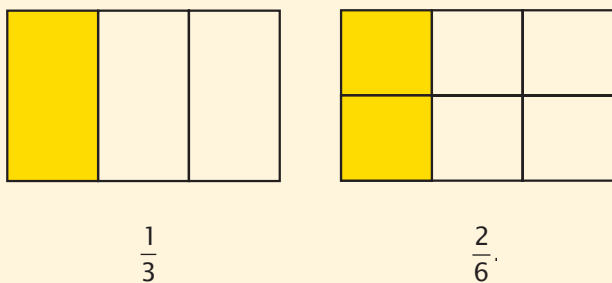
Primjer 1. Proširivanje razlomaka

- Proširimo razlomak $\frac{1}{3}$ brojem 2;
- Proširimo razlomak $\frac{1}{2}$ brojem 3.



Rješenje:

- Proširimo razlomak $\frac{1}{3}$ brojem 2. $\frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{2}{6}$.



Primijetimo da oba razlomka sad imaju nazivnik 6. Dakle, razlomke $\frac{1}{3}$ i $\frac{1}{2}$ sveli smo na zajednički nazivnik 6.

Prisjetimo se veze koja postoji između brojeva 2 i 3 te broja 6.

Broj 6 je zajednički višekratnik brojeva 2 i 3. Broj 6 je ujedno i najmanji zajednički višekratnik brojeva 2 i 3.

- Proširimo razlomak $\frac{1}{2}$ brojem 3. $\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3} = \frac{3}{6}$.

Za zajednički nazivnik uzmi najmanji zajednički višekratnik zadanih nazivnika.



Primjer 2. Najmanji zajednički višekratnik nazivnika

Zajednički nazivnik

Proširimo razlomke $\frac{5}{12}$ i $\frac{7}{8}$ tako da im nazivnik bude jednak najmanjem zajedničkom višekratniku njihovih nazivnika.

Rješenje:

Da bismo odredili najmanji zajednički višekratnik nazivnika, rastavljamo brojeve 12 i 8 na proste faktore:

$$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$$

$$8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$$

$$V(12, 8) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 24$$

Najmanji zajednički višekratnik možemo računati i ovako:

$$\begin{array}{r|l} 12, 8 & 2 \\ 6, 4 & 2 \\ 3, 2 & 2 \\ 3, 1 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

Da bismo razlomak $\frac{5}{12}$ proširili tako da mu nazivnik bude 24, moramo brojnik i nazivnik pomnožiti s 2. $\frac{5}{12} = \frac{5 \cdot 2}{12 \cdot 2} = \frac{10}{24}$.

Da bismo razlomak $\frac{7}{8}$ proširili tako da mu nazivnik bude 24, moramo brojnik i nazivnik pomnožiti s 3. $\frac{7}{8} = \frac{7 \cdot 3}{8 \cdot 3} = \frac{21}{24}$.

Primjer 3. Svođenje na zajednički nazivnik

Svedimo razlomke $\frac{2}{5}$, $\frac{7}{20}$ i $\frac{1}{8}$ na zajednički nazivnik.

Rješenje:

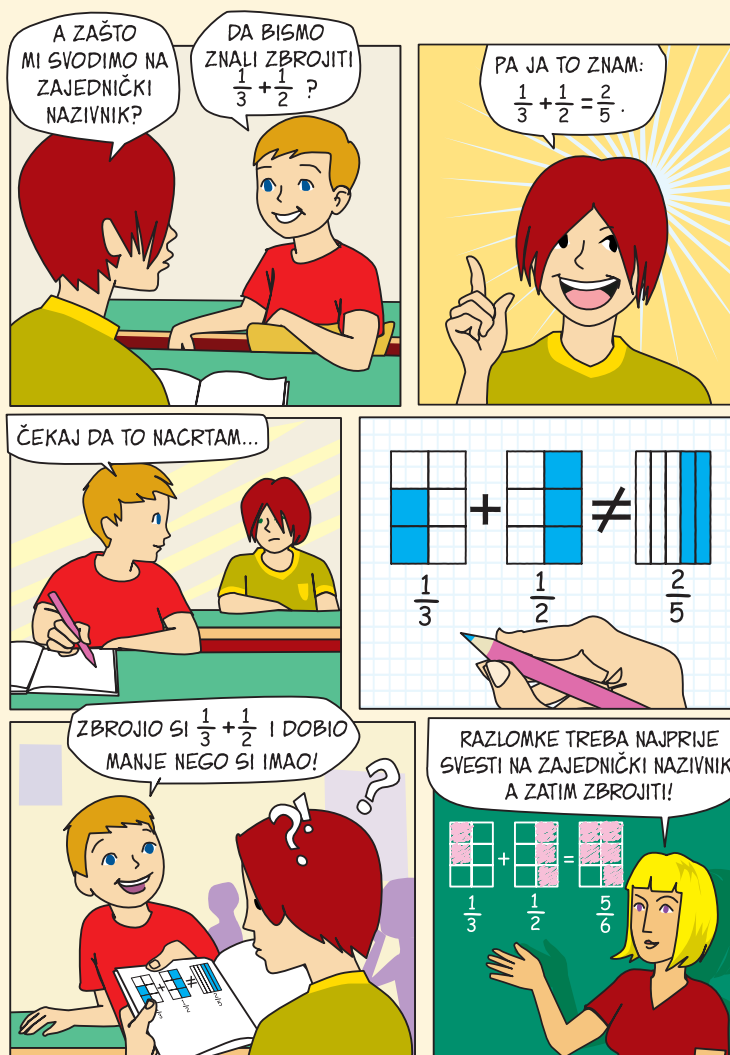
$$\begin{array}{r|l} 5, 20, 8 & 2 \\ 5, 10, 4 & 2 \\ 5, 5, 2 & 2 \\ 5, 5, 1 & 5 \\ 1, 1 & \end{array}$$

$$V(5, 20, 8) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 = 40.$$

$$\frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 8}{5 \cdot 8} = \frac{16}{40},$$

$$\frac{7}{20} = \frac{7 \cdot 2}{20 \cdot 2} = \frac{14}{40},$$

$$\frac{1}{8} = \frac{1 \cdot 5}{8 \cdot 5} = \frac{5}{40}.$$



Zadaci

1. Svedi na najmanji zajednički nazivnik:

a) $\frac{1}{2}$ i $\frac{2}{3}$; b) $\frac{8}{3}$ i $\frac{9}{5}$; c) $\frac{3}{10}$ i $\frac{5}{7}$; d) $\frac{5}{6}$ i $\frac{3}{5}$;
 e) $\frac{3}{4}$ i $\frac{5}{3}$; f) $\frac{6}{7}$ i $\frac{9}{5}$; g) $\frac{13}{9}$ i $\frac{4}{7}$; h) $\frac{2}{11}$ i $\frac{9}{10}$.

2. Svedi na najmanji zajednički nazivnik:

a) $\frac{1}{2}$ i $\frac{3}{4}$; b) $\frac{5}{6}$ i $\frac{7}{3}$; c) $\frac{3}{25}$ i $\frac{13}{5}$; d) $\frac{5}{6}$ i $\frac{11}{18}$;
 e) $\frac{3}{4}$ i $\frac{9}{8}$; f) $\frac{6}{14}$ i $\frac{4}{7}$; g) $\frac{5}{9}$ i $\frac{1}{3}$; h) $\frac{3}{20}$ i $\frac{9}{10}$.

3. Svedi na najmanji zajednički nazivnik:

a) $\frac{1}{6}$ i $\frac{3}{4}$; b) $\frac{5}{9}$ i $\frac{7}{12}$; c) $\frac{3}{25}$ i $\frac{13}{10}$;

d) $\frac{5}{12}$ i $\frac{11}{18}$; e) $\frac{11}{16}$ i $\frac{5}{24}$; f) $\frac{1}{6}$ i $\frac{17}{10}$;
 g) $\frac{13}{21}$ i $\frac{13}{14}$; h) $\frac{1}{15}$ i $\frac{11}{25}$; i) $\frac{15}{18}$ i $\frac{7}{20}$;
 j) $\frac{13}{9}$ i $\frac{1}{12}$; k) $\frac{3}{20}$ i $\frac{11}{16}$; l) $\frac{7}{15}$ i $\frac{7}{21}$.

4. Svedi na najmanji zajednički nazivnik:

a) $\frac{1}{6}$, $\frac{3}{4}$ i $\frac{5}{12}$; b) $\frac{5}{9}$, $\frac{7}{8}$ i $\frac{4}{7}$; c) $\frac{3}{25}$, $\frac{13}{10}$ i $\frac{8}{5}$;
 d) $\frac{25}{12}$, $\frac{13}{18}$ i $\frac{7}{9}$; e) $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{4}$ i $\frac{7}{10}$; f) $\frac{7}{9}$, $\frac{5}{6}$ i $\frac{4}{7}$;
 g) $\frac{7}{15}$, $\frac{13}{10}$ i $\frac{9}{5}$; h) $\frac{21}{12}$, $\frac{5}{8}$ i $\frac{17}{3}$.

Vježbalica

1. Svedi na najmanji zajednički nazivnik:

a) $\frac{1}{4}$ i $\frac{5}{6}$; b) $\frac{8}{5}$ i $\frac{7}{6}$;
 c) $\frac{13}{14}$ i $\frac{5}{7}$; d) $\frac{7}{10}$ i $\frac{3}{5}$;

2. Svedi na najmanji zajednički nazivnik:

a) 2 i $\frac{5}{4}$; b) $\frac{5}{7}$ i 3 ;
 c) $1\frac{4}{9}$ i $2\frac{1}{3}$; d) $\frac{7}{11}$ i $\frac{2}{10}$.

3. Svedi na najmanji zajednički nazivnik:

a) $3\frac{1}{8}$ i $2\frac{3}{4}$; b) $1\frac{5}{6}$ i $1\frac{2}{3}$;
 c) $\frac{2}{7}$ i $\frac{3}{5}$; d) 1 i $\frac{1}{8}$;

4. Svedi na najmanji zajednički nazivnik:

a) $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{6}$ i $\frac{9}{8}$; b) 4 i $\frac{4}{7}$;
 c) $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{27}$ i $\frac{1}{3}$; d) $\frac{3}{200}$ i $\frac{9}{100}$.

5. Svedi na najmanji zajednički nazivnik:

a) $\frac{1}{6}$, $\frac{5}{12}$ i $\frac{3}{4}$; b) $\frac{8}{9}$, $\frac{11}{18}$ i $\frac{7}{12}$;
 c) $\frac{3}{5}$, $\frac{7}{15}$ i $\frac{3}{10}$; d) $\frac{1}{2}$, 1 i $\frac{1}{8}$;

6. Svedi na najmanji zajednički nazivnik:

a) $1\frac{1}{6}$, $\frac{7}{2}$ i $\frac{5}{4}$; b) $\frac{1}{8}$, $\frac{6}{5}$ i $\frac{7}{10}$;
 c) $2\frac{15}{28}$ i $\frac{13}{14}$; d) $\frac{11}{15}$, $\frac{8}{5}$ i $\frac{11}{25}$;

7. Svedi na najmanji zajednički nazivnik:

a) $\frac{7}{18}$, $\frac{7}{36}$ i $\frac{7}{20}$; b) $\frac{13}{16}$, $\frac{3}{20}$ i $\frac{1}{12}$;
 c) $\frac{3}{20}$, 1 i $1\frac{1}{6}$; d) $\frac{17}{15}$, $\frac{13}{18}$ i $\frac{7}{21}$.

8. Svedi na najmanji zajednički nazivnik:

a) $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{3}$ i $\frac{5}{12}$; b) $\frac{4}{9}$, $\frac{5}{8}$, 1 i $\frac{4}{3}$;
 c) $\frac{3}{25}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{8}{25}$ i $\frac{8}{5}$; d) $\frac{5}{14}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{5}{3}$ i $\frac{7}{21}$;

9. Svedi na najmanji zajednički nazivnik:

a) $\frac{12}{5}$, $\frac{13}{4}$, $1\frac{1}{2}$ i $\frac{17}{10}$; b) $\frac{7}{9}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{5}{18}$ i $\frac{7}{12}$;
 c) $1\frac{7}{15}$, $1\frac{3}{10}$, $1\frac{8}{30}$ i $\frac{9}{5}$; d) $\frac{1}{12}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{8}{6}$, $\frac{7}{4}$ i $\frac{7}{3}$.

1.2. Uspoređivanje razlomaka



Podjela čokolade

Ana je pojela $\frac{4}{6}$ čokolade, Maja $\frac{1}{3}$, a Luka $\frac{1}{2}$ čokolade. Tko je pojeo najviše

čokolade? Jesu li djeca pojela cijelu čokoladu?

Često moramo odlučiti je li neka kutija veća ili manja, neko drvo više ili niže, neki put duži ili kraći. Kažemo da uspoređujemo zadane podatke, tj. uspoređujemo brojeve.

$a = b$ "broj a jednak je broju b "
 $a < b$ "broj a je manji od broja b "
 $a > b$ "broj a je veći od broja b "

Primjer 1. Uspoređivanje razlomka s brojem 1

Jesu li razlomci $\frac{3}{4}$ i $\frac{15}{8}$ veći ili manji od 1?

$$\frac{a}{b} > 1 \text{ ako je } a > b$$

Rješenje:

Razlikujemo razlomke koji su manji od 1, koji su jednaki 1 i one koji su veći od 1 (jednog cijelog). Razlomke koji su manji od jedan nazivamo **pravim razlomcima**. Pravi razlomci

su, primjerice: $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{10}{12}$, $\frac{56}{85}$ i $\frac{321}{564}$.

Razlomke koji su veći od jedan nazivamo **nepravim razlomcima**. Nepravi razlomci su, primjerice: $\frac{6}{4}$, $\frac{9}{8}$, $\frac{20}{12}$, $\frac{91}{85}$ i $\frac{611}{564}$.

Ako je brojnik razlomka veći od nazivnika vrijednost razlomka je veća od 1.

Dakle, vrijedi $\frac{3}{4} < 1$ jer je $3 < 4$

i $\frac{15}{8} > 1$ jer je $15 > 8$.

Primjer 2. Uspoređivanje razlomaka s jednakim nazivnicima

jednaki nazivnici

Usporedi a) $\frac{1}{6}$ i $\frac{3}{6}$; b) $\frac{3}{6}$ i $\frac{2}{6}$.

Rješenje:

Razlomke koji imaju jednake nazivnike uspoređujemo tako da usporedimo njihove brojnike.

Od dva razlomka koji imaju jednake nazivnike manji je onaj koji ima manji brojnik.

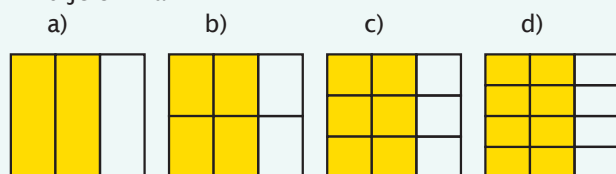
a) $\frac{1}{6} < \frac{3}{6}$, jer je $1 < 3$;

b) $\frac{3}{6} > \frac{2}{6}$, jer je $3 > 2$.



Zadaci

1. Uz sliku svakog kvadrata napiši razlomak koji prikazuje obojani dio kvadrata. Usporedi obojane dijelove kvadrata. Kakav je odnos među razlomcima koji odgovaraju tim obojanim dijelovima?



2. Zadane razlomke prikaži pomoću obojanih dijelova kvadrata jednake veličine:

a) $\frac{3}{4}$; b) $\frac{5}{8}$; c) $\frac{4}{6}$; d) $\frac{2}{3}$; e) $\frac{6}{9}$; f) $\frac{10}{16}$; g) $\frac{9}{12}$.

Ima li među njima jednakih razlomaka?

3. Usporedi zadane razlomke

a) $\frac{1}{2}$ i $\frac{3}{2}$; b) $\frac{8}{3}$ i $\frac{5}{3}$; c) $\frac{3}{10}$ i $\frac{3}{10}$; d) $\frac{5}{12}$ i $\frac{10}{12}$;

e) $\frac{11}{23}$ i $\frac{31}{23}$; f) $\frac{8}{13}$ i $\frac{5}{13}$; g) $\frac{23}{110}$ i $\frac{32}{110}$;

h) $\frac{5}{19}$ i $\frac{5}{19}$.

4. Poredaj zadane razlomke po veličini, počevši s najmanjim:

a) $\frac{11}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{8}{2}$ i $\frac{5}{2}$; b) $\frac{13}{6}$, $\frac{35}{6}$, $\frac{5}{6}$ i $\frac{10}{6}$;

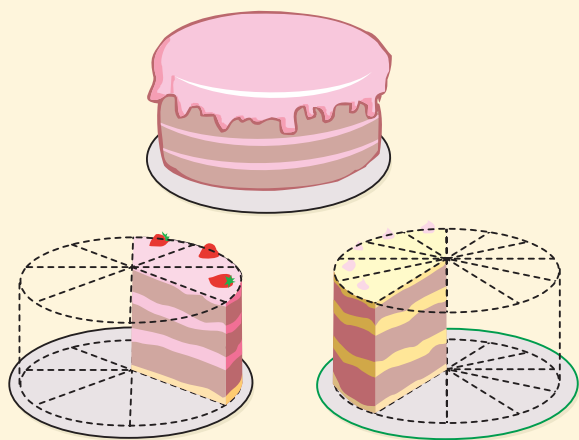
c) $\frac{1}{5}$, $\frac{13}{5}$, $\frac{8}{5}$ i $\frac{15}{5}$; d) $\frac{3}{16}$, $\frac{5}{16}$, $\frac{15}{16}$ i $\frac{1}{16}$.

Primjer 3. Torta

Luka je pojeo $\frac{3}{8}$ torte, a Lucija $\frac{5}{12}$. Tko je pojeo veći dio torte?

Rješenje:

Ako tortu razrežemo na osam jednakih dijelova, dobit ćemo veće kriške nego ako tortu razrežemo na dvanaest jednakih dijelova. Dakle, Luka je pojeo tri veće kriške, a Lucija pet manjih. No to još ne rješava naš problem. Da bismo mogli točno odrediti tko je pojeo više, moramo imati jednako velike komade. To znači da je potrebno zadane razlomke svesti na isti nazivnik.



Razlomke koji nemaju jednake nazivnike najprije svedemo na zajednički nazivnik pa usporedimo.

$$\frac{3}{8} < \frac{5}{12} \text{ jer je } \frac{3}{8} = \frac{3 \cdot 3}{8 \cdot 3} = \frac{9}{24},$$

$$\text{a } \frac{5}{12} = \frac{5 \cdot 2}{12 \cdot 2} = \frac{10}{24}. \quad \frac{9}{24} < \frac{10}{24}.$$

Primjer 4. Crtanje plakata

Lucija i Ana su zajedno izrađivale plakat za razrednu predstavu. Lucija je nacrtala $\frac{3}{7}$, a Ana $\frac{5}{12}$ plakata. Koja djevojčica je nacrtala veći dio plakata?

Dva razlomka možemo usporediti i koristeći pravilo “unakrsnog množenja”.

$$\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \text{ ako je } a \cdot d > b \cdot c$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ ako je } a \cdot d = b \cdot c$$

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \text{ ako je } a \cdot d < b \cdot c$$

Pravilo “unakrsnog množenja”

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$$

Pravilo “unakrsnog množenja” nije nikakav mađioničarski trik, nego jednostavna posljedica svođenja razlomaka na zajednički nazivnik i uspoređivanja. Evo kako su matematičari došli do tog pravila.

Želimo usporediti razlomke $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$.

Svodimo ih na zajednički nazivnik tako da prvi razlomak proširimo s d , a drugi s b .

$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d}$ i $\frac{c}{d} = \frac{b \cdot c}{b \cdot d}$. Oba razlomka sad imaju jednake nazivnike. Da bismo ih

usporedili, trebamo usporediti njihove brojnike. Dakle, zanima nas odnos između $a \cdot d$ i $b \cdot c$.

Ako je $a \cdot d < b \cdot c$, onda je i $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$.

Ako je $a \cdot d > b \cdot c$, onda je i $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$.

Ako je $a \cdot d = b \cdot c$, onda je i $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

I eto našeg pravila.

Rješenje:

Množimo “unakrsno”:

$$\frac{3}{7} \quad \frac{5}{12}$$

$$3 \cdot 12 \quad 7 \cdot 5$$

$$36 \quad > \quad 35$$

$\frac{3}{7} > \frac{5}{12}$. Dakle Lucija je nacrtala veći dio plakata.

Primjer 5. Rješavanje testa

Luka je na testu točno riješio 8 od 10 zadataka, a Petar je točno riješio 4 od 5 zadataka. Koji od njih je dobio bolju ocjenu? (Naravno, više točnih rješenja znači bolju ocjenu.)

Rješenje:

Luka je točno riješio 8 od ukupno 10 zadataka, dakle točno je riješio $\frac{8}{10}$ testa.

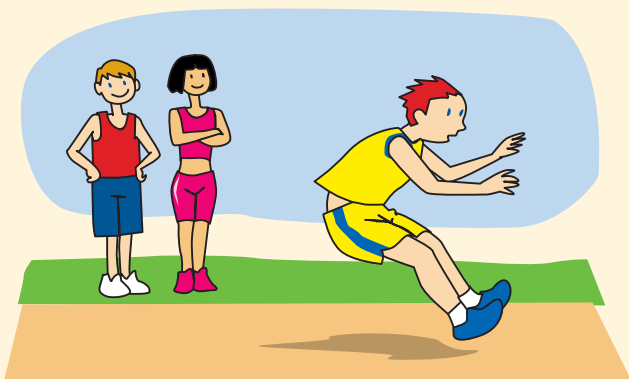
Petar je točno riješio 4 od ukupno 5 zadataka, dakle točno je riješio $\frac{4}{5}$ testa.

Uspoređujemo $\frac{8}{10}$ i $\frac{4}{5}$.

Množimo "unakrsno" $8 \cdot 5 = 40$, $10 \cdot 4 = 40$;

$40 = 40$, pa je $\frac{8}{10} = \frac{4}{5}$. Dakle dječaci su

jednako dobro riješili testove i dobili jednake ocjene.

Primjer 6. Skokovi udalj

U skoku udalj učenici su postigli sljedeće rezultate: Luka $\frac{19}{36}$ m, Petar $\frac{7}{12}$ m, Lucija $\frac{5}{9}$ m i Maja $\frac{5}{3}$ m. Čiji skok je bio najdulji, a čiji najkraći?

Rješenje:

Da bismo riješili taj problem moramo zadane razlomke $\frac{19}{36}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{5}{9}$ i $\frac{5}{3}$ poredati po veličini, od najmanjeg prema najvećem.

Najmanji zajednički nazivnik je $V(36, 12, 9, 3) = 36$.

Svodimo sve razlomke na zajednički nazivnik 36.

$$\begin{aligned}\frac{19}{36} &= \frac{19}{36}, \\ \frac{7}{12} &= \frac{7 \cdot 3}{12 \cdot 3} = \frac{21}{36}, \\ \frac{5}{9} &= \frac{5 \cdot 4}{9 \cdot 4} = \frac{20}{36}, \\ \frac{5}{3} &= \frac{5 \cdot 12}{3 \cdot 12} = \frac{60}{36}.\end{aligned}$$

Dakle, $\frac{19}{36} < \frac{20}{36} < \frac{21}{36} < \frac{60}{36}$, tj. $\frac{19}{36} < \frac{5}{9} < \frac{7}{12} < \frac{5}{3}$.

Najdulji skok skočila je Maja, a najkraći Luka.

Zadaci

5. Usporedi razlomke:

- a) $\frac{1}{2}$ i $\frac{2}{3}$; b) $\frac{8}{3}$ i $\frac{9}{5}$; c) $\frac{3}{10}$ i $\frac{5}{7}$; d) $\frac{5}{6}$ i $\frac{10}{12}$;
e) $\frac{3}{2}$ i $\frac{5}{4}$; f) $\frac{11}{3}$ i $\frac{20}{9}$; g) $\frac{3}{10}$ i $\frac{2}{7}$; h) $\frac{13}{6}$ i $\frac{11}{5}$.

6. a) Maja je pojela $\frac{3}{16}$ torte, a Luka $\frac{9}{40}$. Tko je pojelo veći dio torte?

b) Petar je pretrčao $\frac{5}{12}$ kruga, a Lucija $\frac{11}{28}$. Tko je pretrčao manje?

c) Slikovnica o životinjama stoji $\frac{53}{25}$ kn, a slikovnica o biljkama $\frac{45}{10}$ kn. Koja slikovnica je skuplja?

d) U jednoj minuti prvi je motor prešao $\frac{5}{7}$, a drugi $\frac{2}{3}$ staze. Koji motor je prešao veći dio staze? Koji motor je brži?

7. Na teniskom turniru Luka je pobijedio u 7 od ukupno 12 mečeva, a Lucija u 6 od 10 mečeva. Tko je bio uspješniji?

8. Učenici 5.a i 5.b razreda pisali su kratki test iz matematike. U 5.a razredu 20 učenika od 25 napisalo je test za pozitivnu ocjenu. U 5.b razredu je 24 učenika od 30 napisalo test za pozitivnu ocjenu. Luka tvrdi da su oba razreda jednako uspješno napisala test. Je li Luka u pravu? Objasni!

9. Ana je pretrčala 3 km za 20 minuta, a Maja 5 km za 27 minuta. Tko je trčao brže?

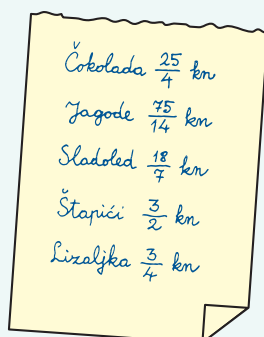
10. Prva cijev napuni bazen za 8 sati, a druga za 11 sati.

- a) Koliki dio bazena napuni prva cijev za 1 sat?
 b) Koliki dio bazena napuni druga cijev za 1 sat?
 c) Napuni li veći dio bazena prva cijev za 5 sati ili druga za 6 sati?

11. Poredaj po veličini od najmanjeg prema najvećem:

- a) $\frac{5}{7}$, $\frac{5}{9}$ i $\frac{4}{3}$; b) $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{13}{9}$;
 c) $\frac{7}{5}$, $\frac{3}{2}$ i $\frac{5}{3}$; d) $\frac{11}{6}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{17}{12}$, $\frac{1}{9}$;
 e) $\frac{7}{12}$, $\frac{21}{10}$ i $\frac{14}{5}$; f) $\frac{14}{15}$, $\frac{13}{25}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{3}{20}$.

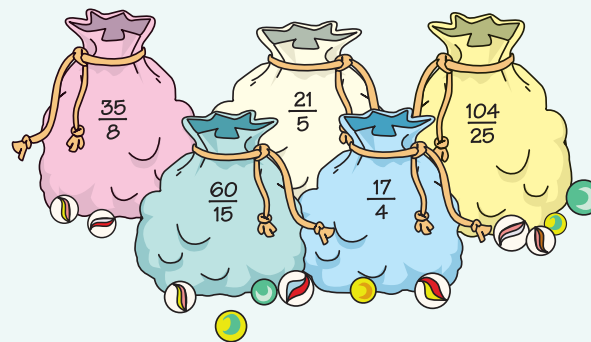
12. Pogledaj na slici cijene koje je Maja zapisala. Poredaj stvari s popisa, od najskuplje prema najjeftinijoj.



13. Na nagradnoj igri djeca su izvukla ove brojeve:

Luka $\frac{11}{4}$, Ana $\frac{7}{4}$, Lucija $\frac{16}{5}$, Petar $\frac{33}{10}$ i Maja $\frac{20}{8}$. Prvu nagradu dobiva najveći od izvučenih brojeva. Tko je sretni dobitnik?

14. Pogledaj sliku i poredaj vreće po njihovoj masi u kilogramima, od najlakše prema najtežoj.



15. Tri učenika imaju jednake svote novaca. Prvi potroši $\frac{3}{7}$ svoga novca, drugi $\frac{4}{9}$, a treći $\frac{7}{12}$. Koji je najviše potrošio, a koji najmanje?

16. Tri biciklista krenula su istodobno iz sela prema gradu. Nakon 20 minuta vožnje jedan je prevalio $\frac{3}{5}$, drugi $\frac{2}{3}$, a treći $\frac{7}{9}$ udaljenosti od grada. Koji je od njih, u tom času, bio najbliže gradu?

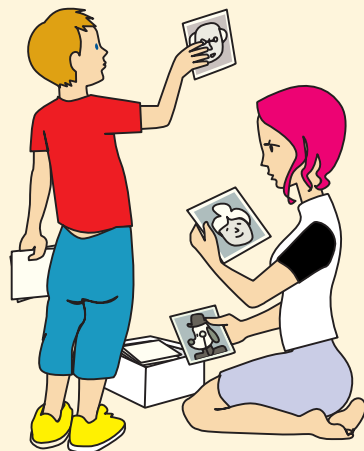
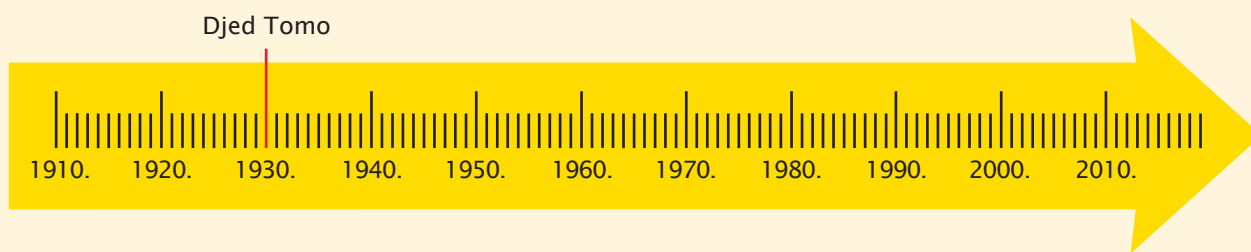
17. Usporedi razlomke:

- a) $\frac{7}{12}$, $\frac{11}{24}$; b) $\frac{5}{3}$, $\frac{4}{5}$; c) $\frac{11}{7}$, $\frac{4}{3}$;
 d) $\frac{5}{7}$, $\frac{8}{9}$; e) $\frac{5}{7}$, $\frac{10}{14}$; f) $\frac{21}{32}$, $\frac{101}{128}$;
 g) $\frac{17}{14}$, $\frac{19}{18}$; h) $\frac{12}{5}$, $\frac{48}{20}$; i) $\frac{7}{18}$, $\frac{8}{20}$;
 j) $\frac{37}{48}$, $\frac{58}{37}$.

18. Usporedi razlomke svodenjem na najmanji zajednički nazivnik:

- a) $\frac{8}{12}$, $\frac{10}{24}$; b) $\frac{4}{3}$, $\frac{6}{5}$; c) $\frac{11}{6}$, $\frac{5}{3}$;
 d) $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{9}$; e) $\frac{15}{2}$, $\frac{70}{14}$; f) $\frac{17}{12}$, $\frac{19}{18}$;
 g) $\frac{5}{14}$, $\frac{10}{21}$; h) $\frac{11}{5}$, $\frac{41}{20}$; i) $\frac{3}{8}$, $\frac{1}{2}$;
 j) $\frac{9}{40}$, $\frac{7}{30}$.

1.3. Brojevni pravac



Vremenska crta

Ana pomaže mlađem bratu riješiti domaću zadaću iz povijesti. Na vremenskoj crti trebaju označiti godine rođenja članova svoje obitelji. Pomogni im i ti!

Djed Tomo	1930.
Baka Marija	1935.
Tata Krešo	1964.
Mama Katarina	1972.
Ana	1990.
Luka	1996.

U svakodnevnom životu prirodne brojeve pridružujemo raznim stvarima i osobama: stupićima uz autocestu, učenicima u imeniku, kućama u nekoj ulici itd. U matematici točkama pravca pridružujemo brojeve. Prisjetimo se kako to radimo s prirodnim brojevima.

Nacrtajmo pravac i na njemu odaberimo neku točku. Označimo je slovom O .

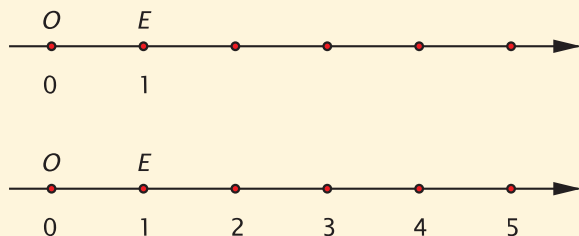


Zdesna od točke O istaknimo još jednu točku i označimo je slovom E .



Dužina \overline{OE} naziva se **jediničnom dužinom**. Točki O pridružimo broj 0, a točki E pridružimo prirodan broj 1.

Nanošenjem udesno dužine \overline{OE} po pravcu dobit ćemo niz točaka kao na donjoj slici. Svaka točka je od svojih susjednih točaka udaljena za duljinu jedinične dužine $|OE|$.



Svako od tako istaknutih točaka pravca pridružimo jedan prirodan broj 2, 3, 4, 5 itd.

brojevni pravac

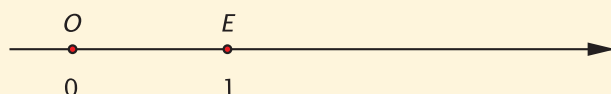
Pravac kod kojega su istaknutim točkama pridruženi brojevi naziva se **brojevni pravac**.

Primjer 1. Polovine

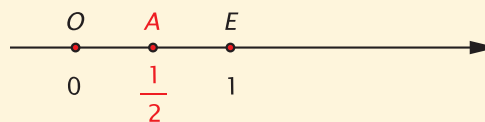
Nacrtaj brojevni pravac s jediničnom dužinom $|OE| = 2$ cm i istakni točku A koja je pridružena razlomku $\frac{1}{2}$.

Rješenje:

Najprije nacrtamo brojevni pravac s jediničnom dužinom $|OE| = 2$ cm.



Da bismo označili točku A pridruženu broju $\frac{1}{2}$, moramo jediničnu dužinu \overline{OE} podijeliti na dva jednaka dijela. S obzirom na to da smo za duljinu jedinične dužine uzeli 2 cm, duljina njene polovice će biti 1 cm. Provjeri mjerenjem na slici.

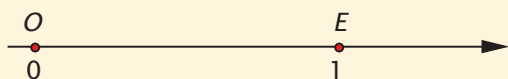


Primjer 2. Četvrtine

Nacrtaj brojevni pravac s jediničnom dužinom $|OE| = 4$ cm i istakni točku B koja je pridružena broju $\frac{1}{4}$. Na brojevnom pravcu istakni točke C i D , pridružene brojevima $\frac{2}{4}$ i $\frac{3}{4}$.

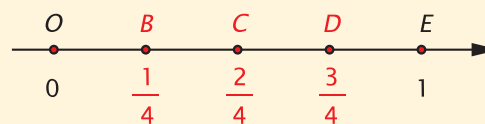
Rješenje:

Najprije nacrtamo brojevni pravac s jediničnom dužinom $|OE| = 4$ cm.

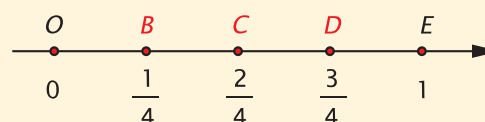
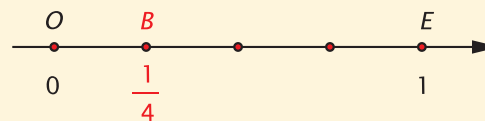


Da bismo označili točku B pridruženu broju $\frac{1}{4}$, moramo jediničnu dužinu \overline{OE} podijeliti na četiri jednaka dijela. S obzirom na to da

smo za duljinu jedinične dužine uzeli 4 cm, duljina njene četvrtina će biti 1 cm. Provjeri mjerenjem na slici.



Prva točka desno od nule je pridružena broju $\frac{1}{4}$. To je točka B .

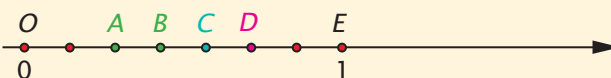


Dužinu ćeš podijeliti na 4 jednaka dijela tako da je prvo podijeliš napola, pa još napola!



Primjer 3. Pridruži točki broj

Kojim su brojevima pridružene točke A , B , C i D sa slike?

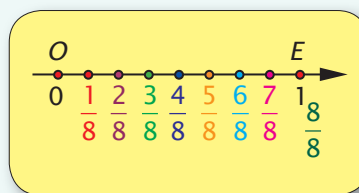


Rješenje:

Na slici je jedinična dužina podijeljena na sedam jednakih dijelova. Točka A pridružena je broju $\frac{2}{7}$. Točka B pridružena je broju $\frac{3}{7}$, točka C broju $\frac{4}{7}$ i točka D broju $\frac{5}{7}$.

Zadaci

1. Nacrtaj brojevni pravac s jediničnom dužinom



$|OE| = 3$ cm i istakni točke

A i B koje su pridružene, redom, brojevima $\frac{1}{3}$ i $\frac{2}{3}$.

2. Nacrtaj brojevni

pravac s jediničnom dužinom $|OE| = 5$ cm i istakni

točke A , B , C i D koje su pridružene, redom,

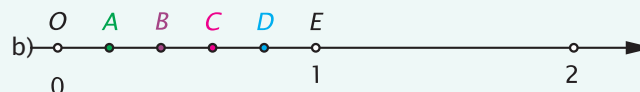
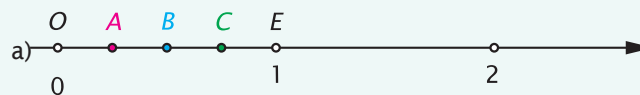
brojevima $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$ i $\frac{4}{5}$.

3. Nacrtaj brojevni pravac s jediničnom dužinom

$|OE| = 6$ cm i istakni točke A , B , C , D i F koje su

pridružene, redom, brojevima $\frac{1}{6}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{6}$ i $\frac{5}{6}$.

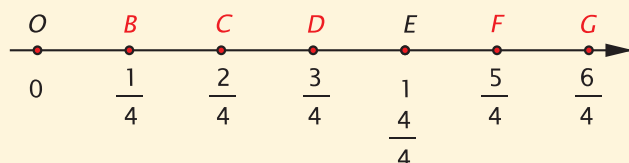
4. Kojim su brojevima pridružene točke
- A
- ,
- B
- ,
- C
- i
- D
- sa slika?



Primjer 4. Još poneka četvrtina

Na brojevnom pravcu istakni točke F i G , pridružene brojevima $\frac{5}{4}$ i $\frac{6}{4}$.

Rješenje:



Točki E pridružen je broj 1, ali i broj $\frac{4}{4}$. Zašto?

Zato jer četiri četvrtine daju jedno cijelo, pa su to dva jednaka broja.

$$\frac{4}{4} = 4 : 4 = 1$$

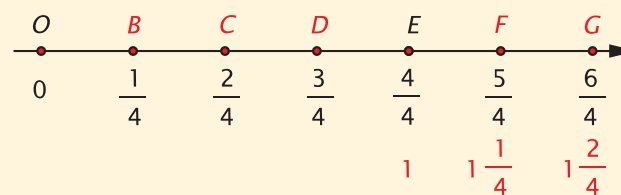
Točki E su pridruženi i razlomci:

$$\frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \frac{4}{4}, \frac{5}{5}, \frac{6}{6}, \frac{7}{7}, \dots$$

Svi ti razlomci jednaki su broju 1.

Kad trebamo pridružiti točke pravca razlomcima koji su veći od 1, najjednostavnije je prvo ih zapisati u obliku mješovitog broja. Tada ćemo lako odrediti između kojih prirodnih brojeva se nalaze.

U ovom primjeru je: $\frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$ i $\frac{6}{4} = 1\frac{2}{4}$.



Zapisivanje razlomka u obliku mješovitog broja

$$\frac{9}{4} = 9 : 4 = 2 + \frac{1}{4} = 2\frac{1}{4}$$

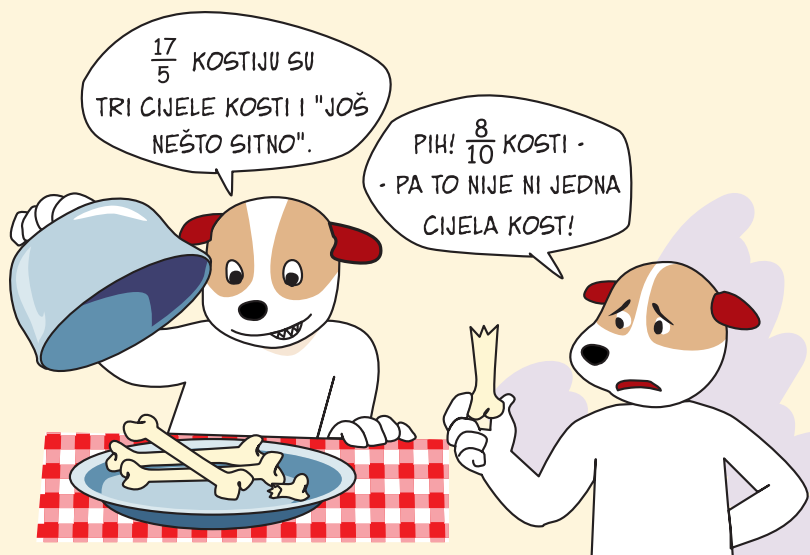
①
ostatak

$$\frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$$

Primjer 5. Mješoviti brojevi

Zapis u obliku mješovitog broja često koristimo kad želimo odrediti između kojih prirodnih brojeva se nalazi neki razlomak.

- a) $\frac{17}{5}$ je između 3 i 4 jer je $\frac{17}{5} = 3\frac{2}{5}$.
 b) $\frac{40}{7}$ je između 5 i 6 jer je $\frac{40}{7} = 5\frac{5}{7}$.
 c) $\frac{50}{10}$ je točno 5 jer je $\frac{50}{10} = 5$.
 d) $\frac{8}{10}$ je između 0 i 1 jer je $\frac{8}{10} < 1$.



Zadaci

5. Procijeni između kojih prirodnih brojeva se nalazi zadani razlomak.

$$\frac{11}{7}, \frac{11}{3}, \frac{23}{4}, \frac{63}{5}$$

6. Zapiši u obliku mješovitog broja i odredi između kojih prirodnih brojeva se nalazi zadani razlomak.

$$\frac{9}{8}, \frac{15}{4}, \frac{20}{6}, \frac{72}{9}, \frac{135}{10}$$

7. Nacrtaj brojevni pravac s jediničnom dužinom $|OE| = 3$ cm i istakni točke A, B, C i D koje su

pridružene, redom, brojevima $\frac{10}{3}, \frac{17}{3}, \frac{5}{3}$ i $\frac{12}{3}$.

8. Nacrtaj brojevni pravac s jediničnom dužinom $|OE| = 2$ cm i istakni točke A, B, C i D koje su

pridružene, redom, brojevima $\frac{10}{4}, \frac{17}{4}, \frac{5}{4}$ i $\frac{12}{4}$.

9. Nacrtaj brojevni pravac s jediničnom dužinom $|OE| = 3$ cm i istakni točke A, B, C i D koje su pridružene, redom, brojevima $\frac{10}{6}, \frac{17}{6}, \frac{5}{6}$ i $\frac{12}{6}$.

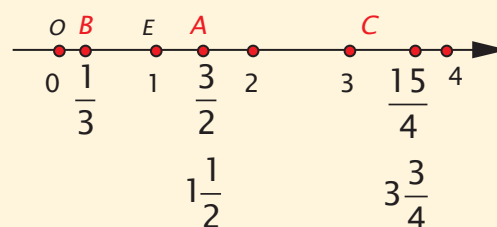
Primjer 6.

Uspoređivanje na brojevnom pravcu

Nacrtaj brojevni pravac s jediničnom dužinom $|OE| = 1$ cm i istakni točke A, B i C koje su pridružene, redom, brojevima $\frac{3}{2}, \frac{1}{3}$ i $\frac{15}{4}$.

Rješenje:

Za duljinu jedinične dužine se vrlo često uzima 1 cm. Pritom je za neke razlomke potrebno približno odrediti njihov smještaj jer dijelovi postaju presitni za precizno mjerenje. U ovom primjeru je svaka polovina dugačka $10 : 2 = 5$ mm, svaka trećina $10 : 3 \approx 3.3$ mm i svaka četvrtina $10 : 4 = 2.5$ mm.



Pogledajte još jednom slike u prethodna dva primjera. Bez obzira na duljinu jedinične dužine, poredak razlomaka po veličini ostaje jednak. Brojevni pravac možemo upotrijebiti i za uspoređivanje razlomaka.

Kad uspoređujemo dva broja na brojevnom pravcu, uvijek je veći onaj koji je na desnoj strani.

Dakle, za brojeve u našem primjeru vrijedi: $\frac{1}{3} < \frac{3}{2} < \frac{15}{4}$.

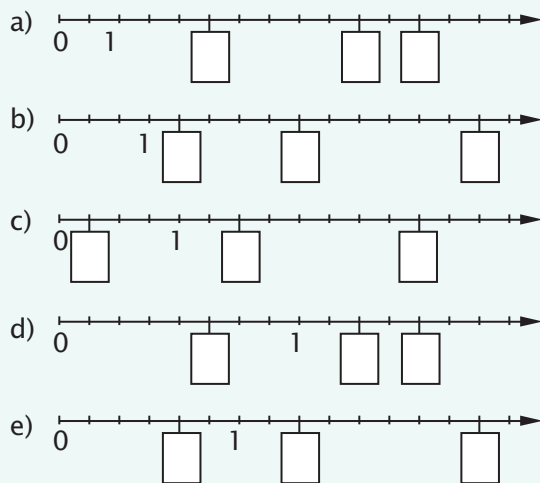
Na brojevnom pravcu:
 Desno - veći brojevi
 Lijevo - manji brojevi

Zadaci

10. Prikaži zadane razlomke na brojevnom pravcu:

- a) $\frac{4}{3}, \frac{11}{4}, \frac{5}{2}, \frac{6}{2}$;
 b) $\frac{4}{9}, \frac{11}{3}, \frac{9}{2}, \frac{9}{3}$;
 c) $\frac{14}{5}, \frac{21}{10}, \frac{5}{5}, \frac{33}{10}$;
 d) $\frac{7}{6}, \frac{15}{7}, \frac{25}{8}, \frac{5}{9}$.

11. U zadane pravokutnike upiši odgovarajuće razlomke.



12. Usporedi razlomke tako da ih nacrtáš na brojevnom pravcu

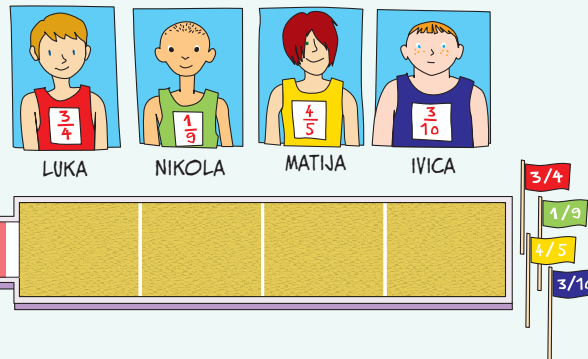
- a) $\frac{5}{7}, \frac{5}{9}$ i $\frac{4}{3}$; b) $\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{7}{10}, \frac{13}{9}$.

13. Napravi svoju vremensku crtu. Na njoj označi kad si rođen, kad si prohodao, počeo voziti bicikl, krenuo u školu... i ostale događaje iz svog života. Upotrijebi oznake za godine i

mjesece. Ako želiš, možeš uz neke događaje zalijepiti i odgovarajuću fotografiju ili crtež.

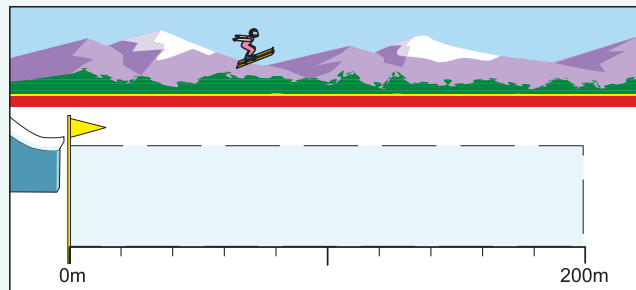
14. Postavi zastavice na udaljenost do koje je pojedini skakač skočio. Tko je skočio najdalje?

Prema duljini skoka skakači osvajaju mjesta i medalje. Tko je dobio zlatnu, srebrnu, a tko brončanu medalju?



15. Skakač je skakao pet puta. Postavi zastavicu na udaljenost do koje je skijaš skočio u pojedinom skoku. Koliko je metara bio dugačak svaki njegov skok? U kojem skoku je najdalje skočio, a u kojem najkraće?

- a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{3}{4}$; c) $\frac{5}{8}$; d) $\frac{3}{5}$; e) $\frac{7}{10}$.



Vježbalica

1. Usporedi zadane razlomke

- a) $\frac{1}{2}$ i $\frac{3}{4}$; b) $\frac{8}{6}$ i $\frac{5}{3}$; c) $\frac{6}{20}$ i $\frac{3}{10}$;
 d) $\frac{5}{24}$ i $\frac{10}{12}$; e) $\frac{11}{28}$ i $\frac{31}{14}$; f) $\frac{8}{26}$ i $\frac{5}{13}$;
 g) $\frac{23}{55}$ i $\frac{32}{110}$; h) $\frac{10}{38}$ i $\frac{5}{19}$.

2. Poredaj zadane razlomke po veličini, počevši s najmanjim:

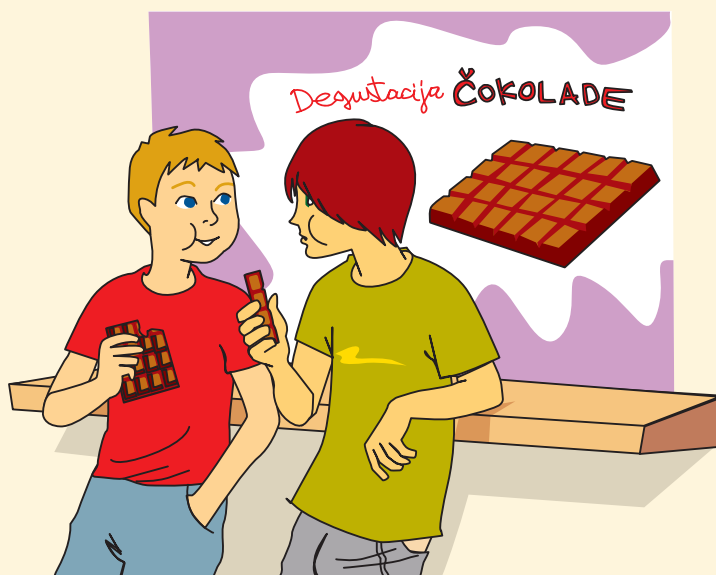
- a) $\frac{11}{4}, \frac{3}{2}, \frac{9}{8}$ i $\frac{5}{2}$; b) $\frac{13}{3}, \frac{35}{6}, \frac{5}{3}$ i $\frac{10}{12}$;
 c) $\frac{1}{5}, \frac{13}{15}, \frac{8}{3}$ i $\frac{15}{5}$; d) $\frac{3}{16}, \frac{5}{4}, \frac{15}{8}$ i $\frac{1}{2}$.

3. Usporedi zadane razlomke

- a) $\frac{4}{7}$ i $\frac{4}{2}$; b) $\frac{6}{5}$ i $\frac{6}{3}$; c) $\frac{11}{10}$ i $\frac{11}{12}$;
 d) $\frac{5}{12}$ i $\frac{5}{7}$; e) $\frac{9}{20}$ i $\frac{9}{13}$; f) $\frac{18}{3}$ i $\frac{18}{15}$;

- g) $\frac{3}{10}$ i $\frac{3}{11}$; h) $\frac{5}{9}$ i $\frac{5}{10}$.
4. Poredaj zadane razlomke po veličini, počevši s najmanjim:
- a) $\frac{10}{12}$, $\frac{10}{21}$, $\frac{10}{13}$ i $\frac{10}{18}$; b) $\frac{3}{8}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{3}{5}$ i $\frac{3}{6}$;
 c) $\frac{17}{5}$, $\frac{17}{6}$, $\frac{17}{7}$ i $\frac{17}{8}$; d) $\frac{6}{26}$, $\frac{6}{16}$, $\frac{6}{13}$ i $\frac{6}{31}$.
5. a) Ana je pojela $\frac{2}{7}$ torte, a Matija $\frac{3}{14}$. Tko je pojeo veći dio torte?
 b) Ivan je pretrčao $\frac{17}{22}$ kruga, a Marija $\frac{24}{33}$. Tko je pretrčao manje?
 c) Slikovnica o životinjama stoji $\frac{78}{15}$ kn, a slikovnica o biljkama $\frac{76}{13}$ kn. Koja slikovnica je skuplja?
 d) U jednoj minuti prvi je motor prešao $\frac{12}{18}$, a drugi $\frac{12}{23}$ staze. Koji motor je prešao veći dio staze? Koji motor je brži?
6. Prva cijev napuni bazen za 10 sati, a druga za 12 sati.
 a) Koliki dio bazena napuni prva cijev za 1 sat?
 b) Koliki dio bazena napuni druga cijev za 1 sat?
 c) Napuni li veći dio bazena prva cijev za 6 sati ili druga za 5 sati?
7. Poredaj po veličini od najmanjeg prema najvećem:
- a) $\frac{7}{8}$, $\frac{8}{9}$ i $\frac{5}{24}$; b) $1\frac{1}{4}$, $1\frac{2}{5}$, $\frac{17}{10}$, $\frac{13}{20}$;
 c) $\frac{17}{15}$, $2\frac{1}{2}$ i $\frac{5}{3}$; d) $\frac{5}{6}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{11}{12}$, $\frac{8}{9}$;
 e) $2\frac{26}{10}$ i $\frac{15}{6}$; f) $\frac{37}{15}$, $\frac{73}{25}$, $3\frac{61}{20}$.
8. Poredaj po veličini, od najvećeg prema najmanjem:
- a) $1\frac{3}{8}$, $\frac{14}{5}$, $\frac{23}{10}$, 2 i $\frac{47}{40}$;
 b) $5\frac{9}{12}$, $\frac{17}{3}$, $\frac{99}{20}$, $\frac{29}{5}$ i $\frac{21}{4}$.
9. Na nagradnoj igri djeca su izvukla ove brojeve: Luka $\frac{11}{42}$, Ana $\frac{7}{14}$, Lucija $\frac{7}{6}$, Petar $\frac{3}{21}$ i Maja $\frac{5}{3}$. Prvu nagradu dobiva najveći od izvučenih brojeva. Tko je sretni dobitnik?
10. Zapiši u obliku mješovitog broja i odredi između kojih prirodnih brojeva se nalazi zadani razlomak.
 a) $\frac{11}{3}$; b) $\frac{15}{8}$; c) $\frac{81}{4}$; d) $\frac{73}{5}$.
11. Zapiši u obliku mješovitog broja i odredi između kojih prirodnih brojeva se nalazi zadani razlomak.
 a) $\frac{9}{6}$; b) $\frac{115}{13}$; c) $\frac{62}{6}$; d) $\frac{100}{9}$.
12. Nacrtaj brojevni pravac s jediničnom dužinom $|OE| = 50$ mm i istakni točke A , B , C i D koje su pridružene, redom, brojevima $\frac{3}{10}$, $\frac{13}{25}$, $\frac{9}{5}$ i $\frac{3}{2}$.
13. Nacrtaj brojevni pravac s jediničnom dužinom $|OE| = 6$ cm i istakni točke A , B , C , D i F koje su pridružene, redom, brojevima $\frac{51}{60}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{4}$ i $\frac{1}{3}$.
14. Prikaži zadane razlomke na brojevnom pravcu:
 a) $\frac{7}{12}$, $1\frac{3}{4}$, $\frac{23}{6}$, $\frac{1}{2}$; b) $2\frac{2}{3}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{18}{6}$, $\frac{5}{4}$;
 c) $\frac{11}{5}$, $\frac{8}{10}$, $1\frac{3}{20}$, $\frac{8}{4}$; d) $\frac{3}{2}$, $2\frac{1}{7}$, $\frac{10}{14}$, $\frac{7}{2}$.
15. Prikaži zadane razlomke na brojevnom pravcu:
 a) $\frac{2}{5}$, $1\frac{4}{6}$, $\frac{31}{15}$, $\frac{29}{30}$; b) $\frac{7}{3}$, $1\frac{3}{7}$, $\frac{8}{21}$, $\frac{15}{7}$;
 c) $\frac{3}{4}$, $\frac{16}{8}$, $1\frac{1}{2}$, $\frac{35}{16}$; d) $\frac{1}{6}$, $2\frac{1}{3}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{21}{4}$.
16. Prikaži zadane razlomke na brojevnom pravcu:
 a) $\frac{11}{5}$, $1\frac{3}{4}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{7}{2}$; b) $\frac{13}{3}$, $\frac{9}{4}$, $\frac{5}{6}$, $2\frac{1}{2}$;
 c) $3\frac{2}{7}$, $\frac{31}{14}$, $\frac{9}{2}$, $\frac{8}{7}$; d) $\frac{1}{2}$, $1\frac{2}{3}$, $\frac{13}{6}$, $\frac{11}{3}$.
17. Usporedi razlomke tako da ih nacrtáš na brojevnom pravcu
 a) $\frac{1}{5}$, $\frac{9}{10}$ i $1\frac{7}{20}$; b) $\frac{4}{3}$, $\frac{9}{4}$, $\frac{19}{6}$ i $\frac{1}{2}$;
 c) $1\frac{2}{3}$, $\frac{12}{5}$, $\frac{7}{15}$ i $\frac{10}{3}$; d) $\frac{17}{8}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{12}{6}$ i $\frac{3}{4}$.

1.4. Zbrajanje razlomaka



Luka je pojeo $\frac{4}{6}$ čokolade, a Matija $\frac{1}{6}$ čokolade. Pogledaj sliku i odgovori:

- koliko "kockica" čokolade je pojeo Luka;
- koliko "kockica" čokolade je pojeo Matija;
- koliko "kockica" čokolade su pojeli zajedno;
- jesu li pojeli cijelu čokoladu;
- koliko dio cijele čokolade su dječaci pojeli?

U petom ste razredu naučili zbrajati razlomke s jednakim nazivnicima. Ponovimo zajedno.

$$\frac{2}{3} + \frac{5}{3} = \frac{7}{3}$$

Razlomke s jednakim nazivnicima zbrajamo tako da im zbrojimo brojnike, a nazivnik prepisemo.

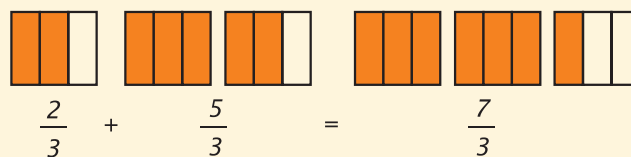
Primjer 1. Zbrajanje razlomaka s jednakim nazivnicima

Koliko je:

a) $\frac{2}{3} + \frac{5}{3} =$ b) $\frac{7}{12} + \frac{3}{12} + \frac{5}{12} = ?$

Rješenje:

a) $\frac{2}{3} + \frac{5}{3} = \frac{7}{3}$ b) $\frac{7}{12} + \frac{3}{12} + \frac{5}{12} = \frac{15}{12}$.



Zadaci

1. Izračunaj zbroj razlomaka:

a) $\frac{2}{8} + \frac{7}{8}$; b) $\frac{9}{11} + \frac{5}{11}$;

c) $\frac{23}{18} + \frac{17}{18}$; d) $\frac{19}{9} + \frac{6}{9}$;

e) $\frac{8}{17} + \frac{35}{17} + \frac{11}{17}$; f) $\frac{15}{4} + \frac{8}{4} + \frac{7}{4}$.

2. Ana je pojela $\frac{1}{5}$ torte, a Lucija $\frac{3}{5}$. Koliko dio torte su djevojčice pojele? Jesu li pojele cijelu tortu?

Primjer 2. Zbrajanje razlomaka s različitim nazivnicima

Luka je pojeo $\frac{2}{3}$ čokolade, a Petar $\frac{1}{4}$ čokolade. Koliki dio čokolade su dječaci zajedno pojeli?

Rješenje:

Zadani razlomci imaju različite nazivnike. Da bismo ih mogli zbrojiti, najprije ćemo ih svesti na zajednički nazivnik.

Najmanji zajednički višekratnik brojeva 3 i 4 je 12. $V(3,4)=12$. Proširujemo zadane razlomke na nazivnik 12.

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{8}{12}$$

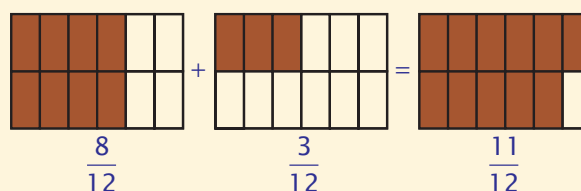
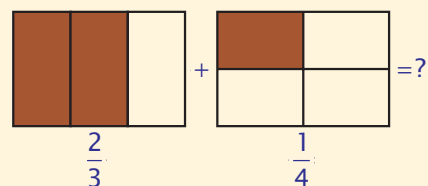
$$\frac{1}{4} = \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{3}{12}$$

Razlomci sad imaju jednake nazivnike, pa ih možemo zbrojiti: $\frac{8}{12} + \frac{3}{12} = \frac{11}{12}$.

Dječaci su zajedno pojeli $\frac{11}{12}$ čokolade.

Najčešće postupak rješavanja ovog zadatka

pišemo ovako: $\frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{8}{12} + \frac{3}{12} = \frac{11}{12}$.



Važno

Razlomke različitih nazivnika zbrajamo tako da:

1. odredimo njihov (najmanji) zajednički nazivnik,
2. svedemo razlomke na zajednički nazivnik,
3. zbrojimo brojnike, a nazivnik prepisemo.

Zadaci

3. Dopuni rečenicu pa riješi:

a) $\frac{3}{2} + \frac{1}{6} =$ (najmanji zajednički nazivnik je _____) =

b) $\frac{1}{4} + \frac{11}{6} =$ (najmanji zajednički nazivnik je _____) =

c) $\frac{2}{5} + \frac{3}{4} =$ (najmanji zajednički nazivnik je _____) =

4. Izračunaj zbroj razlomaka:

a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$; b) $\frac{1}{6} + \frac{7}{12}$; c) $\frac{2}{15} + \frac{2}{3}$; d) $\frac{2}{3} + \frac{5}{9}$;
e) $\frac{1}{3} + \frac{5}{9}$; f) $\frac{11}{16} + \frac{7}{4}$; g) $\frac{17}{25} + \frac{3}{5}$; h) $\frac{2}{7} + \frac{16}{21}$.

5. Popuni tablicu tako da zbrojiš razlomak slijeva s gornjim razlomkom.

+	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{5}{11}$
$\frac{1}{2}$				
$\frac{3}{4}$				
$\frac{5}{3}$				

6. Izračunaj zbroj razlomaka:

a) $\frac{2}{3} + \frac{1}{4}$; b) $\frac{5}{6} + \frac{7}{4}$; c) $\frac{11}{15} + \frac{7}{12}$; d) $\frac{7}{10} + \frac{5}{9}$;
e) $\frac{7}{6} + \frac{11}{9}$; f) $\frac{11}{10} + \frac{5}{4}$; g) $\frac{1}{25} + \frac{8}{15}$; h) $\frac{5}{14} + \frac{11}{21}$.

Primjer 3. Zbrajanje više razlomaka s različitim nazivnicima

Planinar je pješačio do planinarskog doma. Prvi je dan prešao $\frac{1}{4}$ puta, drugi dan $\frac{1}{6}$, treći dan $\frac{2}{5}$, a četvrti dan $\frac{11}{60}$ puta. Koliki dio puta je planinar prešao u ta četiri dana? Je li stigao do planinarskog doma?

Rješenje:

Određujemo najmanji zajednički višekratnik zadanih nazivnika, tj. $V(4, 6, 5, 60)$.

$$4 = 2 \cdot 2$$

$$6 = 2 \cdot 3$$

$$5 = 5$$

$$60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$V(4, 6, 5, 60) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$$



Može i ovako:

$$4, 6, 5, 60 \quad | \quad 2$$

$$2, 3, 5, 30 \quad | \quad 2$$

$$1, 3, 5, 15 \quad | \quad 3$$

$$1, 5, 5 \quad | \quad 5$$

$$1, 1 \quad | \quad 1$$

$$V(4, 6, 5, 60) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$$

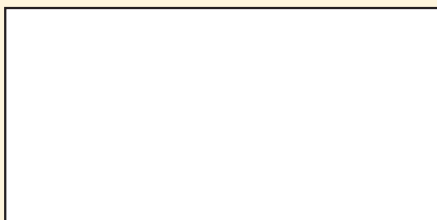
Svedemo sve razlomke na nazivnik 60 pa zbrojimo.

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{2}{5} + \frac{11}{60} &= \frac{1 \cdot 15}{4 \cdot 15} + \frac{1 \cdot 10}{6 \cdot 10} + \frac{2 \cdot 12}{5 \cdot 12} + \frac{11}{60} = \\ &= \frac{15}{60} + \frac{10}{60} + \frac{24}{60} + \frac{11}{60} = \frac{60}{60}. \end{aligned}$$

Planinar je za ta četiri dana prešao $\frac{60}{60}$ puta. Kako je $\frac{60}{60} = 1$, prešao je cijeli put, dakle stigao je do planinarskog doma.

Primjer 4. Prisjetimo se skraćivanja

Pobočaj $\frac{25}{50}$ pravokutnika.



Rješenje:

Pitamo se trebamo li dijeliti pravokutnik na 50 dijelova kako bismo riješili zadatak.

Matematičari uvijek traže lakši način rješavanja.

Sjećate li se skraćivanja?

Ponovimo: Skraćivanje je postupak obratan

$$\text{Skraćivanje} \quad \frac{25}{50} = \frac{25:25}{50:25} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Proširivanje} \quad \frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 25}{2 \cdot 25} = \frac{25}{50}$$

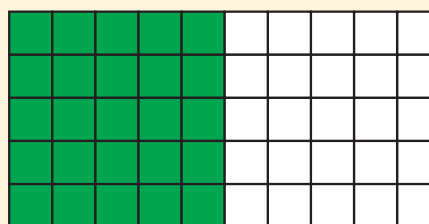
od proširivanja; pri skraćivanju brojnik i nazivnik razlomka dijelimo istim brojem.

Kažemo da je razlomak skraćen dokraja, ako mu brojnik i nazivnik nemaju zajedničkih djelitelja osim broja 1.

Primjerice, razlomci $\frac{4}{5}$, $\frac{15}{7}$, $\frac{23}{2}$, $\frac{44}{81}$ su skraćeni dokraja.

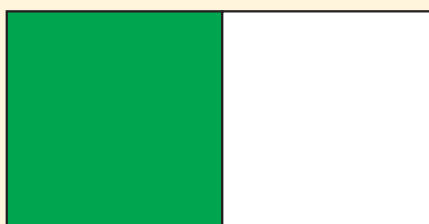
Važno

Skratiti razlomak znači podijeliti mu brojnik i nazivnik istim brojem.



Obojano je $\frac{25}{50}$ pravokutnika.

Matematičar bi najprije skratio taj razlomak $\frac{25}{50} = \frac{25:25}{50:25} = \frac{1}{2}$ i vidio da je dovoljno podijeliti pravokutnik na dva dijela.



Obojana je $\frac{1}{2}$ pravokutnika.

Primjer 5. Skrati dokraja

Skrati razlomke $\frac{25}{15}$, $\frac{36}{24}$ i $\frac{84}{54}$.

Rješenje:

Razlomke najčešće skraćujemo s najvećim zajedničkim djeliteljem brojnika i nazivnika.

Primjerice: $\frac{25}{15}$ možemo skratiti s 5, $\frac{36}{24}$ možemo skratiti s 12, a $\frac{84}{54}$ sa 6.

$$\frac{25}{15} = \frac{25:5}{15:5} = \frac{5}{3}, \quad \frac{36}{24} = \frac{36:12}{24:12} = \frac{3}{2}, \quad \frac{84}{54} = \frac{84:6}{54:6} = \frac{14}{9}$$

$$\frac{25}{15} = \frac{5 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{5}{3}$$

ili

$$\frac{25}{15} = \frac{5}{3}$$

Razlomak možemo skraćivati i nekoliko puta, dokle god se brojnik i nazivnik mogu podijeliti s istim brojem.

Primjerice, $\frac{36}{24}$ možemo prvo skratiti s 4, pa zatim s 3;

dobit ćemo isti razlomak kao i kad smo odmah skratili s 12. Taj postupak je dulji, ali će nas dovesti do istog rezultata.

$$\frac{36}{24} = \frac{36:4}{24:4} = \frac{9}{6} = \frac{9:3}{6:3} = \frac{3}{2}$$

Pri skraćivanju možemo upotrijebiti i rastave brojnika i nazivnika na faktore. Tako ćemo lako vidjeti koji su im faktori zajednički.

Skraćivanje kratko zapisujemo ovako:

$$\frac{\overset{3}{\cancel{36}}}{\underset{2}{\cancel{24}}} = \frac{3}{2} \quad \text{ili} \quad \frac{36}{24} = \frac{9 \cdot 4}{3 \cdot 8} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 4} = \frac{3}{2}$$



Primjer 6. Zbrajanje mješovitog broja i razlomka

Ana je prije podne čitala knjigu $2\frac{1}{4}$ sata, a poslije podne $\frac{1}{2}$ sata. Koliko je vremena Ana provela čitajući knjigu? Procijeni najprije je li Ana čitala manje ili više od 3 sata?

Rješenje:

Da bismo riješili ovaj zadatak, trebamo zbrojiti mješoviti broj i razlomak. Najprije ćemo mješoviti broj zapisati u obliku razlomka, pa onda zbrojiti te razlomke.

$$2\frac{1}{4} = 2 + \frac{1}{4} = \frac{2 \cdot 4 + 1}{4} = \frac{9}{4}$$

$$2\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{9}{4} + \frac{1}{2} = \frac{9}{4} + \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 2} = \frac{9}{4} + \frac{2}{4} = \frac{11}{4}$$

$$2\frac{1}{4} = 2 + \frac{1}{4} = \frac{2 \cdot 4 + 1}{4} = \frac{9}{4}$$

Ana je čitala knjigu $\frac{11}{4}$ sata. Taj rezultat možemo zapisati u obliku mješovitog broja $\frac{11}{4} = 2\frac{3}{4}$. Dakle, Ana je čitala knjigu $2\frac{3}{4}$ sata, tj. 2 sata i 45 minuta.

Mješovite brojeve i razlomke zbrajamo tako da:

1. mješovite brojeve zapišemo u obliku razlomaka,
2. razlomke svedemo na zajednički nazivnik,
3. zbrojimo razlomke,
4. ako je potrebno, rezultat napišemo u obliku mješovitog broja.

Zadaci

6. Izračunaj zbroj razlomaka i skрати, ako je moguće:

a) $\frac{2}{3} + \frac{1}{4}$; b) $\frac{1}{4} + \frac{3}{5}$; c) $\frac{2}{6} + \frac{2}{7}$; d) $\frac{2}{5} + \frac{5}{9}$;
 e) $\frac{2}{3} + \frac{5}{7}$; f) $\frac{3}{4} + \frac{7}{9}$; g) $\frac{3}{5} + \frac{6}{7}$; h) $\frac{9}{10} + \frac{5}{9}$.

7. Izračunaj zbroj razlomaka i skрати, ako je moguće:

a) $\frac{5}{6} + \frac{3}{4}$; b) $\frac{8}{15} + \frac{7}{12}$; c) $\frac{2}{9} + \frac{7}{6}$; d) $\frac{3}{10} + \frac{5}{4}$;
 e) $\frac{3}{4} + \frac{1}{6}$; f) $\frac{1}{10} + \frac{6}{15}$; g) $\frac{4}{5} + \frac{3}{10}$; h) $\frac{5}{12} + \frac{3}{5}$.

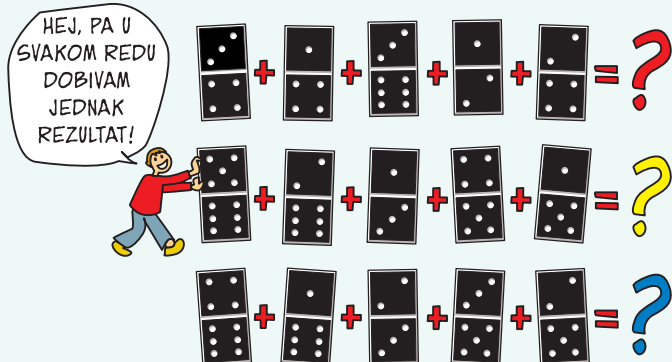


Ne skraćuj pribrojnik!

8. Izračunaj zbroj razlomaka i skрати, ako je moguće:

a) $\frac{7}{16} + \frac{3}{4} + \frac{2}{5}$; b) $\frac{7}{15} + \frac{5}{12} + \frac{3}{4}$;
 c) $\frac{5}{9} + \frac{13}{14} + \frac{1}{6}$; d) $\frac{31}{7} + \frac{9}{10} + \frac{15}{4}$.

9. Luka ima pločice za domino. Zamislio je da svaka pločica predstavlja jedan razlomak. Poslagao ih je u tri reda i zbrojio razlomke u svakom redu.



Provjeri je li Luka u pravu.

10. Lucija je prvi dan pročitala $\frac{1}{10}$ knjige, drugi dan $\frac{1}{2}$, a treći $\frac{2}{5}$. Koliki dio knjige je Lucija pročitala u tri dana? Je li pročitala cijelu knjigu?

11. Jedan traktor je pokosio $\frac{1}{6}$ livade, a drugi $\frac{3}{8}$ iste te livade. Koliki dio livade su zajedno pokosili? Jesu li pokosili cijelu livadu?

12. Luka i Lucija su zajedno rješavali test iz prirode. Luka je znao riješiti $\frac{3}{10}$ zadataka, a Lucija $\frac{3}{5}$

zadataka. Koliko su zajedno znali riješiti? Jesu li znali riješiti cijeli test?

13. Ana je kupila $\frac{3}{5}$ kg jabuka i $\frac{3}{4}$ kg krušaka. Koliko je voća kupila?

14. Izračunaj zbroj razlomka i mješovitog broja, skрати, ako je moguće, pa zapiši u obliku mješovitog broja:

a) $3\frac{1}{2} + \frac{1}{8}$; b) $\frac{1}{4} + 4\frac{7}{12}$; c) $1\frac{2}{15} + \frac{2}{5}$; d) $\frac{2}{3} + 2\frac{5}{6}$.

15. Izračunaj zbroj razlomka i mješovitog broja, skрати, ako je moguće, pa zapiši u obliku mješovitog broja:

a) $1\frac{2}{3} + \frac{1}{5}$; b) $\frac{1}{6} + 5\frac{2}{5}$; c) $6\frac{2}{9} + \frac{2}{7}$; d) $\frac{2}{5} + 5\frac{5}{11}$.

16. Lukin mlađi brat je još beba i puno spava.

Prijepodne je spavao $1\frac{1}{2}$ sata, poslijepodne $2\frac{2}{3}$ sata, a zatim je prespavao cijelu noć, tj. $11\frac{3}{4}$ sata.

Koliko je ukupno spavao Lukin brat? Koliko je sati i minuta spavao? Je li Lukin brat veći dio dana spavao ili bio budan?

17. Maja je pripremila osvježavajući napitak za svoj rođendan. Pomiješala je $2\frac{1}{4}$ l soka od maline, $\frac{1}{2}$ l soka od limuna, $1\frac{3}{4}$ l soka od naranče i $\frac{7}{10}$ l soka od borovnice. Koliko litara napitka je pripremila Maja?

18. Brat ima $12\frac{3}{4}$ godine, a sestra je za $2\frac{1}{2}$ godine starija od brata. Koliko godina ima sestra?

19. Rudari su iskopali u ponedjeljak $95\frac{1}{2}$ t, u uto-
 rak $87\frac{3}{5}$ t, u srijedu $92\frac{3}{8}$ t, u četvrtak $89\frac{5}{8}$ t, u
 petak $85\frac{1}{2}$ t, a u subotu $86\frac{3}{4}$ t ugljena. Koliko
 je ugljena iskopano toga tjedna?



20. Izračunaj zbroj mješovitih brojeva, skрати, ako je moguće, pa zapiši u obliku mješovitog broja:

a) $2\frac{5}{6} + 5\frac{3}{4}$; b) $3\frac{8}{15} + 1\frac{7}{12}$; c) $7\frac{2}{9} + 3\frac{1}{6}$;

d) $11\frac{3}{10} + 5\frac{1}{4}$; e) $3\frac{1}{4} + 4\frac{1}{3}$; f) $3\frac{5}{8} + 2\frac{1}{6}$;

g) $5\frac{1}{5} + 4\frac{1}{3}$; h) $3\frac{1}{2} + 9\frac{4}{7}$.



Ne zaboravi!
Razlomke prije zbrajanja treba svesti na zajednički nazivnik.

21. Putnik je prevalio prvi dan $12\frac{3}{5}$ km, a drugi dan za $2\frac{3}{4}$ km više nego prvi dan. Koliko je kilometara prevalio u ta dva dana? Najprije procijeni, a zatim točno izračunaj.
22. Koliko iznosi zbroj četiri broja od kojih je prvi $5\frac{2}{5}$, a svaki sljedeći za $2\frac{1}{3}$ veći od broja koji mu je prethodio?
23. Majstor je presjekao žicu na četiri dijela. Prvi dio je dug $2\frac{1}{5}$ m, drugi $5\frac{1}{4}$ m, treći $\frac{5}{6}$ m, a četvrti $1\frac{1}{4}$ m. Koliko je bila duga žica prije rezanja?
24. Popuni tablicu:

60 minuta	1 sat	$\frac{1}{24}$ dana
minuta	$\frac{1}{2}$ sata	
minuta	$\frac{1}{4}$ sata	dana

Primijeni svojstva zbrajanja da bi zadatke brže riješio.

25. Znajući da je $\frac{3}{4} + \frac{5}{9} = \frac{47}{36}$, možeš li odmah reći koliko je $\frac{5}{9} + \frac{3}{4}$?
Koje svojstvo zbrajanja si upotrijebio?
26. Znajući da je $\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{5}\right) + \frac{3}{7} = \frac{122}{105}$, možeš li odmah reći koliko je $\frac{1}{3} + \left(\frac{2}{5} + \frac{3}{7}\right)$? Koje svojstvo zbrajanja si upotrijebio?
27. Lucija je u posudu ulila $\frac{3}{10}$ l vode, $\frac{2}{15}$ l mlijeka i

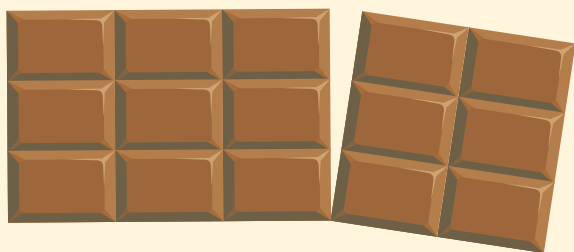
$\frac{6}{10}$ l slatkog vrhnja. Koliko je ukupno tekućine u posudi?

28. Luka raznosi novine u četiri ulice. U Mihanovićevoj je zaradio $10\frac{2}{5}$ kn, u Nazorovoj $13\frac{1}{4}$ kn, u Dravskoj $21\frac{3}{5}$ kn, a u Radićevoj $25\frac{3}{4}$ kn. Koliko je ukupno Luka zaradio?
29. Radnici u voćnjaku prvi su dan ubrali $105\frac{5}{12}$ kg jabuka, drugi dan $112\frac{5}{6}$ kg, a treći $75\frac{1}{6}$ kg. Koliko kilograma jabuka su nabrali u ta tri dana?
30. Stranice trokuta imaju duljine $5\frac{1}{6}$ dm, $8\frac{2}{3}$ dm i $6\frac{5}{6}$ dm. Izračunaj opseg toga trokuta. Koliki bi bio opseg trokuta kad bi se svaka stranica povećala za $\frac{1}{3}$ dm?
31. Od komada tkanine odrezano je redom $3\frac{4}{5}$ m, $1\frac{3}{4}$ m, $5\frac{1}{5}$ m, $4\frac{1}{4}$ m. Ostalo je $\frac{2}{5}$ m. Koliko je bio dug čitav komad tkanine?
32. Popuni tablicu!

<i>a</i>	0	$4\frac{1}{2}$	$5\frac{3}{8}$	$1\frac{17}{29}$	
<i>b</i>		$6\frac{1}{2}$		0	$3\frac{5}{6}$
<i>a + b</i>	$4\frac{11}{23}$		12		25

33. Izračunaj.
Uputa: Ukloni zagrade i združi one pribrojнике koje možeš najlakše zbrojiti, primjerice $4\frac{2}{3}$ i $1\frac{1}{3}$.
- a) $5\frac{1}{3} + \left(2\frac{2}{3} + 5\frac{5}{6}\right)$; b) $\left(3\frac{10}{19} + 2\frac{1}{4} + 1\frac{3}{4}\right) + 3\frac{9}{19}$;
c) $\left(6\frac{7}{16} + \frac{11}{80}\right) + \left(4\frac{9}{16} + \frac{7}{20}\right)$;
d) $\left(\frac{1}{36} + \frac{5}{9}\right) + \left(\frac{35}{36} + \frac{4}{9}\right)$; e) $\left(4\frac{2}{3} + 1\frac{5}{7}\right) + \left(5\frac{2}{7} + 1\frac{1}{3}\right)$;
f) $\left(\frac{1}{4} + 2\frac{6}{13} + \frac{9}{21} + 11\frac{11}{17}\right) + \left(\frac{3}{4} + 12\frac{7}{13} + \frac{12}{21} + \frac{6}{17}\right)$.

1.5. Oduzimanje razlomaka



Ostatak čokolade

Ana je pojela $\frac{3}{5}$ čokolade, a Luka ostatak. Koliko čokolade je pojeo Luka?

Primjer 1. Oduzimanje razlomaka jednakih nazivnika

U posudi ima $\frac{4}{9}$ l vode. Koliko vode treba doliti u posudu da bi bilo $\frac{8}{9}$ l?

Rješenje:

Da bismo odgovorili koliko vode treba doliti,

moramo zadane razlomke oduzeti.

$$\frac{8}{9} - \frac{4}{9} = \frac{4}{9}. \text{ U posudu treba doliti } \frac{4}{9} \text{ l vode.}$$

Razlomci s jednakim nazivnicima oduzimaju se tako da brojnike oduzmemo, a nazivnik prepíšemo.

Zadaci

1. Izračunaj razliku razlomaka:

a) $\frac{7}{8} - \frac{2}{8} =$;

b) $\frac{9}{11} - \frac{5}{11} =$;

c) $\frac{27}{18} - \frac{12}{18} =$;

d) $\frac{29}{5} - \frac{15}{5} =$;

e) $\frac{35}{17} - \frac{8}{17} - \frac{11}{17} =$;

f) $\frac{15}{4} - \frac{8}{4} - \frac{3}{4} =$.

2. Ana je pojela $\frac{1}{5}$ torte, a Lucija $\frac{3}{5}$. Koliko više je pojela Lucija?

Primjer 2. Oduzimanje razlomaka različitih nazivnika

Stabljika suncokreta je visoka $\frac{9}{10}$ m, a stabljika ruže $\frac{5}{8}$ m. Kolika je razlika u visini između suncokreta i ruže?

Rješenje:

Uspoređivanjem zaključujemo da je suncokret viši jer je $\frac{9}{10} > \frac{5}{8}$.

Da bismo odredili razliku u visini cvjetova trebamo od visine suncokreta oduzeti visinu ruže. Zadani razlomci imaju različite nazivnike, pa ih prije oduzimanja moramo svesti na zajednički nazivnik.

$$\begin{array}{l|l} 10, 8 & 2 \\ 5, 4 & 2 \\ 5, 2 & 2 \\ 5, 1 & 5 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{l} 10 = 2 \cdot 5 \\ 8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \\ V(10, 8) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 = 40 \end{array}$$

Najmanji zajednički nazivnik od 10 i 8 je 40. Dakle, prvi razlomak moramo proširiti s 4, a drugi s 5.

$$\frac{9}{10} - \frac{5}{8} = \frac{9 \cdot 4}{10 \cdot 4} - \frac{5 \cdot 5}{8 \cdot 5} = \frac{36}{40} - \frac{25}{40} = \frac{11}{40}.$$

Razlika u visini suncokreta i ruže je $\frac{11}{40}$ m.

Važno

Razlomke različitih nazivnika oduzimamo tako da:

1. odredimo njihov (najmanji) zajednički nazivnik,
2. svedemo sve razlomke na zajednički nazivnik,
3. oduzmemo brojnike, a nazivnik prepíšemo.

Zadaci

3. Izračunaj razliku razlomaka i rezultat skрати, ako je moguće:
- a) $\frac{1}{2} - \frac{1}{4}$; b) $\frac{5}{6} - \frac{1}{12}$; c) $\frac{2}{5} - \frac{2}{15}$; d) $\frac{4}{3} - \frac{5}{9}$;
 e) $\frac{5}{3} - \frac{5}{9}$; f) $\frac{21}{16} - \frac{3}{4}$; g) $\frac{17}{25} - \frac{3}{5}$; h) $\frac{12}{7} - \frac{16}{21}$.
4. Izračunaj razliku razlomaka i skрати, ako je moguće:
- a) $\frac{2}{3} - \frac{1}{4}$; b) $\frac{11}{4} - \frac{7}{5}$; c) $\frac{2}{6} - \frac{2}{7}$; d) $\frac{12}{5} - \frac{5}{9}$;
 e) $\frac{13}{5} - \frac{5}{3}$; f) $\frac{9}{7} - \frac{1}{2}$; g) $\frac{17}{4} - \frac{8}{9}$; h) $\frac{40}{3} - \frac{41}{4}$.
5. Izračunaj razliku razlomaka i skрати, ako je moguće:
- a) $\frac{15}{6} - \frac{3}{4}$; b) $\frac{28}{15} - \frac{7}{12}$; c) $\frac{13}{9} - \frac{7}{6}$; d) $\frac{23}{10} - \frac{5}{4}$;
 e) $\frac{13}{12} - \frac{5}{9}$; f) $\frac{21}{16} - \frac{5}{12}$; g) $\frac{7}{25} - \frac{1}{15}$; h) $\frac{45}{36} - \frac{11}{24}$.
6. Izračunaj razliku razlomaka i skрати, ako je moguće:
- a) $\frac{57}{16} - \frac{3}{4} - \frac{2}{5}$; b) $\frac{54}{15} - \frac{5}{12} - \frac{3}{4}$;
 c) $\frac{65}{9} - \frac{13}{14} - \frac{1}{6}$; d) $\frac{36}{7} - \frac{9}{10} - \frac{15}{4}$.
7. Anina baka je zasijala $\frac{3}{10}$ vrta salatom, $\frac{3}{8}$ vrta cvijećem i $\frac{1}{4}$ vrta mrkvom. Je li baka zasijala cijeli vrt? Ako nije, koliki dio vrta je ostao nezasijan?
8. Jedna obitelj troši $\frac{3}{10}$ zarade na hranu i $\frac{1}{9}$ zarade za stan. Koliki dio zarade im preostaje za ostale troškove?
9. Koji je od razlomaka veći i za koliko?
- a) $\frac{5}{6}$ i $\frac{7}{8}$; b) $\frac{9}{14}$ i $\frac{7}{12}$; c) $\frac{25}{36}$ i $\frac{53}{72}$; d) $\frac{17}{48}$ i $\frac{13}{36}$.

Primjer 3. Oduzimanje mješovitih brojeva

Umjesto u $14\frac{3}{4}$ sati Luka je na sastanak s Majom došao $\frac{1}{2}$ sata ranije. Koliko je tada bilo sati?

Rješenje:

Najprije ćemo mješoviti broj zapisati u obliku razlomka, a zatim oduzeti.

$$14\frac{3}{4} = \frac{14 \cdot 4 + 3}{4} = \frac{59}{4}$$

$$14\frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{59}{4} - \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 2} = \frac{59}{4} - \frac{2}{4} = \frac{57}{4}$$

Luka je došao

na sastanak u $\frac{57}{4}$ sati.

Zapišimo taj razlomak u obliku mješovitog broja. $\frac{57}{4} = 14\frac{1}{4}$.

Luka je došao na sastanak u $14\frac{1}{4}$ sati, tj. u 14 sati i 15 minuta.

Mješovite brojeve i razlomke oduzimamo tako da:

1. mješovite brojeve zapišemo u obliku razlomaka,
2. razlomke svedemo na zajednički nazivnik,
3. oduzmemo razlomke.

Pri oduzimanju mješovitih brojeva najčešće ne oduzimamo posebno cijele dijelove, a posebno razlomke. Problem se pojavljuje ako je razlomak umanjenika manji od razlomka umanjitelja, primjerice $5\frac{1}{4} - 2\frac{3}{4}$. Cijele dijelove ćemo znati oduzeti, no ne i razlomke. Ponekad je takvo oduzimanje prikladno, primjerice:

$$12\frac{6}{7} - 3\frac{2}{7} = (12 - 3) + \left(\frac{6}{7} - \frac{2}{7}\right) = 9 + \frac{4}{7} = 9\frac{4}{7}.$$

Primjer 4.

Zbrajanje mješovitih brojeva

Uvećaj zbroj $8\frac{1}{2} + 5\frac{3}{7}$ za zbroj $4\frac{2}{3} + 8\frac{5}{6}$.**Rješenje:**

Pri zbrajanju mješovitih brojeva možemo postupiti i ovako:

1. zbrojimo posebno cijele dijelove,
2. zbrojimo posebno razlomke,
3. rezultat napišemo u obliku mješovitog broja. Izračunajmo najprije prvi zbroj, a zatim drugi zbroj.

$$8\frac{1}{2} + 5\frac{3}{7} = (8 + 5) + \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{7}\right) = 13 + \left(\frac{7}{14} + \frac{6}{14}\right) = 13 + \frac{13}{14} = 13\frac{13}{14}$$

$$4\frac{2}{3} + 8\frac{5}{6} = (4 + 8) + \left(\frac{2}{3} + \frac{5}{6}\right) = 12 + \left(\frac{4}{6} + \frac{5}{6}\right) = 12 + \frac{9}{6} = 12 + 1 + \frac{3}{6} = 13 + \frac{1}{2} = 13\frac{1}{2}$$

Razlomak $\frac{9}{6}$, koji smo dobili pri zbrajanju, veći je od 1, pa smo i njega zapisali u obliku mješovitog broja $1 + \frac{3}{6}$ te zbrojili. Razlomak $\frac{3}{6}$ smo skratili s 3 i dobili $\frac{1}{2}$.

Sad još moramo prvi zbroj uvećati za drugi, tj. zbrojiti ih.

$$13\frac{13}{14} + 13\frac{1}{2} = (13 + 13) + \left(\frac{13}{14} + \frac{1}{2}\right) = 26 + \left(\frac{13}{14} + \frac{7}{14}\right) = 26 + \frac{20}{14} = 26 + 1 + \frac{6}{14} = 27 + \frac{3}{7} = 27\frac{3}{7}$$

Razlomak $\frac{20}{14}$, koji smo dobili pri zbrajanju, veći je od 1, pa smo i njega zapisali u obliku mješovitog broja $1 + \frac{6}{14}$ te zbrojili. Razlomak $\frac{6}{14}$ smo skratili s 2 i dobili $\frac{3}{7}$.

Pri zbrajanju mješovitih brojeva upotrijebili smo dva svojstva zbrajanja: komutativnost i asocijativnost.

Pri zbrajanju mješovitih brojeva mogu se pojaviti mješoviti brojevi s nepravim razlomcima. To znači da je takav razlomak veći od 1, pa ga možemo zapisati u obliku mješovitog broja. Takvi brojevi su, primjerice, $2\frac{5}{3}, 11\frac{6}{2}, 9\frac{7}{4}$. Takve mješovite brojeve moramo pažljivo preoblikovati tako da razlomak uz mješoviti broj bude pravi, tj. manji od 1.

Radimo ovako:

$$2\frac{5}{3} = 2 + \frac{5}{3} = 2 + 1 + \frac{2}{3} = 3\frac{2}{3}, \quad 11\frac{6}{2} = 11 + \frac{6}{2} = 11 + 3 = 14$$

$$9\frac{7}{4} = 9 + \frac{7}{4} = 9 + 1 + \frac{3}{4} = 10 + \frac{3}{4} = 10\frac{3}{4}$$

Primjer 5.Koliko je $\left(11\frac{8}{20} + \frac{13}{15}\right) - \left(2\frac{1}{12} + 5\frac{7}{30}\right)$?**Važno**

Redoslijed računanja:

1. najprije računamo izraze u zagradama,
2. kad u zagradi ostane samo jedan broj uklonimo je,
3. računamo preostala zbrajanja ili oduzimanja, po redu slijeva nadesno.

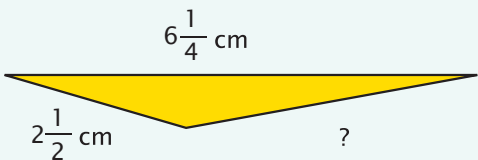
Rješenje:

Kako za oduzimanje ne vrijede svojstva komutativnosti i asocijativnosti, ne smijemo

mijenjati redoslijed brojeva niti ih po volji združivati. Dakle, pri rješavanju ovog zadatka moramo slijediti pravila redoslijeda računanja.

$$\begin{aligned} & \left(11\frac{8}{20} + \frac{13}{15}\right) - \left(2\frac{1}{12} + 5\frac{7}{30}\right) = \\ & = \left(\frac{11 \cdot 20 + 8}{20} + \frac{13}{15}\right) - \left(\frac{2 \cdot 12 + 1}{12} + \frac{5 \cdot 30 + 7}{30}\right) = \\ & = \left(\frac{220 + 8}{20} + \frac{13}{15}\right) - \left(\frac{24 + 1}{12} + \frac{150 + 7}{30}\right) = \\ & = \left(\frac{228}{20} + \frac{13}{15}\right) - \left(\frac{25}{12} + \frac{157}{30}\right) = \\ & = \left(\frac{228 \cdot 3}{60} + \frac{13 \cdot 4}{60}\right) - \left(\frac{25 \cdot 5}{60} + \frac{157 \cdot 2}{60}\right) = \\ & = \left(\frac{684}{60} + \frac{52}{60}\right) - \left(\frac{125}{60} + \frac{314}{60}\right) = \frac{736}{60} - \frac{439}{60} = \frac{297}{60}. \end{aligned}$$

Zadaci

11. Izračunaj razliku razlomka i mješovitog broja, razliku skрати, ako je moguće, pa zapiši u obliku mješovitog broja:
 a) $3\frac{1}{2} - \frac{1}{8}$; b) $\frac{27}{4} - 4\frac{7}{12}$;
 c) $1\frac{2}{15} - \frac{2}{5}$; d) $\frac{19}{3} - 2\frac{5}{6}$.
12. Izračunaj razliku razlomka i mješovitog broja, skрати, ako je moguće, pa zapiši u obliku mješovitog broja:
 a) $1\frac{2}{3} - \frac{1}{5}$; b) $\frac{51}{6} - 5\frac{2}{5}$; c) $6\frac{2}{9} - \frac{2}{7}$; d) $\frac{72}{5} - 5\frac{5}{11}$.
13. Izračunaj razliku mješovitih brojeva, rezultat skрати, ako je moguće, pa zapiši u obliku mješovitog broja:
 a) $5\frac{5}{6} - 3\frac{3}{4} - 1\frac{1}{2}$; b) $3\frac{8}{15} - 1\frac{7}{12} - \frac{1}{3}$;
 c) $7\frac{2}{9} - 2\frac{1}{6} - \frac{5}{3}$; d) $11\frac{3}{10} - 4\frac{5}{4} - 3\frac{3}{5}$.
14. Radnici su preradili $\frac{13}{25}$ ukupne količine drva. Koliko im je preostalo za preradu?
15. Izletnici su odlučili put do planinarskog doma prijeći u dva dana. Prvi dan su prešli $\frac{7}{12}$ puta. Koliki dio puta im je preostao za drugi dan? Koji dan su prešli veći dio puta?
16. Opseg trokuta je $12\frac{2}{3}$ cm. Ako su duljine dviju stranica $a = 6\frac{1}{4}$ cm i $b = 2\frac{1}{2}$ cm, kolika je duljina treće stranice?
- 

$6\frac{1}{4}$ cm

$2\frac{1}{2}$ cm ?
17. U receptu piše da za kolač treba pripremiti $3\frac{1}{4}$ šalice brašna. Ana je stavila $1\frac{3}{8}$ šalice brašna. Koliko još brašna mora dodati za kolač?
18. U kremu za kolač treba ukuhati pola litre mlijeka. Ana je u jednoj čaši odmjerila $\frac{3}{8}$ litre mlijeka. Koliko još mlijeka treba dodati?
19. Majina mama pripravlja sok od bazge. Stavila je u posudu $\frac{3}{10}$ l sirupa. Koliko mora doliti vode da bi napravila $2\frac{1}{3}$ l soka?
20. Nosivost kamiona je 15 t. U prvom mjestu je utovarilo $3\frac{3}{4}$ t, u drugom $9\frac{1}{2}$ t, a u trećem $1\frac{1}{2}$ t. Koliko još tereta je moguće utovariti na kamion, a da se ne prijeđe njegova nosivost?
21. Majina obitelj je kupila zemljište površine 100 m². Na tom zemljištu žele imati kuću površine $64\frac{1}{2}$ m², bazen površine $9\frac{1}{4}$ m² te vrt s travnjakom površine $\frac{83}{4}$ m². Je li zemljište dovoljno veliko za sve njihove želje? Ako je površina veća, predloži što bi mogli smjestiti na preostali dio.
22. Vrtlar je prvi dan prekopao $\frac{2}{5}$ vrta, a drugi dan $\frac{1}{4}$ vrta. Koliko je prekopao u ta dva dana? Koliko mu još preostaje?
23. Putnik prijeđe prvi dan $\frac{1}{5}$, a drugi dan $\frac{4}{7}$ predviđenog puta. Želi li stići treći dan, koliko još mora prijeći?
24. Jedan traktor je pokosio $\frac{9}{16}$ livade, a drugi preostali dio. Koliko je pokosio drugi traktor?
25. Izračunaj:
 a) $\frac{2}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{3}$; b) $\frac{17}{6} - \frac{7}{4} + \frac{1}{2}$;
 c) $\frac{11}{15} - \frac{7}{12} - \frac{2}{5}$; d) $\frac{7}{10} + \frac{5}{9} + \frac{2}{3}$.



Vježbalica

1. Izračunaj. Ako možeš, rezultat skрати i pretvori u mješoviti ili cijeli broj
- a) $\frac{1}{2} + \frac{3}{4}$; b) $\frac{8}{6} + \frac{5}{3}$; c) $\frac{6}{20} - \frac{3}{10}$;
 d) $\frac{25}{24} - \frac{10}{12}$; e) $\frac{11}{28} + \frac{31}{14}$; f) $\frac{12}{26} - \frac{5}{13}$;
 g) $\frac{23}{55} + \frac{32}{110}$; h) $\frac{10}{38} + \frac{5}{19}$.
2. Izračunaj. Ako možeš, rezultat skрати i pretvori u mješoviti ili cijeli broj:
- a) $1\frac{5}{27} + \frac{3}{9}$; b) $1 + \frac{3}{5}$; c) $\frac{32}{5} - \frac{13}{10}$;
 d) $3\frac{1}{8} + 2\frac{1}{2}$; e) $4\frac{7}{10} - \frac{3}{8}$; f) $2\frac{25}{26} + 1\frac{3}{13}$.
3. Izračunaj. Ako možeš, rezultat skрати i pretvori u mješoviti ili cijeli broj:
- a) $3\frac{5}{8} - 2\frac{3}{4}$; b) $\frac{15}{18} - \frac{3}{8}$; c) $1\frac{15}{12} - \frac{3}{2}$;
 d) $\frac{4}{3} - 1\frac{1}{9}$; e) $\frac{22}{13} - 1$; f) $2 - \frac{3}{60}$.
4. Izračunaj. Ako možeš, rezultat skрати i pretvori u mješoviti ili cijeli broj:
- a) $3 - \frac{7}{3} + \frac{3}{12}$; b) $4\frac{5}{16} - 1$; c) $1\frac{10}{22} - \frac{1}{11} - 1$;
 d) $\frac{11}{7} + \frac{4}{28} - \frac{8}{14}$; e) $\frac{5}{10} + 1\frac{3}{8} - 1$; f) $2 - \frac{5}{4} - \frac{3}{6}$.
5. Izračunaj. Ako možeš, rezultat skрати i pretvori u mješoviti ili cijeli broj:
- a) $4 + \frac{3}{5} - 1\frac{1}{2} + \frac{4}{10}$; b) $\frac{11}{6} - \frac{5}{12} - \frac{5}{4} + \frac{15}{3}$;
 c) $\left(\frac{4}{3} + \frac{5}{6}\right) - \left(\frac{8}{6} - 1\right)$;
 d) $\frac{15}{10} - \left(\frac{3}{5} + \frac{4}{10}\right) - \frac{1}{2} + \frac{18}{4}$;
 e) $\frac{15}{9} - \frac{3}{5} + \frac{14}{15} - \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{5}\right)$;
 f) $\frac{80}{3} - \frac{38}{8} + \left(\frac{7}{4} - \frac{4}{6}\right)$.
6. Izračunaj. Ako možeš, rezultat skрати i pretvori u mješoviti ili cijeli broj:
- a) $\frac{6}{75} + \frac{8}{15} - \frac{1}{25} + \frac{2}{5}$; b) $\left(\frac{6}{4} + \frac{8}{5}\right) - \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{4}\right)$;
 c) $3 - \frac{5}{4} - \frac{7}{6} - \frac{1}{4}$; d) $2\frac{2}{5} - \frac{11}{50} - 2$;
 e) $3 - 2\frac{3}{10} - \frac{55}{100}$; f) $\frac{3}{8} - \frac{7}{60} - \frac{1}{15} + \frac{7}{120}$.
7. Koji je od razlomaka veći i za koliko?
- a) $\frac{7}{6}$ i $\frac{5}{8}$; b) $\frac{9}{10}$ i $\frac{7}{12}$;
 c) $\frac{24}{36}$ i $\frac{28}{32}$; d) $\frac{5}{48}$ i $\frac{5}{36}$.
8. Znajući da je $\left(\frac{1}{4} + \frac{2}{5}\right) + \frac{3}{10} = \frac{19}{20}$, možeš li odmah reći koliko je $\frac{1}{4} + \left(\frac{2}{5} + \frac{3}{10}\right)$? Koje svojstvo zbrajanja si upotrijebio?

9. Lucija je u posudu od 2 litre ulila $\frac{3}{8}$ l vode, $\frac{1}{3}$ l mlijeka i $\frac{5}{12}$ l slatkog vrhnja.
- Koliko je ukupno tekućine u posudi?
 - Koliko još tekućine stane u posudu?
10. Luka raznosi novine u četiri ulice. U Mihanovićevoj je zaradio $10\frac{7}{8}$ kn, u Nazorovoj $15\frac{1}{4}$ kn, u Dravskoj $11\frac{1}{2}$ kn, a u Radićevoj $22\frac{3}{4}$ kn.
- Koliko je ukupno Luka zaradio?
 - Za koliko je više zaradio u ulici u kojoj je zaradio najviše od ulice u kojoj je zaradio najmanje?
11. Jedna obitelj troši $\frac{5}{12}$ zarade na hranu i $\frac{1}{9}$ zarade za stan. Koliki dio zarade im preostaje za ostale troškove?
12. Opseg trokuta je $12\frac{2}{5}$ cm. Ako su duljine dviju stranica $a = 6\frac{7}{10}$ cm i $b = 2\frac{1}{2}$ cm, kolika je duljina treće stranice?
13. U receptu piše da za kolač treba pripremiti $3\frac{5}{8}$ šalice brašna. Ana je stavila $1\frac{5}{6}$ šalice brašna. Koliko još brašna mora dodati za kolač?
14. Nosivost kamiona je 16 tona. U prvom mjestu je utovario $3\frac{5}{8}$ t, u drugom $7\frac{1}{2}$ t, a u trećem $2\frac{3}{4}$ t. Koliko još tereta je moguće utovariti na kamion, a da se ne prijeđe njegova nosivost?
15. Vrtlar je prvi dan prekopao $\frac{4}{9}$ vrta, a drugi dan $\frac{1}{15}$ vrta više.
- Koliko je prekopao u ta dva dana?
 - Koliko mu još preostaje?
16. Jedan traktor je pokosio $\frac{7}{12}$ livade, a drugi $\frac{1}{3}$ livade manje.
- Koliko je pokosio drugi traktor?
 - Jesu li pokosili cijelu livadu?
17. Maja je prvi dan pročitala $\frac{3}{28}$ lektire, a drugi dan $\frac{2}{7}$ više.
- Koliki dio lektire je pročitala?
 - Koliko joj je još ostalo?
18. Ana je pojela $\frac{1}{6}$ torte, Luka $\frac{1}{5}$ više od Ane, a Marija $\frac{1}{3}$ manje od Luke. Jesu li pojeli cijelu tortu?
19. Jedan plivač je preplivao stazu za $3\frac{2}{3}$ sekundi, a drugi za $\frac{25}{8}$ sekundi. Koji je plivač brži i za koliko?
20. Majina mama je u jednoj trgovini potrošila $244\frac{3}{4}$ kn, a u drugoj $24\frac{5}{6}$ manje. Koliko kn je potrošila u obe trgovine zajedno?

1.6. Množenje razlomaka

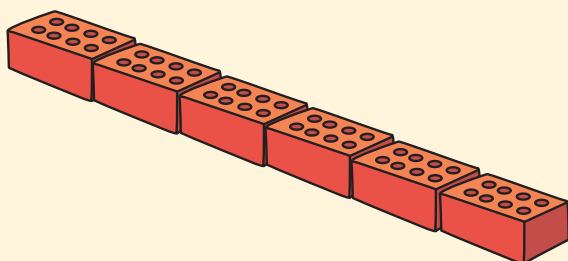


Polica za knjige

Luka želi na policu poslagati 8 knjiga, a svaka od njih je široka $\frac{5}{2}$ cm. Stanu li sve knjige na policu duljine 25 cm?

Primjer 1. Množenje razlomaka kao zbrajanje

Petar slaže 6 ciglica jednu do druge kao zid. Duljina jedne ciglice je $\frac{1}{4}$ m. Kolika je duljina cijelog zida?



Rješenje:

Duljinu zida možemo izračunati tako da zbrojimo šest puta po $\frac{1}{4}$ m. $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{6}{4}$ m.

Znamo da zbrajanje jednakih pribrojnika možemo zapisati i kao množenje.

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 6 \cdot \frac{1}{4} = \frac{6}{4} \text{ m.}$$

Množenje

Mješoviti broj - kraći zapis za $2 + \frac{3}{5}$

$2 \cdot \frac{3}{5} \neq 2 \frac{3}{5}$

$2 \cdot \frac{3}{5} \neq 2 \frac{3}{5}$

Primjer 2. Množenje razlomka prirodnim brojem

množenje razlomaka prirodnim brojem

Koliko je $2 \cdot \frac{3}{5}$?

Rješenje:

$2 \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{5} + \frac{3}{5} = \frac{6}{5}$. Ako postupak skratimo,

dobivamo $2 \cdot \frac{3}{5} = \frac{2 \cdot 3}{5} = \frac{6}{5}$.

Važno

Razlomak množimo prirodnim brojem tako da brojnik pomnožimo tim prirodnim brojem, a nazivnik ostaje isti.

Primjer 3. Broj učenica u razredu

U Lukinom razredu ima 30 učenika. $\frac{3}{5}$ razreda čine djevojčice. Koliko ima djevojčica u razredu? Koliko ima dječaka u Lukinom razredu?

Rješenje:

I. način



Brojnik pomnoži, nazivnik prepisi

$$\frac{3}{5} \cdot 30 = \frac{3 \cdot 30}{5} = \frac{90}{5}$$

$$\frac{3}{5} \cdot 30 = \frac{3 \cdot 30}{5} = \frac{90}{5}$$

Da bismo izračunali koliko je $\frac{3}{5}$ od 30, trebamo te brojeve pomnožiti.



Dobili smo da u razredu ima $\frac{90}{5}$ djevojčica.

Da bi nam rezultat bio razumljiviji, zapišimo ga u obliku prirodnog broja: $\frac{90}{5} = 90 : 5 = 18$.

U Lukinom razredu ima 18 djevojčica. Broj dječaka jednostavno izračunavamo oduzimanjem $30 - 18 = 12$. U Lukinom razredu ima 12 dječaka.

II. način

Možemo računati i ovako:

$\frac{1}{5}$ od 30 je $30 : 5 = 6$ djevojčica. Tada su $\frac{3}{5}$ tri puta više od $\frac{1}{5}$, dakle, $3 \cdot 6 = 18$ djevojčica. U Lukinom razredu ima 18 djevojčica. Broj dječaka jednostavno izračunavamo oduzimanjem $30 - 18 = 12$. U Lukinom razredu ima 12 dječaka. Primjećujemo da je u ovom primjeru drugi način bio lakši za rješavanje zadatka. Taj način upotrijebite kad god je moguće, tj. kad god je prirodni broj djeljiv s nazivnikom razlomka.



Zadaci:

1. Izračunaj koliko kutija čaja iznosi $\frac{3}{4}$ od 120 kutija čaja.

2. Koliko je:

a) $\frac{2}{5}$ od 25 sanduka; b) $\frac{3}{8}$ od 72 vreće;

c) $\frac{8}{9}$ od 108 kutija?

3. U jednoj tvornici je zaposleno 160 radnika. Od tog broja $\frac{2}{5}$ su žene. Koliko žena, a koliko muškaraca radi u toj tvornici?

4. Trojica braće naslijedila su zemljište površine 7200 m². Prvi brat dobiva $\frac{5}{12}$ zemljišta, drugi

$\frac{1}{4}$, a treći ostatak. Koliko m² dobiva svaki od braće?

5. U jednoj školi s 360 učenika ima $\frac{19}{24}$ djece koja već znaju plivati. Izračunaj broj plivača i neplivača u toj školi.



6. Stroj za asfaltiranje u jednom satu može asfaltirati dio ulice dug $\frac{3}{4}$ km. Koliko kilometara će uspjeti asfaltirati za 16 sati?

7. Koliko paketa maslaca od $\frac{1}{4}$ kg treba kupiti, ako za svadbenu tortu treba 2 kg maslaca?



Primjer 4. Kraćenje razlomaka pri množenju

Koliko je $24 \cdot \frac{17}{32}$?

Rješenje:

Sjećate li se skraćivanja? Skratiti razlomak

$$\frac{2}{8} + \frac{5}{3} \text{ NE}$$

$$\frac{2}{8} \cdot \frac{5}{3} \text{ DA}$$

znači podijeliti mu brojnik i nazivnik istim brojem. Dosada smo skraćivali samo jedan razlomak; kod množenja to smijemo raditi s više razlomaka. $24 \cdot \frac{17}{32} = \frac{408}{32} = \frac{51}{4}$

Umnožak $\frac{408}{32}$ smo na kraju skratili s 8 i dobili $\frac{51}{4}$.

U tom zadatku mogli smo skratiti i prije množenja - broj 24 u brojniku i 32 u nazivniku možemo skratiti s 8. Kad 24 podijelimo s 8 dobijemo 3, a kad 32 podijelimo s 8

$$\text{dobijemo } 4. \quad 24 \cdot \frac{17}{32} = \frac{\overset{3}{\cancel{24}} \cdot 17}{\underset{4}{\cancel{32}}} = \frac{3 \cdot 17}{4} = \frac{51}{4}$$

$$\text{Skrraćeno zapisujemo } \frac{\overset{3}{\cancel{24}} \cdot 17}{\underset{4}{\cancel{32}}} = \frac{51}{4}$$

Pri množenju kratimo tako da jedan broj iz brojnika i jedan broj iz nazivnika podijelimo istim brojem.



Zadaci:

8. Spoji parove:

$5 \cdot \frac{3}{7}$	$2 \cdot \frac{4}{9}$	$0 \cdot \frac{1}{3}$	$1 \cdot \frac{5}{13}$
-----------------------	-----------------------	-----------------------	------------------------

$\frac{8}{9}$	$\frac{15}{7}$	$\frac{5}{13}$	0
---------------	----------------	----------------	---

9. Izračunaj umnožak:

a) $5 \cdot \frac{1}{4}$; b) $\frac{7}{5} \cdot 6$; c) $14 \cdot \frac{2}{3}$; d) $\frac{5}{9} \cdot 10$.

10. Prvo skрати, pa zatim pomnoži:

a) $5 \cdot \frac{1}{15}$; b) $\frac{7}{30} \cdot 6$; c) $14 \cdot \frac{2}{7}$; d) $\frac{5}{9} \cdot 18$.

11. Izračunaj umnožak, skрати prije množenja, ako je moguće:

a) $7 \cdot \frac{3}{15}$; b) $\frac{17}{26} \cdot 5$; c) $24 \cdot \frac{11}{6}$; d) $\frac{13}{3} \cdot 8$.

12. Izračunaj broj dvostruko veći od zadanog:

a) $\frac{3}{16}$; b) $2 \cdot \frac{5}{11}$; c) $\frac{11}{8}$; d) $2 \cdot \frac{1}{2}$.

13. Izračunaj peterostruki broj od zadanog:

a) $\frac{7}{15}$; b) $1 \frac{7}{11}$; c) $\frac{11}{5}$; d) $2 \frac{1}{10}$.

14. Ana je riješila $\frac{5}{12}$ testa. Koliko zadataka je Ana riješila, ako test ima 24 zadatka?

15. Jedna kutija kolača teška je $\frac{1}{3}$ kg. Koliko teži 15 takvih kutija?

16. Sat kasni $\frac{1}{2}$ minute na dan. Koliko će zakasniti za 20 dana?

17. 6 radnika obavi neki posao za $3 \frac{1}{2}$ dana. Za koje vrijeme bi taj posao obavio 1 radnik?

18. Majina baka ima recept za jedan kruh: $1 \frac{1}{2}$ kg brašna, $\frac{1}{3}$ l mlijeka, 1 kvasac i $\frac{1}{10}$ l ulja. Koliko je potrebno pojedinog sastojka da bi se napravilo 5 kruhova?

Primjer 5. Pretvaranje mjernih jedinica

Koliko je $\frac{7}{25}$ metra izraženo u centimetrima?

Rješenje:

Znamo da 1 metar ima 100 centimetara. Dakle,

da bismo $\frac{7}{25}$ metra izrazili u centimetrima, moramo taj razlomak pomnožiti sa 100.

1 metar =
= 100 centimetara =
= 1000 milimetara

$$\frac{7}{25} \text{ m} = \frac{7}{25} \text{ od } 100 \text{ cm} = \frac{7}{\cancel{25}_1} \cdot \cancel{100}^4 \text{ cm} = 28 \text{ m}$$

Primjer 6.

Izrazimo $3\frac{1}{4}$ sata u minutama.

Rješenje:

Znamo da jedan sat ima 60 minuta. Dakle, mi trebamo izračunati koliko je $3\frac{1}{4}$ od 60 minuta, tj. $3\frac{1}{4} \cdot 60$.

Prije množenja potrebno je mješoviti broj zapisati u obliku razlomka.

$$3\frac{1}{4} = 3 + \frac{1}{4} = \frac{3 \cdot 4 + 1}{4} = \frac{13}{4}$$

Dakle, $3\frac{1}{4}$ sata je 195 minuta.

$$3\frac{1}{4} \text{ h} = 3\frac{1}{4} \text{ od } 60 \text{ min} = 3\frac{1}{4} \cdot 60 \text{ min} = \frac{13}{\cancel{4}_1} \cdot \cancel{60}^{15} \text{ min} = 195 \text{ min}$$

1 sat =
= 60 minuta =
= 3600 sekundi
1 dan = 24 sata

Zadaci:

19. Koliko je centimetara:

- a) $\frac{1}{2}$ m; b) $\frac{3}{5}$ m; c) $\frac{17}{25}$ m; d) $\frac{47}{50}$ m.

20. Koliko je grama:

- a) $\frac{1}{4}$ kg; b) $\frac{11}{25}$ kg; c) $\frac{3}{8}$ kg; d) $\frac{57}{250}$ kg.

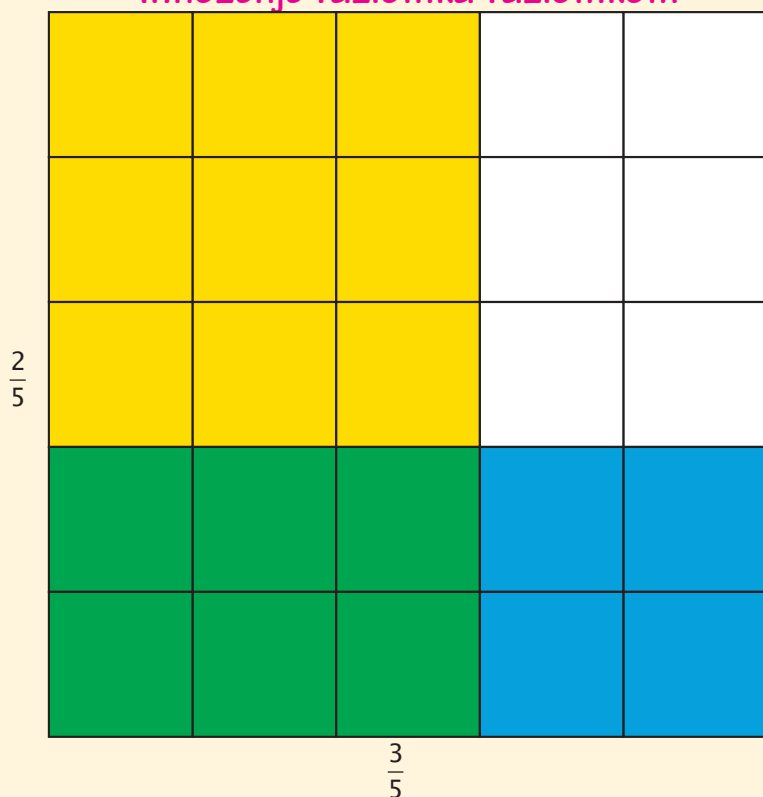
21. Koliko je minuta:

- a) $\frac{1}{4}$ sata; b) $\frac{3}{4}$ sata; c) $\frac{5}{6}$ sata; d) $\frac{23}{30}$ sata.

22. Koliko je mjeseci:

- a) $\frac{1}{2}$ godine; b) $\frac{3}{4}$ godine; c) $\frac{5}{6}$ godine; d) $\frac{5}{12}$ godine.

Primjer 7. Množenje razlomka razlomkom



Nacrtna je kvadrat sa stranicom 1 dm. Kolika je površina zelenog dijela?

Rješenje:

Množenje razlomka razlomkom

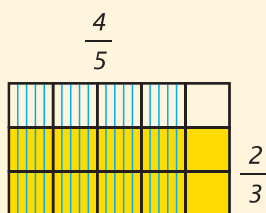
I. način

Cijeli kvadrat je podijeljen na 25 malih kvadratića, površina svakog kvadratića je $\frac{1}{25}$ dm². Zeleno je obojano 6 malih kvadratića, dakle površina zelenog dijela je $\frac{6}{25}$ dm².

II. način

Zeleni dio je u obliku pravokutnika. Površinu pravokutnika računamo tako da izračunamo umnožak duljina njegovih stranica. Stranice zelenog pravokutnika su $\frac{2}{5}$ i $\frac{3}{5}$. Površina tog pravokutnika je $P = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5}$ dm². Pošto se u oba načina promatra isti zeleni pravokutnik, zaključujemo da je $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{25} = \frac{2}{\cancel{5}_1} \cdot \frac{3}{\cancel{5}_1} = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 5} = \frac{6}{25}$.

Primjer 8. Množenje razlomaka



Promotri sliku i odgovori na pitanja.

- Koliki dio pravokutnika je žut?
- Koliki dio pravokutnika je prugast?
- Na koliko dijelova je podijeljen cijeli pravokutnik?
- Koliko dijelova je i žuto i prugasto?
- Koliki dio pravokutnika je i žuto i prugasto?
- Dio koji je žut i prugast čini pravokutnik. Kolike su njegove stranice?
- Kolika je površina tog pravokutnika?

Rješenja:

- žuto je $\frac{2}{3}$ pravokutnika;
- prugasto je $\frac{4}{5}$ pravokutnika;
- pravokutnik je podijeljen na 15 kvadratića;

d) 8 kvadratića je i žuto i prugasto;

e) $\frac{8}{15}$ pravokutnika je i žuto i prugasto;

f) stranice su $\frac{2}{3}$ i $\frac{4}{5}$;

g) površina je $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$.

$$\frac{\text{brojnik} \cdot \text{brojnik}}{\text{nazivnik} \cdot \text{nazivnik}}$$

Iz prethodnih primjera smo naučili da je

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{25} \quad \text{i} \quad \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{15}.$$

Promotri zadane razlomke i njihov umnožak. Kakva veza postoji

između brojnika faktora i brojnika umnoška?

Kakva veza postoji između nazivnika faktora i nazivnika umnoška?

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{8}{15}.$$

Važno

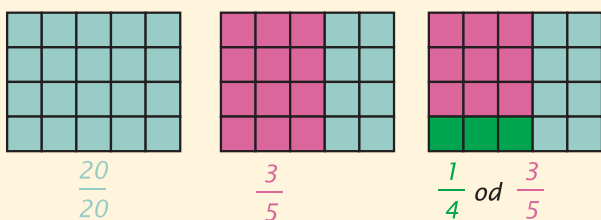
Umnožak razlomka je razlomak kojemu je brojnik jednak umnošku brojnika faktora, a nazivnik jednak umnošku nazivnika faktora. $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$.

Primjer 9.

Koliko je $\frac{1}{4}$ od $\frac{3}{5}$?

Rješenje:

Pogledajmo slike:



Na prvoj slici je nacrtan pravokutnik podijeljen

na dvadeset kvadratića, jedan kvadratić je $\frac{1}{20}$

pravokutnika. Na drugoj slici su $\frac{3}{5}$ pravokut-

nika obojane ružičasto. Na trećoj slici je $\frac{1}{4}$ od

ružičastog dijela (od $\frac{3}{5}$) obojana zeleno. Dakle

$\frac{1}{4}$ od $\frac{3}{5}$ su tri kvadratića odnosno $\frac{3}{20}$.

Ukratko: $\frac{1}{4}$ od $\frac{3}{5} = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{5} = \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 5} = \frac{3}{20}$.

Primjer 10. Skraćivanje pri množenju više razlomaka

Koliko je: $\frac{3}{4} \cdot \frac{8}{9}, \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}, \frac{18}{11} \cdot \frac{33}{9}, \frac{2}{4} \cdot \frac{8}{10}, \frac{2}{8} \cdot \frac{16}{24}$?

skraćivanje

Rješenje:

Prije množenja smijemo skratiti.

$$\frac{\cancel{3}^1}{\cancel{4}_1} \cdot \frac{\cancel{8}^2}{\cancel{9}_3} = \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 3} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\cancel{3}^1}{\cancel{4}_2} \cdot \frac{5}{\cancel{6}_2} = \frac{1 \cdot 1 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 2} = \frac{5}{16}$$

$$\frac{\cancel{18}^2}{\cancel{11}_1} \cdot \frac{\cancel{33}^3}{\cancel{9}_1} \cdot \frac{2 \cdot 3}{1 \cdot 1} = \frac{6}{1} = 6$$

$$\frac{\cancel{2}^1}{\cancel{4}_1} \cdot \frac{\cancel{8}^2}{\cancel{10}_5} = \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 5} = \frac{2}{5}$$

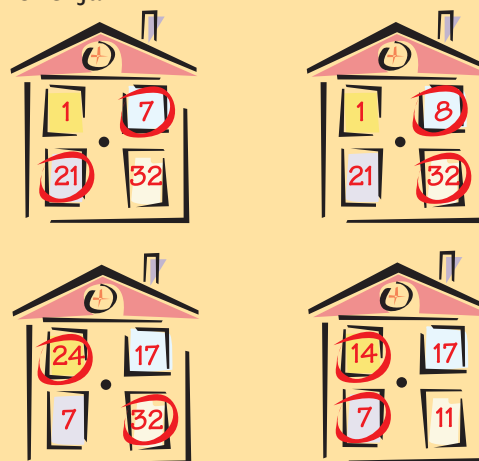
$$\frac{\cancel{2}^1}{\cancel{8}_1} \cdot \frac{\cancel{16}^2}{\cancel{24}_{12}} \cdot \frac{5}{6} = \frac{1 \cdot \cancel{2}^1 \cdot 5}{1 \cdot 12 \cdot \cancel{6}_3} = \frac{1 \cdot 1 \cdot 5}{1 \cdot 12 \cdot 3} = \frac{5}{36}$$

Pri skraćivanju razlomaka možemo brojeve rastaviti na faktore. Tako ćemo lakše uočiti koje brojeve možemo skratiti.

$$\frac{18}{11} \cdot \frac{33}{9} = \frac{2 \cdot \cancel{9}}{11} \cdot \frac{11 \cdot \cancel{3}}{\cancel{9}} = \frac{2 \cdot 3}{1} = 6$$

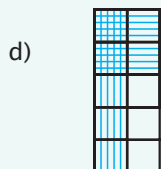
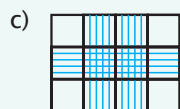
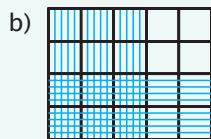
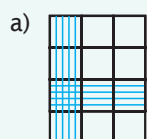
$$\frac{2}{8} \cdot \frac{16}{24} \cdot \frac{5}{6} = \frac{2 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{8} \cdot 5}{2 \cdot \cancel{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cancel{8} \cdot 6} = \frac{5}{2 \cdot 3 \cdot 6} = \frac{5}{36}$$

Zaokruženi brojevi smiju se skratiti prije množenja.



Zadaci:

23. Na sljedećim slikama prikazan je umnožak dvaju razlomaka. Napiši koji se razlomci množe i koliki je rezultat:



24. Izračunaj umnožak:

a) $\frac{5}{3} \cdot \frac{1}{4}$; b) $\frac{7}{5} \cdot \frac{6}{15}$; c) $\frac{17}{11} \cdot \frac{2}{3}$; d) $\frac{5}{9} \cdot \frac{10}{3}$;

e) $\frac{4}{3} \cdot \frac{2}{7}$; f) $\frac{17}{3} \cdot \frac{6}{5}$; g) $\frac{1}{11} \cdot \frac{7}{4}$; h) $\frac{5}{8} \cdot \frac{11}{2}$.

25. Izračunaj umnožak:

a) $\frac{7}{3} \cdot \frac{1}{2}$; b) $\frac{7}{10} \cdot \frac{11}{5}$; c) $\frac{11}{17} \cdot \frac{2}{3}$; d) $\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{3}$;

e) $\frac{1}{5} \cdot \frac{2}{7}$; f) $\frac{7}{13} \cdot \frac{1}{2}$; g) $\frac{5}{11} \cdot \frac{7}{2}$; h) $\frac{5}{8} \cdot \frac{13}{2}$;

i) $\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}$; j) $\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4}$; k) $\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4}$; l) $\frac{7}{4} \cdot \frac{5}{3}$;

m) $\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{3}$; n) $\frac{3}{2} \cdot \frac{11}{7}$; o) $\frac{7}{4} \cdot \frac{5}{3}$; p) $\frac{5}{11} \cdot \frac{5}{3}$;

26. Prvo skрати pa zatim pomnoži:

a) $\frac{5}{3} \cdot \frac{1}{10}$; b) $\frac{7}{14} \cdot \frac{1}{15}$; c) $\frac{17}{11} \cdot \frac{22}{3}$; d) $\frac{5}{9} \cdot \frac{10}{2}$;

e) $\frac{5}{3} \cdot \frac{6}{11}$; f) $\frac{7}{4} \cdot \frac{1}{21}$; g) $\frac{1}{24} \cdot \frac{12}{5}$; h) $\frac{7}{9} \cdot \frac{25}{5}$.

27. Prvo skрати pa zatim pomnoži:

a) $\frac{5}{12} \cdot \frac{4}{10}$; b) $\frac{7}{14} \cdot \frac{28}{21}$; c) $\frac{17}{33} \cdot \frac{22}{34}$; d) $\frac{5}{90} \cdot \frac{10}{20}$;

e) $\frac{25}{3} \cdot \frac{9}{10}$; f) $\frac{14}{5} \cdot \frac{15}{28}$; g) $\frac{3}{36} \cdot \frac{12}{9}$; h) $\frac{15}{25} \cdot \frac{30}{10}$.

28. Koliko je:

a) $\frac{1}{2}$ od 4; b) $\frac{3}{8}$ od 24;

c) $\frac{7}{10}$ od 120; d) $\frac{3}{5}$ od 10.

29. Koliko je:

a) $\frac{3}{7}$ od $\frac{4}{10}$; b) $\frac{2}{5}$ od $\frac{4}{7}$;

c) $\frac{4}{25}$ od $\frac{5}{36}$; d) $\frac{3}{5}$ od $\frac{20}{9}$;

e) $\frac{5}{3}$ od $\frac{3}{10}$; f) $\frac{14}{5}$ od $\frac{15}{7}$;

g) $\frac{5}{36}$ od $\frac{24}{2}$; h) $\frac{15}{2}$ od $\frac{8}{30}$.

Primjer 11. Množenje mješovitih brojeva



Prije množenja mješoviti broj zapiši u obliku razlomka.

Automobilu je potrebno $6\frac{1}{2}$ l benzina da bi prešao 100 km. Koliko mu je litara benzina potrebno za put dug 2000 km?

Rješenje:

Najprije odredimo koliko puta ide 100 km u 2000 km, tj. $2000 : 100 = 20$ puta.

Dakle, potrošnju benzina za 100 km potrebno je pomnožiti s 20 da bismo dobili potrošnju benzina za 2000 km.

S obzirom na to da je potrošnja zapisana u obliku mješovitog broja, najprije je moramo zapisati u obliku razlomka. $6\frac{1}{2} = 6 + \frac{1}{2} = \frac{6 \cdot 2 + 1}{2} = \frac{13}{2}$ l.

Računamo potrošnju za 2000 km:
 $\frac{13}{2} \cdot 20 = \frac{13 \cdot 20}{2} = 130$ l.

Za put dug 2000 km automobilu je potrebno 130 l benzina.

Zadaci:

30. Izračunaj:

a) $2\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{4}$; b) $\frac{5}{7} \cdot 2\frac{6}{15}$.

31. Izračunaj:

a) $\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{16}{25}$; b) $\frac{4}{7} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{21}{16} \cdot \frac{25}{36}$.

32. Izviđači su krenuli na put dug 40 kilometara.

Prvi dan su prešli $\frac{1}{4}$ cijelog puta, a drugi $\frac{4}{5}$ puta koji su prešli prvog dana. Treći dan su stigli na cilj. Koliko kilometara su prešli prvi, drugi i treći dan?

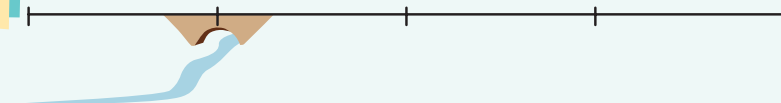
33. Površina voćnjaka je 120 m^2 , a $\frac{3}{8}$ njegove površine zasađeno je kruškama. Kolika je površina zasađena kruškama?

34. Sportska dvorana je dugačka $15\frac{2}{3}$ m, a široka $7\frac{1}{2}$ m. Kolika je njezina površina?

35. Ako trkač u jednom satu pretrči 15 km, koliko će pretrčati za:

a) $\frac{2}{3}$ sata; b) $\frac{2}{5}$ sata; c) $\frac{7}{15}$ sata?

36. Tri petine učenika neke škole bavi se sportom. Četiri sedmine od tog broja učenika, koji se bave sportom, igraju nogomet. Koliki dio učenika te škole igra nogomet? Ako u školi ima 875 učenika, koliko ih se bavi sportom. Koliko učenika igra nogomet?

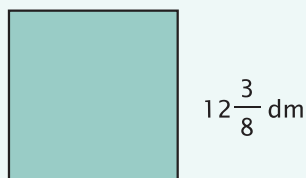


38. Obitelj Horvat zarađuje prosječno 4200 kn mjesečno. Za troškove stanovanja potrebno je $\frac{2}{5}$ zarade, a za hranu $\frac{1}{4}$ zarade. Koliko kuna je potrebno za pojedine troškove? Koliki dio im preostaje za ostale troškove?

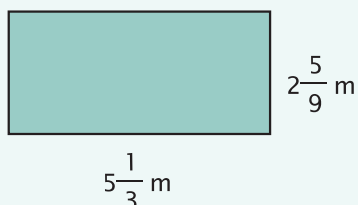
39. Trgovina je naručila 150 kutija čaja. Jedna trećina te pošiljke je čaj od šipka, a tri desetine pošiljke je zeleni čaj. Ostalo su razni voćni čajevi. Koliko je kutija pojedine vrste čaja naručila trgovina?



40. Koliki je opseg i površina kvadrata sa stranicom $12\frac{3}{8}$ dm?



41. Koliki je opseg i površina pravokutnika sa stranicama $3\frac{1}{4}$ dm i $5\frac{7}{8}$ dm?
42. Koliki je opseg jednakostraničnog trokuta sa stranicom $21\frac{5}{6}$ m?
43. Koliki je opseg i površina kvadrata sa stranicom $2\frac{1}{4}$ m?
44. Koliki je opseg i površina pravokutnika sa stranicama $5\frac{1}{3}$ m i $2\frac{5}{9}$ m?



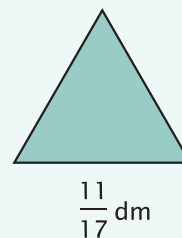
37. Put između gradova A i B dug je 3600 m. Na tom putu, na $\frac{1}{4}$ udaljenosti od grada A, nalazi se most. Koliko metara je most udaljen od grada B?

45. Koliki je opseg jednakostraničnog trokuta sa stranicom $7\frac{2}{3}$ cm?

46. Koliki su opseg i površina kvadrata sa stranicom $\frac{3}{4}$ dm?

47. Koliki su opseg i površina pravokutnika sa stranicama $13\frac{1}{4}$ dm i $1\frac{1}{2}$ m?

48. Koliki je opseg jednakostraničnog trokuta sa stranicom $\frac{11}{17}$ dm?



49. Koliko je decimetara?

- a) $\frac{1}{2}$ m; b) $\frac{3}{5}$ m; c) $\frac{29}{10}$ m; d) $\frac{17}{5}$ m.

50. Izračunaj. Mjernu jedinicu pretvori u manju tako da dijeljenje bude moguće:

- a) $\frac{3}{50}$ od 2 m; b) $\frac{5}{8}$ od 3 m;

- c) $\frac{13}{100}$ od 2 h; d) $\frac{3}{20}$ od 1 dm?



51. Izračunaj:

- a) $\frac{2}{3} \cdot 1$; b) $0 \cdot \frac{4}{7}$; c) $1 \cdot \frac{17}{8}$; d) $\frac{5}{6} \cdot 0$;

- e) $1 \cdot \frac{1}{3}$; f) $0 \cdot \frac{1}{15}$; g) $\frac{1}{9} \cdot 1$; h) $\frac{1}{6} \cdot 0$.

Primjer 12. Recipročni brojevi

Pogledajmo ove umnoške:

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} = 1, \quad \frac{7}{2} \cdot \frac{2}{7} = 1, \quad \frac{4}{15} \cdot \frac{15}{4} = 1.$$

Rješenje:

Primjećujemo da su svi umnoški jednaki jedan.

Važno

Za dva broja čiji umnožak je jednak 1 kažemo da su međusobno recipročni brojevi.

$\frac{3}{4}$ je recipročan broj od $\frac{4}{3}$, a $\frac{4}{3}$ je recipročan broj od $\frac{3}{4}$.

$\frac{7}{2}$ je recipročan broj od $\frac{2}{7}$, a $\frac{2}{7}$ je recipročan broj od $\frac{7}{2}$.

$\frac{4}{15}$ je recipročan broj od $\frac{15}{4}$, a $\frac{15}{4}$ je

Recipročan broj recipročan broj od $\frac{4}{15}$.

Pogledajmo brojnike i nazivnike recipročnih brojeva. Broj koji je u brojniku jednog razlomka pojavljuje se u nazivniku drugog, a broj koji je u nazivniku prvog pojavljuje se u brojniku drugog broja.

Pojednostavljeno: Recipročan broj dobijemo tako da zamijenimo brojeve koji su u brojniku i nazivniku razlomka.

**Primjer 13. Tražimo recipročan broj**

- a) Koji broj je recipročan broju 4?
b) Koji broj je recipročan broju $\frac{1}{2}$?

Rješenje:

Kad tražimo recipročan broj od nekog prirodnog broja, koristimo činjenicu da svakom prirodnom broju smijemo dopisati nazivnik 1.

$$4 \cdot \frac{1}{4} = \frac{4}{1} \cdot \frac{1}{4} = 1.$$

4 je recipročan broj od $\frac{1}{4}$, a $\frac{1}{4}$ je recipročan od 4.

$$\frac{1}{2} \cdot 2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{1} = 1.$$

2 je recipročan broj od $\frac{1}{2}$, a $\frac{1}{2}$ je recipročan broj od 2.

Važno

Broj 1 je recipročan sam sebi.
Broj 0 nema recipročnog broja i nije recipročan niti jednom broju.

Zašto? Zato jer množenjem s 0 uvijek dobivamo 0 i ne možemo dobiti broj 1.

Zadaci:

2. Napiši broj koji je recipročan zadanom broju.

a) $\frac{2}{3}$; b) $\frac{4}{7}$; c) $\frac{17}{8}$; d) $\frac{5}{6}$;

e) $\frac{1}{3}$; f) $\frac{1}{15}$; g) $\frac{1}{9}$; h) $\frac{1}{6}$;

i) 1; j) 2; k) 15; l) 0;

m) $2\frac{3}{4}$; n) $3\frac{2}{5}$; o) $1\frac{5}{9}$; p) $12\frac{1}{6}$.

Primjer 14.

Višestruko skraćivanje

Koliko je $\frac{2}{5} \cdot \frac{12}{26} \cdot \frac{25}{72} \cdot \frac{39}{15}$?



A BAŠ SAM SE
PITAO ŠTO ĆE MI TA
SVOJSTVA...

Rješenje:

Svojstva množenja upotrebljavamo da bismo zadatke lakše i brže riješili. Primjerice, pri množenju više razlomaka možemo kratiti brojnik prvog razlomka s nazivnikom zadnjeg. Riješimo zajedno ovaj zadatak s višestrukim skraćivanjem.

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{12}{26} \cdot \frac{25}{72} \cdot \frac{39}{15} = \frac{2 \text{ i } 72 \text{ skratimo s } 2}{5 \cdot \frac{12}{26} \cdot \frac{25}{72} \cdot \frac{39}{15}} = \frac{1}{5} \cdot \frac{12}{26} \cdot \frac{25}{36} \cdot \frac{39}{15}$$

5 i 25 skratimo s 5
12 i 15 skratimo s 3
26 i 39 skratimo s 13

$$= \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{13} \cdot \frac{5}{36} \cdot \frac{3}{5} = \frac{4 \text{ i } 36 \text{ skratimo s } 4}{5 \cdot 13 \cdot 5} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{5}$$

4 i 36 skratimo s 4
5 i 5 skratimo s 5

$$= \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{3}{1} = \frac{9 \text{ i } 3 \text{ skratimo s } 3}{5 \cdot 13 \cdot 9} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{195}$$

9 i 3 skratimo s 3

Taj postupak je moguće napraviti na nekoliko različitih načina, no bez obzira na redoslijed skraćivanja rezultat će na kraju biti jednak.

Ne zaboravi: pri množenju skraćujemo tako da jedan broj iz brojnika i jedan broj iz nazivnika podijelimo s istim brojem. Kod zbrajanja i oduzimanja se ne krati.



Zadaci:

Primijeni svojstva množenja da bi zadatke brže riješio.

3. Izračunaj na što kraći način.

a) $1 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{4}$; b) $\frac{3}{7} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{5}{6}$;

c) $\frac{3}{8} \cdot 0 \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{76}{91}$; d) $\frac{57}{16} \cdot \frac{89}{19} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{123}{111} \cdot 0$.

4. Izračunaj na što kraći način.

a) $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{10}{4}$; b) $\frac{3}{7} \cdot \frac{12}{5} \cdot \frac{5}{6}$; c) $\frac{3}{8} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{4}{7}$; d) $\frac{5}{6} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{3}{5}$.

5. Izračunaj na što kraći način.

a) $\frac{2}{7} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{5}{4}$; b) $\frac{9}{4} \cdot \frac{11}{5} \cdot \frac{5}{33}$; c) $\frac{6}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{9}$; d) $\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{4}{5}$.

6. Izračunaj na što kraći način.

a) $\frac{2}{49} \cdot \frac{14}{15} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{5}{4}$; b) $\frac{1}{7} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{7}{5}$;

c) $\frac{36}{64} \cdot \frac{7}{13} \cdot \frac{8}{15} \cdot \frac{75}{49}$; d) $\frac{16}{21} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{35}{24} \cdot \frac{27}{15}$.

7. Anina mama je kupila $5\frac{1}{4}$ m žutog i $3\frac{1}{2}$ m crvenog platna. Cijena 1 m žutog platna je $55\frac{3}{4}$ kn, a cijena 1 m crvenog platna je $98\frac{1}{2}$ kn. Koliko je Anina mama platila kupljeno platno?

8. Razrednica i njena 23 učenika 6.a razreda jeli su pizze na proslavi kraja školske godine. Svi zajedno su pojeli 6 pizza. 31 učenik 8.b i njihov razrednik također se žele počastiti pizzom. Oni mogu pojesti čak jedan i pol puta više pizze nego šestaši. Koliko pizza trebaju naručiti osmaši?

1.7. Dijeljenje razlomaka

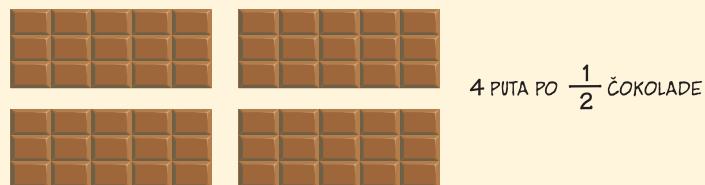
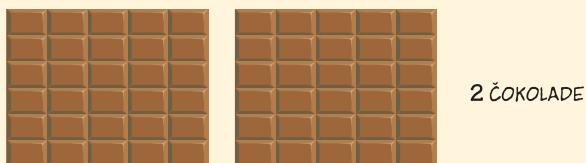
Podijeli čokoladu s prijateljima

- a) Maja ima četiri čokolade koje želi podijeliti s Anom, tako da svaka dobije jednako. Koliko čokolada će dobiti svaka?
- b) Luka ima dvije čokolade koje želi podijeliti s trojicom prijatelja. Koliko čokolada će dobiti svaki od njih četvorice?

Primjer 1. Podjela čokolade

Maja ima dvije čokolade. Koliko će komada čokolade dobiti, ako ih podijeli na polovine?

Rješenje:



Kad Maja podijeli dvije čokolade na polovine, dobit će četiri komada čokolade.
Zaključujemo: $2 : \frac{1}{2} = 4$. Provjera: $4 \cdot \frac{1}{2} = 2$.

Primjer 2. Podjela konopca

Luka ima jedan konopac koji želi rezanjem podijeliti na trećine. Koliko dijelova konopca će Luka imati nakon rezanja?



Rješenje:

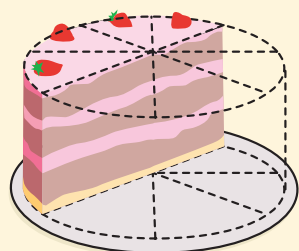
Kad Luka podijeli konopac na trećine, imat će tri komada konopca.

Zaključujemo: $1 : \frac{1}{3} = 3$. Provjera: $3 \cdot \frac{1}{3} = 1$.



Primjer 3. Podjela torte

Maji je nakon rođendanskog ručka preostala polovica torte. Navečer su svratile još tri njezine prijateljice. Koliki dio torte će dobiti svaka od njih četiri?



Rješenje:

Pola torte treba podijeliti na 4 jednaka dijela. To znači da je cijela torta podijeljena na 8 jednakih dijelova. Svaka od djevojčica je dobila $\frac{1}{8}$ torte.

Zaključujemo: $\frac{1}{2} : 4 = \frac{1}{8}$. Provjera: $\frac{1}{8} \cdot 4 = \frac{1}{2}$.

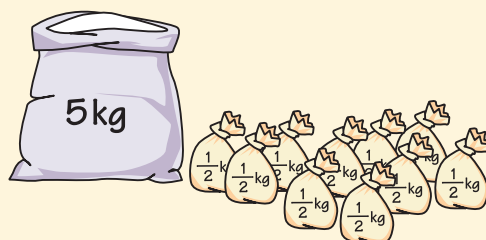
Primjer 4. Podjela šećera

a) Mama je kupila vreću s 5 kg šećera. Taj šećer želi podijeliti na vrećice od $\frac{1}{2}$ kg. Koliko vrećica će napuniti?

b) Tata je kupio $5\frac{3}{4}$ kg brašna koje treba podijeliti na vrećice od $\frac{1}{2}$ kg. Koliko vrećica mu je potrebno?

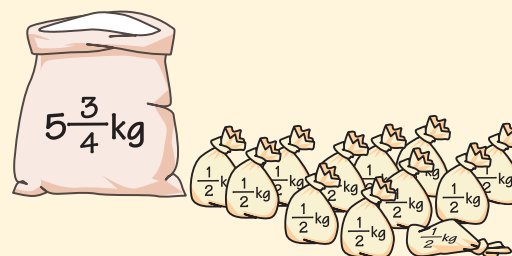
Rješenje:

a)



Da bismo 1 kg šećera podijelili u vrećice od $\frac{1}{2}$ kg, potrebne su nam 2 vrećice. Da bismo 5 kg šećera podijelili u vrećice od $\frac{1}{2}$ kg, potrebne su nam $5 \cdot 2$ vrećice, tj. 10 vrećica. Zaključujemo: $5 : \frac{1}{2} = 10$. Provjera: $10 \cdot \frac{1}{2} = 5$.

b)



Iz prijašnjeg primjera znamo da nam je za 5 kg potrebno 10 vrećica od $\frac{1}{2}$ kg.

Preostalo nam još $\frac{3}{4}$ kg brašna. Znamo da vrijedi $\frac{3}{4} = \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$. Za $\frac{3}{4}$ kg nam je potrebna 1 vrećica od $\frac{1}{2}$ i još 1 vrećica u kojoj će biti $\frac{1}{4}$ kg, tj. $\frac{1}{2}$ vrećice.

Dakle, potrebno nam je $11\frac{1}{2}$ vrećica.

Zaključujemo: $5\frac{3}{4} : \frac{1}{2} = 11\frac{1}{2}$.

Provjera $11\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{23}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{23}{4} = 5\frac{3}{4}$.

Primjer 5. Veza između dijeljenja i množenja

Pogledajmo račune koje smo napisali u prethodnim primjerima i usporedimo ih s umnošcima zdesna:

$$2 : \frac{1}{2} = 4 \quad 2 \cdot \frac{2}{1} = 4,$$

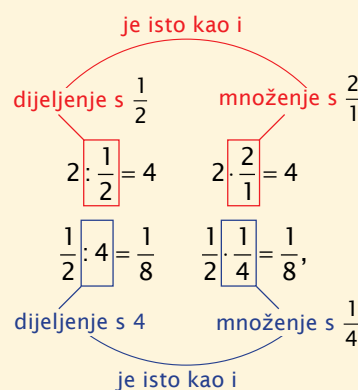
$$1 : \frac{1}{3} = 3 \quad 1 \cdot \frac{3}{1} = 3,$$

$$\frac{1}{2} : 4 = \frac{1}{8} \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8},$$

$$5\frac{3}{4} : \frac{1}{2} = 11\frac{1}{2} \quad 5\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{1} = 11\frac{1}{2}.$$

Rješenje:

Primjećujemo da ta dijeljenja i množenja daju jednake rezultate. Pogledajmo djelitelje i druge faktore, to su brojevi: $\frac{1}{2}$ i $\frac{2}{1}$, $\frac{1}{3}$ i $\frac{3}{1}$, 4 i $\frac{1}{4}$.



Takve parove brojeva smo već upoznali - to su recipročni brojevi. Dakle, dijeljenje s nekim razlomkom i množenje s recipročnim daje jednak rezultat.

Matematičari su smislili jednostavno pravilo koje će nam olakšati dijeljenje razlomaka:

Važno

Dijeliti s razlomkom znači pomnožiti s njemu recipročnim brojem. Za svaka dva razlomka $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$ vrijedi $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$.

Primjer 6. Dijeljenje razlomaka

Izračunaj:

a) $\frac{2}{3} : \frac{7}{5}$; b) $\frac{3}{7} : \frac{6}{5}$; c) $\frac{3}{8} : \frac{8}{5}$;
 d) $\frac{5}{6} : 2$; e) $5 : \frac{1}{3}$; f) $\frac{14}{5} : 2\frac{1}{5}$.

Rješenje:

a) $\frac{2}{3} : \frac{7}{5} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{10}{21}$; b) $\frac{3}{7} : \frac{6}{5} = \frac{3}{7} \cdot \frac{5}{6} = \frac{1 \cdot 5}{7 \cdot 2} = \frac{5}{14}$
 c) $\frac{3}{8} : \frac{8}{5} = \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{8} = \frac{15}{64}$; d) $\frac{5}{6} : 2 = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{12}$;

e) $5 : \frac{1}{3} = 5 \cdot 3 = 15$; f) $\frac{14}{5} : 2\frac{1}{5} = \frac{14}{5} : \frac{11}{5} = \frac{14}{5} \cdot \frac{5}{11} = \frac{14}{11}$.

Prisjetimo se da mješovite brojeve prije računanja zapisujemo u obliku razlomka. Pri množenju razlomaka možemo i skraćivati.

Recept za dijeljenje razlomaka:

1. djeljenik prepisi
2. umjesto dijeljenja stavi množenje
3. napiši recipročan broj od djelitelja
4. pomnoži.



Zadaci:

1. Spoji parove:

$2 : \frac{1}{2}$	5
$\frac{1}{2} : 4$	$\frac{1}{8}$
$\frac{5}{6} : \frac{1}{6}$	4

2. Izračunaj količnik:

a) $5 : \frac{1}{4}$; b) $6 : \frac{1}{5}$; c) $14 : \frac{1}{3}$; d) $10 : \frac{1}{9}$.

3. Izračunaj količnik:

a) $\frac{1}{15} : 5$; b) $\frac{7}{30} : 6$; c) $\frac{2}{7} : 14$; d) $\frac{5}{9} : 18$.

4. Izračunaj količnik, skрати prije množenja:

a) $7 : \frac{3}{14}$; b) $\frac{15}{26} : 5$; c) $24 : \frac{6}{11}$; d) $\frac{32}{3} : 8$.

5. Izračunaj količnik, skрати prije množenja:

a) $\frac{5}{3} : \frac{1}{4}$; b) $\frac{7}{5} : \frac{6}{15}$; c) $\frac{17}{11} : \frac{2}{3}$; d) $\frac{5}{9} : \frac{10}{3}$.

6. Izračunaj količnik, skрати prije množenja:

a) $\frac{5}{3} : \frac{1}{9}$; b) $\frac{7}{14} : \frac{1}{15}$; c) $\frac{11}{17} : \frac{22}{3}$; d) $\frac{5}{9} : \frac{10}{2}$.

7. Izračunaj količnik, skрати prije množenja:

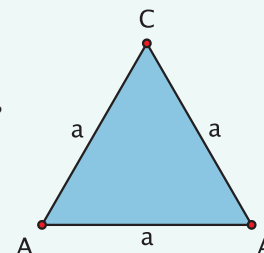
a) $\frac{5}{12} : \frac{4}{10}$; b) $\frac{7}{14} : \frac{21}{28}$; c) $\frac{17}{33} : \frac{34}{22}$; d) $\frac{5}{90} : \frac{20}{10}$.

8. Izračunaj količnik razlomka i mješovitog broja, skрати i zapiši u obliku mješovitog

broja, ako je moguće.

a) $3\frac{1}{2} : \frac{1}{8}$; b) $\frac{1}{4} : 4\frac{7}{12}$; c) $1\frac{2}{15} : \frac{2}{5}$; d) $\frac{2}{3} : 2\frac{5}{6}$.

9. Kolika je stranica jednakostraničnog trokuta kojemu je opseg $\frac{93}{100}$ m?



10. Kolika je stranica kvadrata kojemu je opseg $\frac{256}{500}$ m?

11. Za prehranu životinja dnevno se potroši $35\frac{5}{6}$ kg sijena. Za koliko dana će biti dovoljne zalihe od 2150 kg?



12. Lukin tata je kupio $15\frac{1}{4}$ kg mandarina za $83\frac{7}{8}$ kn. Kolika je cijena 1 kg mandarina?



13. Anini roditelji kupuju stan površine $75\frac{3}{4}$ m² za 250 000 kn. Kolika je cijena jednog kvadratnog metra tog stana?



14. Vinogradar želi $9\frac{4}{5}$ l vina napuniti u boce. U jednu bocu može uliti $\frac{7}{10}$ l. Koliko mu je boca potrebno?

15. Za jedno odijelo je potrebno $3\frac{1}{5}$ m² platna. Koliko odijela se može sašiti od $35\frac{1}{5}$ m² tog platna?

Vježbalica

- Izračunaj koliko kutija čaja iznosi $\frac{5}{8}$ od 160 kutija čaja.
- Koliko je:
 - $\frac{5}{6}$ od 216 sanduka; b) $\frac{5}{7}$ od 42 vreće;
 - $\frac{7}{19}$ od 114 kutija?
- U jednoj tvornici je zaposleno 1600 radnika. Od tog broja $\frac{5}{8}$ su žene. Koliko žena, a koliko muškaraca radi u toj tvornici?
- U jednoj školi s 480 učenika ima $\frac{23}{24}$ djece koja već znaju plivati. Izračunaj broj plivača i neplivača u toj školi.
- Ana je riješila $\frac{5}{18}$ testa. Koliko zadataka je Ana riješila, ako test ima 54 zadatka?
- Jedna kutija kolača teška je $\frac{3}{5}$ kg. Koliko teži 18 takvih kutija?
- Sat kasni $1\frac{3}{4}$ minuta na dan. Koliko će zakasniti za 12 dana?
- Koliko je centimetara:
 - $\frac{1}{5}$ m; b) $\frac{24}{25}$ m; c) $2\frac{7}{10}$ m; d) $\frac{13}{20}$ m.
- Koliko je grama:
 - $\frac{111}{125}$ kg; b) $\frac{3}{200}$ kg;
 - $1\frac{1}{10}$ kg; d) $\frac{24}{50}$ kg.
- Koliko je minuta:
 - $\frac{7}{4}$ sata; b) $\frac{11}{12}$ sata;
 - $\frac{5}{6}$ sata; d) $4\frac{2}{3}$ sata.
- Koliko je mjeseci:
 - $2\frac{2}{3}$ godine; b) $\frac{25}{6}$ godine;
 - $4\frac{1}{2}$ godine; d) $3\frac{3}{4}$ godine.
- Koliko je sati:
 - $5\frac{3}{4}$ dana; b) $\frac{7}{12}$ dana;
 - $\frac{11}{6}$ dana; d) $\frac{1}{2}$ dana.
- Koliko je decimetara:
 - $1\frac{1}{5}$ m; b) $\frac{3}{10}$ m; c) $\frac{18}{5}$ m; d) $\frac{27}{2}$ m.
- Koliko je decilitara:
 - $1\frac{2}{10}$ l; b) $\frac{4}{2}$ l; c) $\frac{3}{10}$ l; d) $\frac{1}{5}$ l.
- Izračunaj:
 - $13\cdot\frac{1}{4}$; b) $\frac{7}{8}\cdot 16$; c) $28\cdot\frac{2}{7}$; d) $\frac{5}{9}\cdot 90$;
 - $5\cdot\frac{7}{5}$; f) $\frac{8}{36}\cdot 6$; g) $56\cdot\frac{2}{24}$; h) $\frac{5}{18}\cdot 45$.
- Izračunaj:
 - $\frac{50}{3}\cdot\frac{18}{40}$; b) $\frac{75}{25}\cdot\frac{60}{15}$; c) $\frac{16}{14}\cdot\frac{2}{3}$;
 - $\frac{9}{7}\cdot\frac{11}{5}$; e) $\frac{42}{35}\cdot\frac{32}{72}$; f) $\frac{7}{38}\cdot\frac{16}{35}$;
 - $\frac{16}{21}\cdot\frac{7}{24}$; h) $\frac{5}{28}\cdot\frac{112}{2}$.
- Koliko je:
 - $\frac{3}{8}$ od $\frac{4}{9}$; b) $\frac{2}{5}$ od $\frac{40}{18}$; c) $\frac{48}{15}$ od $\frac{5}{36}$;
 - $\frac{6}{7}$ od $\frac{20}{9}$; e) $\frac{15}{3}$ od $\frac{30}{40}$; f) $\frac{10}{8}$ od $\frac{14}{7}$;
 - $\frac{5}{35}$ od $\frac{24}{21}$; h) $\frac{15}{22}$ od $\frac{33}{30}$.
- Izračunaj:
 - $2\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{8}$; b) $\frac{5}{19}\cdot 2\frac{8}{15}$;
 - $3\frac{1}{7}\cdot 4\frac{5}{11}$; d) $1\frac{5}{9}\cdot 5\frac{11}{14}$.
- Izračunaj:
 - $\frac{28}{15}\cdot\frac{25}{36}\cdot\frac{12}{14}$; b) $\frac{6}{8}\cdot\frac{42}{54}\cdot 2\frac{18}{14}\cdot\frac{9}{12}$;
 - $\frac{30}{5}\cdot\frac{25}{45}\cdot\frac{9}{15}$; d) $2\frac{2}{3}\cdot\frac{12}{4}\cdot 1\frac{4}{5}\cdot\frac{9}{6}$.

20. Izračunaj:

a) $2\frac{2}{7} \cdot \frac{14}{11} \cdot 2\frac{1}{16}$; b) $1\frac{7}{8} \cdot \frac{2}{5} \cdot 2$;

c) $3 \cdot 2\frac{2}{7} \cdot 5\frac{1}{4}$; d) $1\frac{2}{6} \cdot 5\frac{1}{4} \cdot 6$.

21. Izračunaj:

a) $1 \cdot \frac{44}{15} \cdot \frac{5}{4}$; b) $\frac{3}{72} \cdot \frac{48}{5} \cdot \frac{15}{6}$;

c) $\frac{37}{18} \cdot 0 \cdot \frac{41}{17} \cdot \frac{76}{91}$; d) $\frac{57}{16} \cdot \frac{899}{19} \cdot \frac{0}{5} \cdot \frac{123}{111}$.

22. Sportska dvorana je dugačka $16\frac{1}{4}$ m, a široka $8\frac{1}{5}$ m. Koliki su njezina površina i opseg?

23. Ako trkač u jednom satu pretrči 16 km, koliko će pretrčati za:

a) $\frac{3}{4}$ sata; b) $\frac{7}{8}$ sata; c) $\frac{1}{2}$ sata?

24. Koliki je opseg i površina pravokutnika sa stranicama $\frac{2}{5}$ dm i $5\frac{5}{8}$ cm?25. Koliki je opseg jednakostraničnog trokuta sa stranicom $1\frac{5}{9}$ cm?26. Koliki je opseg i površina kvadrata sa stranicom $2\frac{7}{8}$ cm?

27. Izračunaj. Mjernu jedinicu pretvori u manju tako da dijeljenje bude moguće:

a) $\frac{3}{25}$ od 3 m; b) $\frac{3}{4}$ od 5 m;

c) $\frac{7}{10}$ od 2 h; d) $\frac{17}{20}$ od 6 dm?

28. Usporedi:

a) $\frac{3}{8}$ t i 400 kg; b) $2\frac{13}{25}$ km i 2600 m;

c) $\frac{3}{4}$ kn i 25 lp; d) $\frac{1}{6}$ h i 10 min ;

e) $2\frac{7}{10}$ l i 17 dl.

29. Napiši broj koji je recipročan zadanom broju.

a) $\frac{3}{5}$; b) $1\frac{5}{6}$; c) $\frac{1}{8}$; d) 7;

e) 0; f) $\frac{1}{15}$; g) $\frac{11}{9}$; h) 1.

30. Izračunaj:

a) $\frac{5}{12} : \frac{6}{25}$; b) $\frac{7}{11} : \frac{21}{22}$;

c) $\frac{17}{36} : \frac{34}{24}$; d) $\frac{30}{80} : \frac{20}{10}$.

31. Izračunaj:

a) $3\frac{3}{4} : \frac{5}{8}$; b) $\frac{17}{22} : 4\frac{7}{11}$;

c) $1\frac{2}{3} : \frac{15}{9}$; d) $\frac{7}{8} : 2\frac{3}{16}$

32. Izračunaj:

a) $35 : \frac{7}{15}$; b) $\frac{16}{7} : 4$; c) $\frac{20}{3} : 12$;

d) $\frac{18}{24} : \frac{45}{36} : \frac{15}{30}$; e) $\frac{27}{35} : \frac{36}{20} : \frac{12}{28}$.

33. $177\frac{3}{4}$ kg jabuka treba rasporediti u 9 sanduka. Koliko kilograma jabuka će biti u svakom sanduku?34. Za prehranu životinja dnevno se potroši $342\frac{6}{7}$ kg sijena. Za koliko dana će biti dovoljne zalihe od 1200 kg?35. Lukin tata je kupio $2\frac{3}{5}$ kg mandarina za $14\frac{3}{10}$ kn. Kolika je cijena 1 kg mandarina?36. Anini roditelji kupuju stan površine $75\frac{4}{5}$ m² za 927 792 kn. Kolika je cijena jednog kvadratnog metra tog stana?37. Vinogradar želi $\frac{189}{2}$ l vina napuniti u boce. U jednu bocu može uliti $\frac{3}{2}$ l. Koliko mu je boca potrebno?38. Lucijina baka je napravila $14\frac{2}{5}$ l soka od malina. Koliko će boca od $\frac{6}{10}$ l napuniti tim sokom?39. Za jedno odijelo je potrebno $3\frac{3}{5}$ m² platna. Koliko odijela se može sašiti od 18 m² tog platna?40. Koliko se vrećica može napuniti od $16\frac{3}{5}$ kg slatkiša, ako u svaku vrećicu stane $\frac{83}{100}$ kg?

1.8. Povezivanje računskih operacija

Lucija i Marko rješavaju isti zadatak, no nisu dobili jednaka rješenja. Tko je točno riješio? Zašto?

Lucija: $\frac{1}{2} + \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1$ Marko: $\frac{1}{2} + \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{6}{2} \cdot \frac{1}{5} = 3 \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$.

Za zadatke u kojima računamo s razlomcima vrijedi uobičajeni redoslijed izvršavanja računskih operacija: **najprije množimo i dijelimo, pa zatim zbrajamo i oduzimamo**. Ako u zadatku **postoje zagrade najprije treba izračunati vrijednost izraza u zagradi ili ukloniti zagradu**.

Primjer 1. Redoslijed računskih operacija

Izračunaj:

a) $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} - \frac{1}{4} : \frac{5}{2}$; b) $\frac{1}{5} \cdot \left(\frac{3}{7} + \frac{4}{9} \right)$;

c) $\frac{1}{3} : \left(\frac{5}{2} - \frac{4}{5} \right) + \frac{1}{11} \cdot 2\frac{3}{4}$.

Rješenje:



Redoslijed računskih operacija

1. \cdot i $:$
2. $+$ i $-$

Riješimo ove zadatke poštujući redoslijed izvršavanja računskih operacija.

a) $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} - \frac{1}{4} : \frac{5}{2} = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} - \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{3}{10} - \frac{1}{10} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

Najprije smo napravili množenje i dijeljenje, a nakon toga oduzimanje. Rezultat smo na kraju još skratili.

b) $\frac{1}{5} \cdot \left(\frac{3}{7} + \frac{4}{9} \right) = \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{27}{63} + \frac{28}{63} \right) = \frac{1}{5} \cdot \frac{55}{63} = \frac{11}{63}$

Najprije računamo zbroj u zagradi, zatim množimo.

Ne zaboravi - zagrada ima prednost



c) $\frac{1}{3} : \left(\frac{5}{2} - \frac{4}{5} \right) + \frac{1}{11} \cdot 2\frac{3}{4} = \frac{1}{3} : \left(\frac{25}{10} - \frac{8}{10} \right) + \frac{1}{11} \cdot \left(2 + \frac{3}{4} \right) =$
 $= \frac{1}{3} : \frac{17}{10} + \frac{1}{11} \cdot \frac{11}{4} = \frac{1}{3} \cdot \frac{10}{17} + \frac{1}{4} = \frac{10}{51} + \frac{1}{4} = \frac{40}{204} + \frac{51}{204} = \frac{91}{204}$

Najprije računamo razliku u zagradi te mješoviti broj zapisujemo u obliku razlomka. Slijedi dijeljenje i množenje, te zbrajanje na kraju.

Primjer 2. Izlučivanje zajedničkog faktora

Koliko je $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}$?

Rješenje:

Izlučivanje zajedničkog faktora

Pri rješavanju tog zadatka možemo upotrijebiti distributivnost, tj. izlučivanje zajedničkog faktora. Zajednički faktor je $\frac{1}{2}$.

$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{4} = \frac{1}{2}$

Ovaj zadatak je bilo najlakše riješiti izlučivanjem zajedničkog faktora jer smo time u zagradi dobili razlomke s jednakim nazivnicama. Zadatak smo mogli riješiti i bez primjene distributivnosti, rezultat bi bio jednak.

Distributivnost množenja prema zbrajanju

$$\frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f} \right) = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f}$$

ili

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f} = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f} \right)$$

Zadaci:

1. Izluči zajednički faktor pa izračunaj:

a) $\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}$; b) $5 \cdot \frac{5}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6}$;
 c) $\frac{2}{5} \cdot \frac{13}{15} + \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{15}$; d) $7 \cdot \frac{4}{3} + 7 \cdot \frac{2}{3}$;

e) $\frac{1}{7} \cdot 4 + 6 \cdot \frac{1}{7} + 11 \cdot \frac{1}{7}$; f) $15 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot 4$;

g) $\frac{1}{5} \cdot \frac{7}{15} + \frac{2}{5} \cdot \frac{7}{15} + \frac{7}{15} \cdot \frac{2}{5}$;

h) $\frac{3}{11} \cdot \frac{2}{3} + \frac{5}{11} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{11} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{11}$.

Primjer 3. Distributivnost

Koliko je $\frac{3}{4} \cdot \left(\frac{4}{5} + \frac{4}{7} \right)$?

Rješenje.

I. način

Riješimo zadatak poštujući pravila redoslijeda računskih operacija.

$$\frac{3}{4} \cdot \left(\frac{4}{5} + \frac{4}{7} \right) = \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{28}{35} + \frac{20}{35} \right) = \frac{3}{4} \cdot \frac{48}{35} = \frac{36}{35}.$$

II. način

Pri rješavanju ovog zadatka možemo upotrijebiti distributivnost.

$$\frac{3}{4} \cdot \left(\frac{4}{5} + \frac{4}{7} \right) = \frac{3}{\cancel{4}_1} \cdot \frac{\cancel{4}^1}{5} + \frac{3}{\cancel{4}_1} \cdot \frac{\cancel{4}^1}{7} = \frac{3}{5} + \frac{3}{7} = \frac{21}{35} + \frac{15}{35} = \frac{36}{35}.$$

Rezultat koji dobivamo jednak je bez obzira na način koji smo odabrali. U ovom primjeru je jednostavnije upotrijebiti distributivnost jer smo pri množenju mogli skratiti, pa je zadatak time pojednostavljen.

Uvijek gledaj kako da što brže točno riješiš zadatak!



Zadaci:

2. Izračunaj tako da najprije izračunaš izraz u zagradi.

a) $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3} \right)$; b) $5 \cdot \left(\frac{2}{5} + \frac{3}{5} \right)$;
 c) $\frac{3}{4} \cdot \left(\frac{4}{15} + \frac{8}{15} \right)$; d) $7 \cdot \left(\frac{4}{14} + \frac{5}{14} \right)$.

3. Izračunaj tako da najprije pomnožiš.

a) $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{5} \right)$; b) $5 \cdot \left(\frac{2}{5} + \frac{3}{10} \right)$;
 c) $\frac{3}{4} \cdot \left(\frac{4}{15} + \frac{8}{5} \right)$; d) $7 \cdot \left(\frac{4}{7} + \frac{5}{14} \right)$.

4. Odaberi jednostavniji način rješavanja.

a) $\frac{7}{2} \cdot \left(\frac{10}{3} + \frac{4}{5} \right)$; b) $5 \cdot \left(\frac{7}{10} + \frac{9}{10} \right)$;

c) $\frac{3}{4} \cdot \left(\frac{4}{9} + \frac{4}{3} \right)$; d) $7 \cdot \left(\frac{11}{21} + \frac{9}{14} \right)$;

e) $\frac{3}{7} \cdot \left(\frac{10}{3} + \frac{4}{3} \right)$; f) $10 \cdot \left(\frac{7}{10} + \frac{3}{5} \right)$;

g) $\frac{11}{17} \cdot \left(\frac{5}{9} + \frac{4}{9} \right)$; h) $18 \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{5}{9} \right)$.

Primjer 4. Distributivnost

Izračunaj:

a) $\frac{1}{6} \cdot \frac{4}{3} - \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3}$;

b) $5 \cdot \left(\frac{5}{7} - \frac{1}{2} \right)$.

Rješenje:

Distributivnost vrijedi i za razliku umnožaka i umnožak razlike.

a) $\frac{1}{6} \cdot \frac{4}{3} - \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{4}{3} - \frac{2}{3} \right) = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{9}$;

b) $5 \cdot \left(\frac{5}{7} - \frac{1}{2} \right) = 5 \cdot \frac{5}{7} - 5 \cdot \frac{1}{2} = \frac{25}{7} - \frac{5}{2} = \frac{50}{14} - \frac{35}{14} = \frac{15}{14}$.

Zadaci:

5. Izračunaj na najjednostavniji način.

a) $\frac{7}{5} \cdot \frac{3}{8} - \frac{7}{5} \cdot \frac{1}{8}$; b) $5 \cdot \frac{5}{6} - 5 \cdot \frac{1}{6}$; c) $\frac{5}{9} \cdot \frac{7}{8} - \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{9}$;
 d) $25 \cdot \frac{11}{15} - 25 \cdot \frac{4}{15}$; e) $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{5}\right)$; f) $15 \cdot \left(\frac{7}{5} - \frac{3}{10}\right)$;
 g) $\frac{3}{4} \cdot \left(\frac{16}{15} - \frac{2}{5}\right)$; h) $7 \cdot \left(\frac{9}{7} - \frac{5}{14}\right)$; i) $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{7}{5} - \frac{2}{5}\right)$;
 j) $15 \cdot \left(\frac{11}{10} - \frac{7}{10}\right)$; k) $\frac{3}{4} \cdot \left(\frac{6}{15} - \frac{2}{15}\right)$; l) $7 \cdot \left(\frac{9}{14} - \frac{5}{14}\right)$.

6. Ana, Luka i njihovi roditelji naručili su veliku pizzu, i svi je zajedno pojeli. Ana je pojela $\frac{1}{4}$ pizze, Luka je pojeo $\frac{3}{8}$ pizze, a mama i tata podijelili su preostali dio pizze jednako.

- a) Nacrtaj kako su podijelili pizzu. Oboji različito dijelove pizze koje su pojeli Ana, Luka, tata i mama.
 b) Tko je pojeo veći dio pizze, Luka ili Ana?
 c) Izrazi razlomkom koliki dio pizze je ostao mami i tati?
 d) Izrazi razlomkom koliki dio pizze je pojeo tata?
 e) Tko je pojeo više, Ana ili mama?

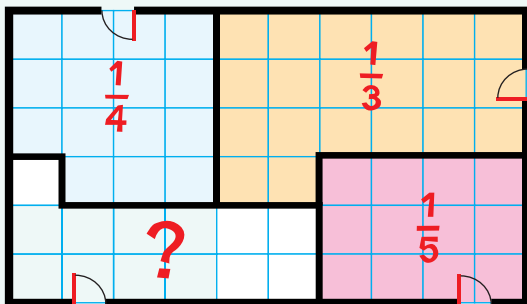
7. Trgovina je naručila 300 kutija čaja. Jedna četvrtina te pošiljke je čaj od kamilice, a tri desetine pošiljke je indijski čaj. Ostalo su razni voćni čajevi. Koliko je kutija pojedine vrste čaja naručila trgovina?



8. Plaća neke osobe iznosi 3480 kuna. Trećinu plaće daje za otplatu kredita, a polovinu za stanarinu i režije. Koliko kuna daje za kredit, a koliko za stanarinu i režije? Koliko mu ostaje?



9. Najam jednog kata zgrade stoji 30 000 kn. Taj kat je podijeljen na četiri stana. Prvi stan ima površinu $\frac{1}{4}$ kata zgrade, drugi $\frac{1}{3}$ kata zgrade, a treći $\frac{1}{5}$ kata zgrade. Koliki dio kata zauzima četvrti stan? Koliku najamninu mora platiti stanar svakog stana, ako iznos najamnine odgovara veličini stana?



10. Od $1200 \frac{3}{4}$ kg jabuka, prvi dan prodano je $345 \frac{1}{2}$ kg, a drugi dan $\frac{2}{5}$ ostatka. Koliko su zaradili u ta dva dana ako je cijena jednog kilograma jabuka $5 \frac{1}{2}$ kn?



11. U jednu kutiju stane 24 boce soka. Kolika je ukupna masa kutije, ako je masa prazne boce $\frac{1}{4}$ kg, masa soka u boci $\frac{7}{10}$ kg i masa prazne kutije $3 \frac{3}{4}$ kg?



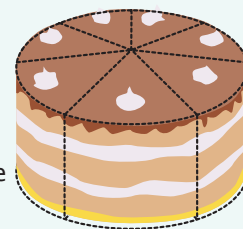
12. Vrt ima oblik pravokutnika duljine $50 \frac{1}{2}$ m i širine $20 \frac{3}{4}$ m. Kolika je površina tog vrta? Ako vrtlar za jedan sat prekopa 25 m^2 vrta, koliko će mu sati trebati da prekopa cijeli vrt?



13. Jedan radnik za 3 sati obradi $52 \frac{1}{4} \text{ m}^3$ drva, a drugi za 5 sati obradi $70 \frac{5}{6} \text{ m}^3$ drva. Koliku količinu drva svaki od njih obradi za 1 sat? Koliku količinu drva bi obradili za 1 sat zajedno?



14. Maja s mamom peče veliku tortu. Za tortu im treba $\frac{1}{2}$ kg brašna, 5 jaja (jedno jaje ima otprilike $\frac{1}{20}$ kg), $\frac{1}{10}$ kg šećera, $\frac{1}{8}$ l mlijeka i $\frac{1}{4}$ kg kakaa.
 a) Kolika će biti masa cijele torte?
 b) Torta će se dijeliti na 7 dijelova. Kolika će biti masa jedne kriške torte?



15. Izračunaj:

a) $\frac{1}{6} \cdot \left(\frac{3}{4} + \frac{5}{12}\right) - \frac{1}{12}$; b) $\left(\frac{9}{5} - \frac{7}{8}\right) \cdot \frac{4}{7} + \frac{3}{7}$; c) $\frac{25}{3} - \frac{13}{10} \cdot \frac{8}{5}$;
 d) $\frac{25}{12} + \frac{13}{18} \cdot \frac{7}{9}$; e) $\frac{2}{5} + \frac{3}{4} - \frac{7}{10}$; f) $\frac{7}{9} \cdot \left(\frac{5}{6} - \frac{4}{7}\right)$;
 g) $\frac{7}{15} \cdot \frac{13}{10} \cdot \frac{9}{5}$; h) $\frac{21}{12} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{17}{3}$.

16. Izračunaj:

a) $\frac{2}{3} \cdot 5 - \frac{5}{7} \cdot 2 \frac{1}{2}$; b) $2 \frac{4}{5} : 7 + \frac{2}{7} : 1 \frac{3}{5} + 2 \cdot \frac{14}{15}$; c) $\frac{4}{9} : \frac{2}{5} + 6 : \frac{4}{5}$;
 d) $\frac{25}{12} - \frac{3}{4} : \frac{5}{6}$; e) $5 : \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right) + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{10} - 2 : \frac{2}{5}$;
 f) $\left(\frac{3}{5} + \frac{1}{4}\right) : \frac{2}{3} + 2 : \frac{4}{5}$; g) $\frac{4}{9} : \left(\frac{2}{5} + 6\right) : \frac{4}{5}$; h) $\frac{25}{12} + 2 \frac{1}{3} - \frac{3}{4} : \frac{5}{6}$.

Vježbalica

1. Izračunaj:

a) $1\frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{2}{5}$; b) $\frac{6}{8} - \frac{9}{4} : 3$; c) $\frac{3}{6} : \frac{8}{9} + 1\frac{7}{16}$;

d) $1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} - \frac{2}{5} + 13 \cdot \frac{1}{20}$.

2. Izračunaj:

a) $\frac{5}{6} + \frac{2}{5} \cdot \frac{15}{8} + \frac{24}{8} : \frac{12}{16} - \frac{7}{12}$;

b) $\left(\frac{5}{6} + \frac{2}{5}\right) \cdot \frac{15}{8} + \frac{24}{8} : \frac{12}{16} - \frac{5}{16}$;

c) $\frac{5}{6} + \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{15}{8} + \frac{24}{8}\right) : \frac{12}{16} + \frac{7}{30}$;

d) $\frac{5}{6} + \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{15}{8} + \frac{24}{8} : \frac{12}{16}\right) - \frac{11}{60}$.

3. Izračunaj:

a) $1\frac{2}{3} + \frac{4}{15} \cdot \frac{12}{16} - \frac{4}{5} : \frac{8}{10}$;

b) $\frac{4}{10} - \frac{3}{9} \cdot \left(\frac{2}{3} - \frac{5}{6}\right) + \frac{7}{9} : 1\frac{3}{7}$;

c) $\frac{3}{5} : \left(2 + \frac{4}{5}\right) - \frac{5}{28} + \frac{3}{35} \cdot \frac{15}{9}$;

d) $\frac{3}{4} + \frac{17}{8} : \left(2\frac{3}{4} - \frac{5}{8}\right)$.

4. Izračunaj:

a) $2\frac{5}{6} + \left[1\frac{4}{5} \cdot \left(2\frac{1}{4} + 2\frac{2}{8} : 9\right) - 1\frac{1}{3}\right]$;

b) $\frac{1}{5} + \left[11\frac{1}{3} : \left(11\frac{1}{3} - 2\frac{2}{3} : 2\right) + 2\frac{7}{15}\right] + 1\frac{2}{5} \cdot 3$;

c) $\frac{7}{12} \cdot 4 + \left[\left(\frac{5}{3} : 6 + 1\right) - \frac{18}{7} : 9\right] : 1\frac{4}{21} - \frac{8}{3}$;

d) $2\frac{3}{5} - \left[1\frac{2}{5} : \left(1 + \frac{5}{6} \cdot 2\right) - \frac{1}{2}\right] + \frac{3}{4} : 5$.

5. Izračunaj:

a) $\frac{7}{8} - \left[\frac{4}{9} \cdot \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{3} : \frac{4}{9}\right) - \frac{1}{8}\right]$;

b) $\left[\frac{13}{7} : \left(\frac{2}{7} - \frac{4}{5} : 8\right) + \frac{2}{7}\right] + \frac{6}{7} \cdot 3$;

c) $\frac{2}{3} \cdot 1\frac{3}{4} + \left[\left(\frac{1}{6} : \frac{4}{9} + 1\frac{3}{8}\right) - 1 : 4\right] : \frac{3}{5}$;

d) $\frac{3}{2} - \left[\frac{13}{8} : \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5}\right) - 1\right] + \frac{1}{5} : \frac{3}{25}$.

6. Izračunaj:

a) $5\frac{2}{3} + \left[\frac{11}{43} \cdot \left(2\frac{1}{3} + 8\frac{2}{3} : 5\frac{3}{6}\right) - \frac{1}{6}\right]$;

b) $\left[\frac{8}{6} : \left(1\frac{11}{12} - \frac{6}{8} : \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}\right] - \frac{13}{5} \cdot \frac{3}{4}$;

c) $\frac{5}{6} \cdot 4 + \left[\left(\frac{2}{7} : 6 + \frac{1}{14}\right) - \frac{3}{2} : 21\right] : \frac{2}{7}$;

d) $\left\{\frac{5}{4} - \left[\frac{9}{8} : \left(\frac{6}{4} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) - \frac{3}{8}\right] + \frac{15}{4} : 15\right\} \cdot \frac{4}{11}$.

1.9. Ponavljanje gradiva

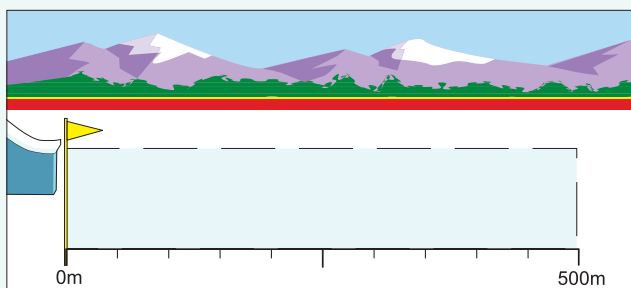
Pitanja za ponavljanje:

- Što znači proširiti razlomak?
- Što znači skratiti razlomak?
- Pri proširivanju dobivamo razlomak koji je:
 - jednak početnom,
 - manji od početnog ili
 - veći od početnog?
- Pri skraćivanju dobivamo razlomak koji je:
 - jednak početnom,
 - manji od početnog ili
 - veći od početnog?
- Za koje računske operacije je potrebno najprije svesti razlomke na zajednički nazivnik?
- Za koje računske operacije ne trebamo zajednički nazivnik?
- Što znači usporediti razlomke?
- Nabroji sve načine uspoređivanja razlomaka.
- Koje razlomke nazivamo pravim, a koje nepravim razlomcima?
- Nabroji tri razlomka koja su jednaka broju 1.
- Je li $\frac{8}{9}$ manji od 1?
- Što je recipročna vrijednost nekog razlomka?
- Koji broj nema recipročnu vrijednost?
- Koliki je umnožak recipročnih brojeva?

15. Za koju računsku operaciju nam je potrebna recipročna vrijednost?
16. Koja svojstva vrijede za:
a) zbrajanje razlomaka;
b) oduzimanje razlomaka;
c) množenje razlomaka;
d) dijeljenje razlomaka?
17. Koliki je umnožak, ako neki razlomak pomnožimo s:
a) 1; b) 0.
18. Koliki je količnik, ako neki razlomak podijelimo s:
a) 1; b) 0.
19. Koje brojeve trebamo pomnožiti da bi umnožak bio:
a) 1; b) 0.
20. Koje brojeve trebamo podijeliti da bi količnik bio:
a) 1; b) 0.

Zadaci za ponavljanje:

1. Usporedi razlomke:
a) $\frac{1}{2}$ i $\frac{2}{3}$; b) $\frac{8}{3}$ i $\frac{9}{5}$; c) $\frac{3}{10}$ i $\frac{5}{7}$; d) $\frac{5}{6}$ i $\frac{10}{12}$.
2. Svedi na najmanji zajednički nazivnik:
a) $\frac{3}{2}$ i $\frac{4}{3}$; b) $\frac{1}{3}$ i $\frac{2}{5}$; c) $\frac{7}{10}$ i $\frac{3}{7}$; d) $\frac{1}{6}$ i $\frac{2}{5}$.
3. Izračunaj:
a) $\frac{3}{2} + \frac{1}{4}$; b) $\frac{7}{6} + \frac{11}{12}$; c) $\frac{11}{15} + \frac{5}{3}$; d) $\frac{2}{3} + \frac{11}{9}$;
e) $\frac{5}{3} - \frac{3}{4}$; f) $\frac{15}{4} - \frac{2}{5}$; g) $\frac{5}{6} - \frac{1}{7}$; h) $\frac{17}{5} - \frac{7}{9}$.
4. Izračunaj:
a) $7 \cdot \frac{1}{4}$; b) $\frac{3}{5} \cdot 10$; c) $17 \cdot \frac{5}{3}$; d) $\frac{5}{9} \cdot 11$;
e) $\frac{5}{7} : \frac{1}{4}$; f) $\frac{7}{10} : \frac{11}{15}$; g) $\frac{17}{12} : \frac{34}{3}$; h) $\frac{7}{9} : \frac{10}{3}$;
i) $0 : \frac{1}{2}$; j) $0 : \frac{17}{5}$; k) $\frac{11}{27} : 1$; l) $\frac{117}{309} : 1$.
5. Skakač je skakao tri puta. Postavi zastavicu na udaljenost do koje je skijaš skočio u pojedinom skoku. Koliko je metara bio dugačak svaki njegov skok? U kojem skoku je najdalje skočio, a u kojem najkraće?
a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{3}{5}$; c) $\frac{3}{10}$.
6. Koliko je grama: a) $\frac{3}{4}$ kg; b) $\frac{13}{25}$ kg.
7. Koliko je minuta: a) $\frac{1}{2}$ sata; b) $\frac{1}{6}$ sata.
8. Izračunaj:
a) $\frac{5}{12} \cdot \frac{6}{15}$; b) $\frac{7}{14} \cdot \frac{42}{21}$; c) $\frac{17}{44} \cdot \frac{55}{34}$; d) $\frac{5}{100} \cdot \frac{50}{20}$.
9. Koliko je:
a) $\frac{3}{7}$ od $\frac{4}{10}$; b) $\frac{2}{5}$ od $\frac{4}{7}$;
c) $\frac{4}{25}$ od $\frac{5}{36}$; d) $\frac{3}{5}$ od $\frac{20}{9}$.
10. Izračunaj:
a) $\frac{7}{5} \cdot \frac{3}{8} - \frac{7}{5} \cdot \frac{1}{8}$; b) $5 \cdot \frac{5}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6}$;
c) $\frac{5}{9} \cdot \frac{7}{8} + \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{9}$; d) $25 \cdot \frac{11}{15} - 25 \cdot \frac{4}{15}$.
11. Izračunaj:
a) $5 \frac{2}{3} + \frac{1}{15}$; b) $\frac{1}{14} + 2 \frac{3}{7}$; c) $\frac{3}{5} + 4 \frac{5}{11}$;
d) $\left(6 \frac{4}{15} - 2 \frac{3}{5}\right) + \left(3 \frac{2}{15} + \frac{5}{9}\right) - \left(3 \frac{2}{9} + 6 \frac{5}{6} - 4 \frac{1}{2}\right)$.
12. Izračunaj:
a) $5 \frac{3}{5} \cdot \frac{14}{4} \cdot 3 \frac{5}{14}$; b) $1 \frac{1}{2} \cdot \frac{25}{7} \cdot 2 \frac{6}{25}$;
c) $3 \frac{7}{9} \cdot 1 \frac{1}{3} \cdot 2 \frac{1}{4}$; d) $2 \frac{5}{9} \cdot 0 \cdot \frac{10}{3}$.
13. Luka i Matija su zajedno rješavali test iz engleskog jezika. Luka je znao riješiti $\frac{7}{10}$ zadataka, a Matija $\frac{1}{5}$ zadataka. Tko je znao riješiti više? Koliko su zajedno znali riješiti? Jesu li znali riješiti cijeli test?

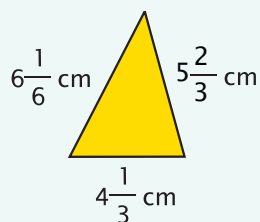


14. Stranice trokuta

imaju duljine

$$4\frac{1}{3} \text{ cm}, 5\frac{2}{3} \text{ cm i } 6\frac{1}{6} \text{ cm.}$$

Izračunaj opseg tog trokuta.



15. Kolika je stranica jednakostraničnog

trokuta kojemu je opseg $\frac{111}{25}$ m?

16. Koliki su opseg i površina pravokutnika sa

stranicama $5\frac{3}{4}$ m i $6\frac{3}{8}$ m?

17. Koliko se vrećica može napuniti od $76\frac{1}{2}$ kg

slatkiša, ako u svaku vrećicu stane $\frac{3}{10}$ kg?

18. Radnici su preradili $\frac{11}{17}$ ukupne količine drva. Koliko im je preostalo za preradu?

19. Vrtlar je prvi dan prekopao $\frac{3}{5}$ vrta, drugi dan $\frac{1}{3}$ vrta. Koliko je prekopao u ta dva dana? Koliko mu još preostaje?

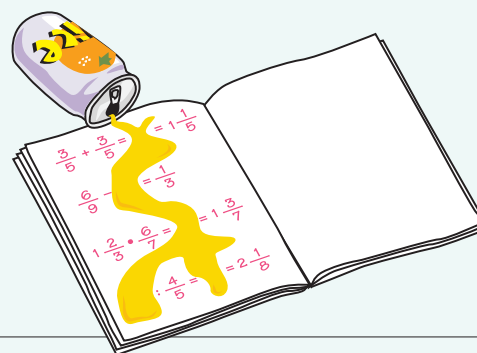
20. Dvije petine učenika neke škole bavi se sportom. Od tih koji se bave sportom njih tri sedmine igraju nogomet. Koliki

dio učenika te škole igra nogomet? Ako u školi ima 805 učenika, koliko njih se bavi sportom. Koliko učenika te škole igra nogomet?

21. Najam jednog kata zgrade stoji

15 000 kn. Taj kat je podijeljen na četiri stana. Prvi stan zauzima trećinu kata zgrade, drugi četvrtinu kata zgrade, a treći petinu kata zgrade. Koliki dio kata zauzima četvrti stan? Koliku najamninu mora platiti stanar svakog stana, ako iznos najamnine odgovara veličini stana?

22. Maja je bila nepažljiva dok je pisala zadaću, pa je prolila sok po bilježnici. Pomogni joj ponovno napisati dijelove zadatka koji su prekriveni mrljama.



Primjerak oglednog testa:

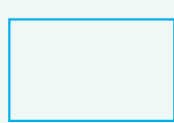
1. Oboji odgovarajući dio lika:

a)



$$\frac{3}{4}$$

b)



$$\frac{5}{8}$$

2. Izračunaj:

a) $\frac{5}{8} + \frac{1}{4} =$

b) $\frac{11}{3} - \frac{3}{2} =$

3. Izračunaj:

a) $\frac{5}{8} \cdot \frac{4}{3} =$

b) $\frac{11}{3} : \frac{11}{2} =$

4. Usporedi zadane razlomke:

a) $\frac{5}{8}$ i $\frac{2}{3}$

b) $\frac{12}{5}$ i $\frac{12}{7}$

5.

a) Koliko je tri osmine od pola metra?

b) Koliko je grama $\frac{1}{4}$ kg?

c) Koliko je minuta $\frac{5}{6}$ sata?

6. Tri računa su točna. Zaokruži ih i napiši odgovarajući postupak rješavanja.

a) $\frac{9}{2} \cdot \frac{4}{7} - \frac{5}{3} = \frac{19}{21}$

d) $\frac{3}{7}$ od $\frac{14}{10}$ je $\frac{6}{10}$

b) $\frac{15}{8} + \frac{1}{8} : \frac{2}{3} = 3$

e) $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

c) $2\frac{5}{9} - 1\frac{7}{12} = 1\frac{2}{3}$

f) $\frac{5}{3} : \frac{1}{10} = \frac{1}{6}$

7. Poredaj razlomke po veličini, počevši s najmanjim $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{13}{9}$.

8. Plaća neke osobe iznosi 4260 kuna. Četvrtinu plaće daje za otplatu kredita, a trećinu za stanarinu i režije. Koliko kuna daje za kredit, a koliko za stanarinu i režije? Koliko mu ostaje?

9. Izračunaj

$$a) 5 : \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2} \right) + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{10} - 2\frac{2}{5}$$

$$b) \left(11\frac{1}{9} + 2\frac{1}{6} \right) : \left(1\frac{1}{10} + 2\frac{3}{5} \right) =$$

10. Zid školske ograde ima oblik pravokutnika s duljinom $21\frac{1}{5}$ m i visinom $3\frac{3}{4}$ m. Do $\frac{3}{4}$ visine zid je potrebno pobožati zelenom bojom, a ostatak plavom bojom.

Koliko je potrebno litara zelene, a koliko plave boje, ako je za 1 m^2 potrebno $\frac{1}{5}$ l boje?

Koliko će koštati bojanje tog zida, ako se plava boja prodaje po 25 kn za 1 l, a zelena boja po 30 kn za 1 l? Osim troškova boje, potrebno je platiti i majstoru. Majstor naplaćuje 25 kn po 1 m^2 .

Igre:

1. Igra kartama - najveći/najmanji

(za Uno karte ili se uzmu obične karte bez onih sa slikama)

Učenici su podijeljeni u parove. Svaki član para izvlači četiri karte od koje slaže dva razlomka. Prva karta je brojnik prvog razlomka, a druga nazivnik prvog razlomka. Treća i četvrta na isti način tvore drugi razlomak.

Dobivene razlomke treba zbrojiti, oduzeti, pomnožiti ili podijeliti, da se dobije što veći rezultat. Pobjednik je onaj koji, među sva 4 rješenja, ima veći rezultat - za to dobiva 5 bodova.

Igra se može igrati tako da se traži što manji rezultat.

2. Igra kartama

(Karte s razlomcima su na CD-u.)

- Sve karte se rasporede na stol. Trebaju se spojiti parovi karata čiji zbroj je 1.
- Isto kao i a, samo što su karte okrenute naopako.
- Karte se podijele među igračima i igra se kao Crni Petar.

Moguće inačice igre: zadana razlika, umnožak ili količnik karata, vuku se dvije karte, pobjeđuje veća/manja.

3. Pizza-majstor

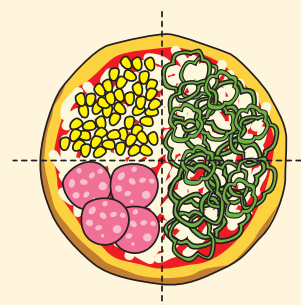
Na raspolaganju je pet vrsta dodataka za pizzu: gljive, šunka, masline, ananas, kukuruz i paprika. Učenici se slože u parove - jedan naručuje pizzu, a drugi je treba nacrtati. Na slici vidite

primjer pizze s dodacima:

$\frac{1}{2}$ pizze s paprikom, $\frac{1}{4}$

pizze sa šunkom i $\frac{1}{4}$

pizze s kukuruzom. Sami birajte sastojke na pizzi!



4. Igra s pločicama domina

Podijelite nasumice pločice domina među učenicima. Pločicu domina uspravite i smatrajte je razlomkom.

Inačice igre:

- Pobjeđuje najveći razlomak.
- Pobjeđuje najmanji razlomak.
- Pobjeđuje razlomak koji je najbliže broju jedan.
- Dobivene pločice treba zbrojiti, oduzeti, pomnožiti i podijeliti - svaki točan rezultat nosi bod.
- Slaganje domina, uz pravilo da se uz pločicu može prisloniti samo manja/veća od nje.

2. Trokut

Važni pojmovi
 kutovi uz
 presječnicu
 kutovi s usporednim
 kracima
 kutovi s okomitim
 kracima
 trokut
 nejednakost trokuta
 zbroj kutova u
 trokutu
 simetrala kuta
 konstrukcije kutova
 sukladnost trokuta
 konstrukcije
 trokuta
 visina trokuta
 opseg i površina
 trokuta



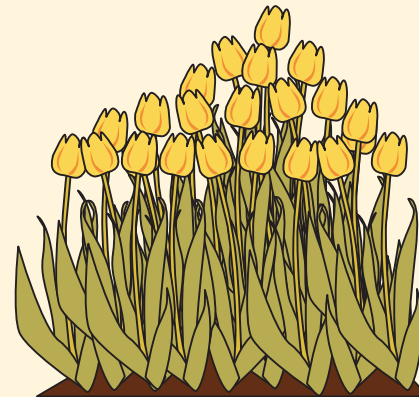
Stup dalekovoda



Zašto nam trebaju trokuti?

Da bismo znali:

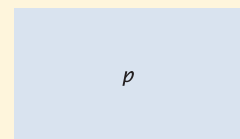
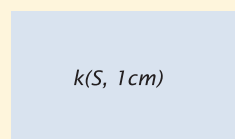
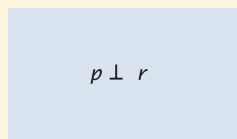
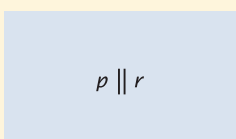
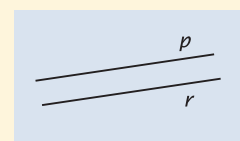
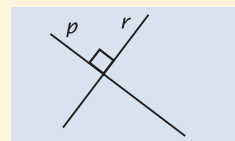
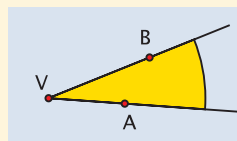
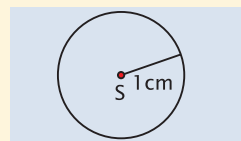
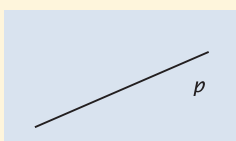
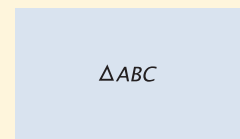
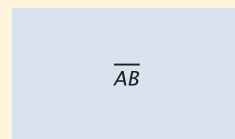
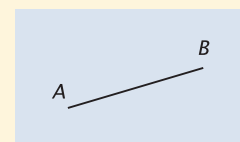
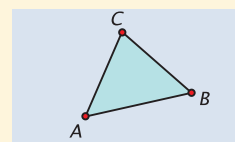
- ✓ nacrtati maminu gredicu za tulipane,
- ✓ izračunati kolika je površina tatinog trokutastog travnjaka,
- ✓ odabrati najkraći put,
- ✓ konstruirati vremenski stroj na papiru pomoću trokuta i šestara,
- ✓ izračunati neku udaljenost preko jezera,
- ✓ izračunati kut i površinu krova.



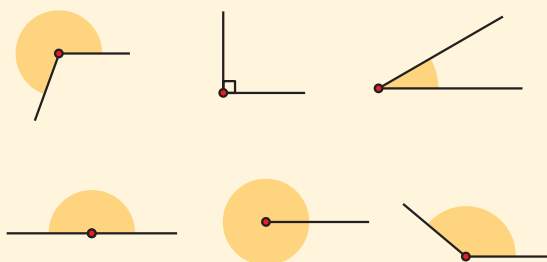
Kratki zadaci za ponavljanje:



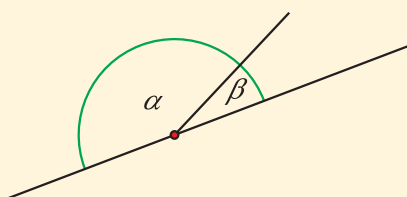
1. Skupovi točaka u ravni imaju matematičke oznake, koje nam pomažu da ih brže pamtimo i da lakše s njima baratamo. Spoji parove:



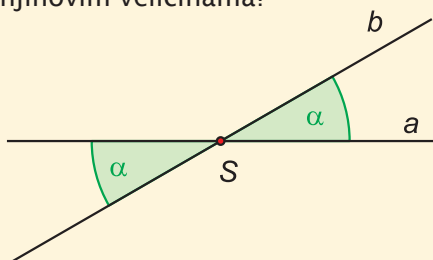
2. Napiši koje je vrste pojedini kut na slici, pa ih poredaj po veličini.



3. Kako nazivamo kutove na slici? Što znaš o njihovim veličinama?

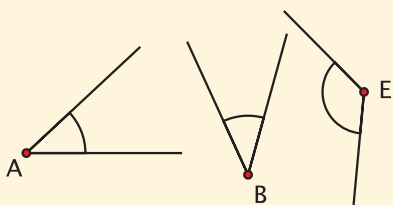


4. Kako nazivamo kutove na slici? Što znaš o njihovim veličinama?



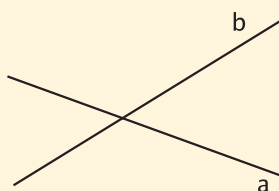
5. Čime mjerimo kutove? Koja je mjerna jedinica za veličinu kuta?

6. Izmjeri kutove na slici.



7. Koliko kutnih minuta ima 1° ?

8. Označi presjek pravaca i sve kutove na slici.



LAKO JE BILO DOJURITI ZA MAČKOM GORE, A KAKO ČU SAD DOLJE? VIDI KAKO JE STRMO!

8. Nabroji vrste trokuta obzirom na duljine stranica.

9. Nabroji vrste trokuta obzirom na veličine kutova.

10. Nacrtaј neki pravokutan trokut. Kako se zovu pojedine stranice? Izmjeri duljine svih stranica pa mu izračunaj opseg i površinu.

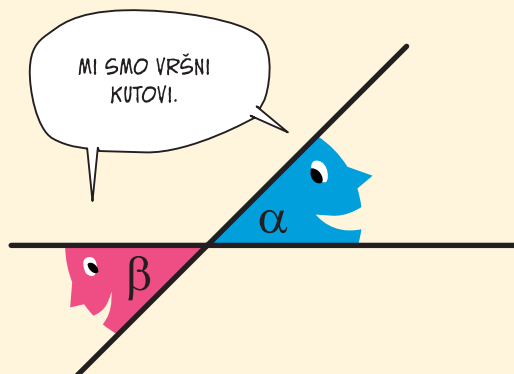
11. Nacrtaј jednakostraničan trokut sa stranicama 4 cm. Izračunaj mu opseg.

12. Nacrtaј neki jednakokračan trokut. Kako se zovu pojedine stranice? Izmjeri duljine svih stranica pa mu izračunaj opseg.

13. Nacrtaј kutove zadanih veličina pomoću kutomjera, a zatim napiši koje su vrste.

- a) 60° ;
- b) 90° ;
- c) 100° ;
- d) 130° ;
- e) 16° ;
- f) 180° ;
- g) 200° ;
- h) 250° ;
- i) 330° ;
- j) 360° .

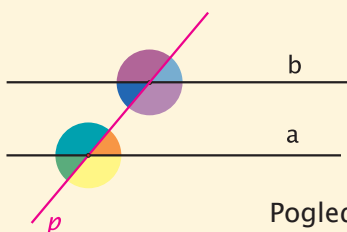
2.1. Kutovi uz presječnicu



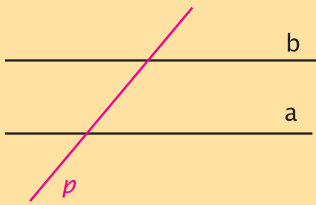
Prisjeti se: Koje kutove zovemo susjedni, a koje vršni kutovi? Što vrijedi za njihove veličine?



Presječnica



Važno



Neka su a i b usporedni pravci. Za pravac p koji siječe pravce a i b kažemo da je njihova presječnica.

Kutovi koje zatvaraju presječnica i usporedni pravci nazivaju se kutovima uz presječnicu.

Pogledaj sliku i prebroji koliko ima kutova uz presječnicu.

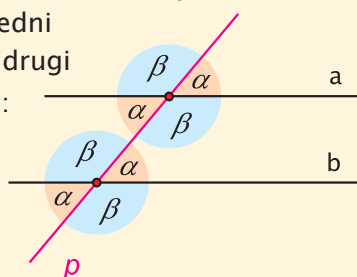
Primjer 1. Jednaki kutovi uz presječnicu

Nacrtaj usporedne pravce a i b , te njihovu presječnicu p . Označi sve kutove uz presječnicu. Zatim oboji istom bojom sve kutove uz presječnicu koji su jednakih veličina.

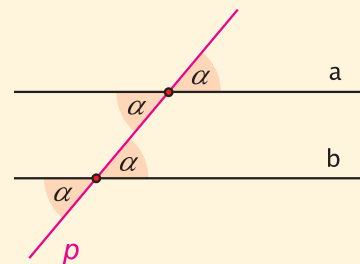
Rješenje:

Nacrtajmo sliku i pronađimo na njoj kutove uz presječnicu. Lako ćemo prepoznati susjedne i vršne kutove koje čine pravci a i p , a zatim i među pravcima b i p . Iako ih ima osam, primijetimo da se radi o samo dvije vrste kutova. Na slici su jedni označeni plavom, a drugi narančastom bojom:

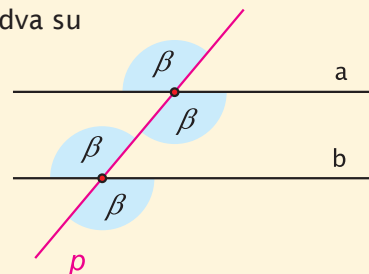
Jednaki kutovi uz presječnicu



Ova slika pomoći će nam da dođemo do još nekih važnih zaključaka. Istaknimo na njoj neke kutove i pogledajmo kakvi su međusobno. Označimo li veličinu narančastih kutova s α , vidimo da se uz presječnicu pojavljuju četiri kuta veličine α : dva po dva su vršni kutovi.

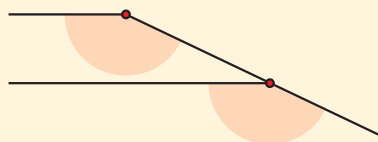


Označimo li veličinu plavih kutova s β , vidimo da se uz presječnicu pojavljuju četiri kuta veličine β : dva po dva su vršni kutovi.



Primjer 2.

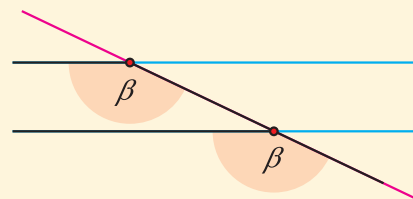
Jesu li nacrtani kutovi jednake veličine?

**Rješenje:**

Na ovoj slici su nacrtani kutovi uz presječnicu.

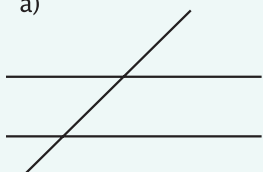
Docrtajmo dio slike koji nedostaje da nam bude jednostavnije riješiti zadatak.

Vidimo da se radi o dva, od četiri, jednaka kuta uz presječnicu.

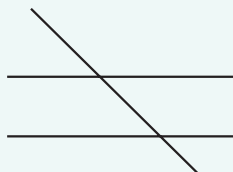
**Zadaci**

1. Pobočaj jednake kutove istom bojom.

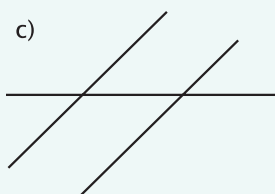
a)



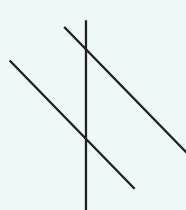
b)



c)



d)

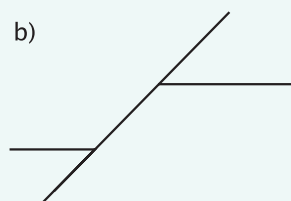


2. Docrtaj dio koji nedostaje i pobočaj jednake kutove istom bojom.

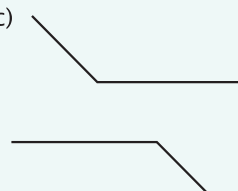
a)



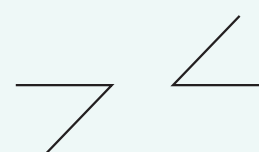
b)



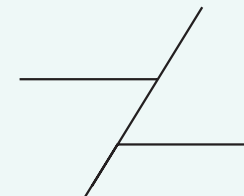
c)



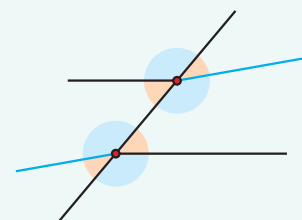
d)



3. Matija je rješavao zadatak za domaću zadaću. Crtež treba prikazivati kutove uz presječnicu. Docrtaj dio koji nedostaje i pobočaj jednake kutove istom bojom.



Pogledaj Matijino rješenje ovog zadatka. U čemu je pogriješio?

**Primjer 3.****Susjedni kutovi uz presječnicu**

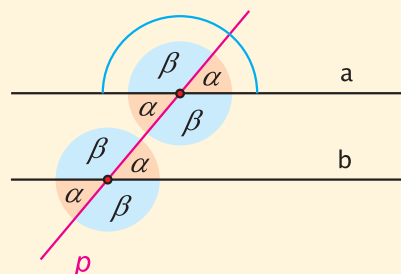
Susjedni kutovi uz presječnicu

Pogledajmo ponovno sliku sa svim kutovima uz presječnicu. Pogledamo li jedan par kutova α i β uz pravac a, vidimo da

su to susjedni kutovi.

Susjedni kutovi zajedno čine ispruženi kut, pa vrijedi

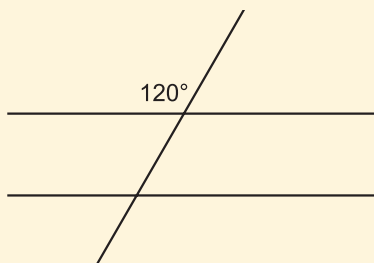
$$\alpha + \beta = 180^\circ$$



Dakle, znamo li veličinu jednog kuta uz presječnicu, znamo i veličine svih ostalih kutova uz nju.

Primjer 4. Računanje kutova uz presječnicu

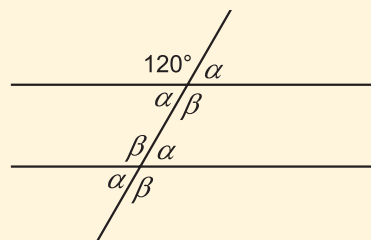
Izračunaj ostale kutove sa slike.



Rješenje:

Označimo veličinu zadanog kuta s β . S obzirom na to da se radi o kutovima uz presječnicu, postoji još samo jedna veličina

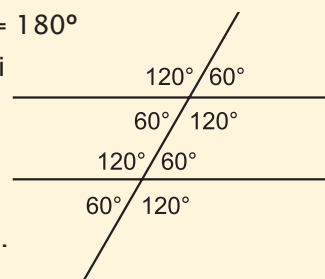
kuta, pa nju označimo s α . Označimo li jednake kutove na slici, dobivamo:



Svi kutovi β iznose 120° . Kut α je susjedan kutu β i vrijedi $\alpha + \beta = 180^\circ$

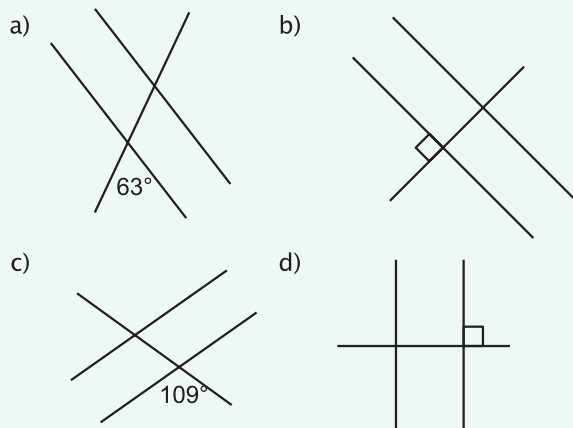
Kut α ćemo izračunati tako da od 180° oduzmemo veličinu zadanog kuta β .

$$\alpha = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ.$$

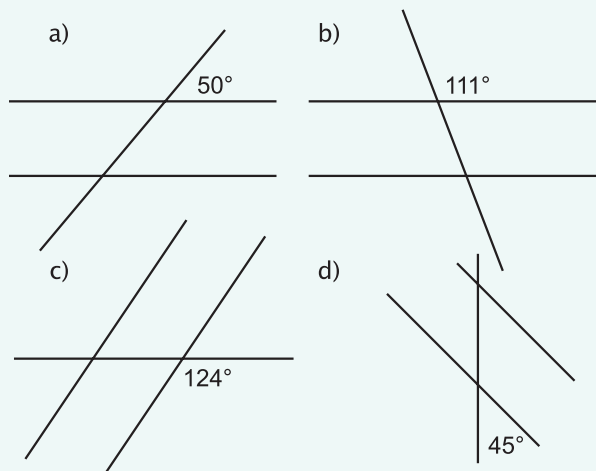


Zadaci

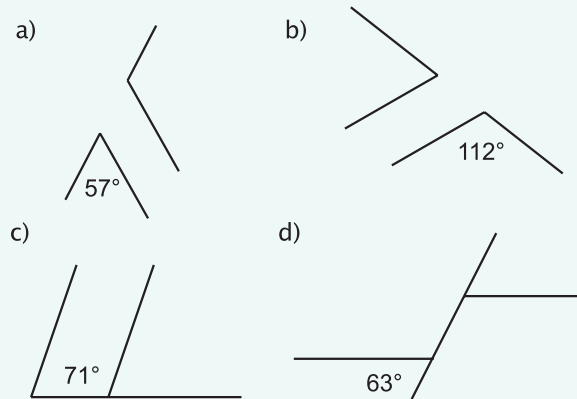
4. Izračunaj ostale kutove uz presječnicu.



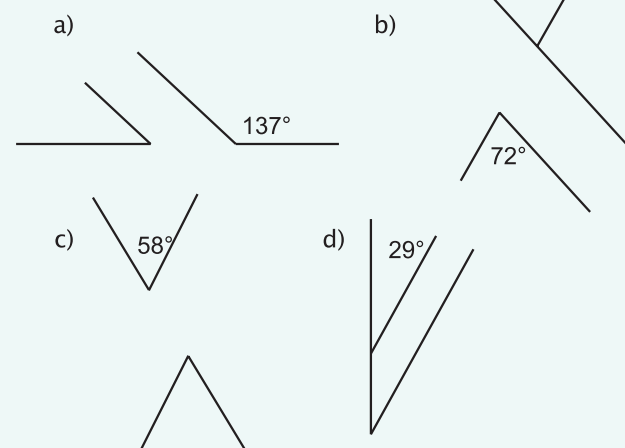
5. Izračunaj ostale kutove uz presječnicu.



6. Docrtaj dio slike koji nedostaje i izračunaj ostale kutove uz presječnicu.

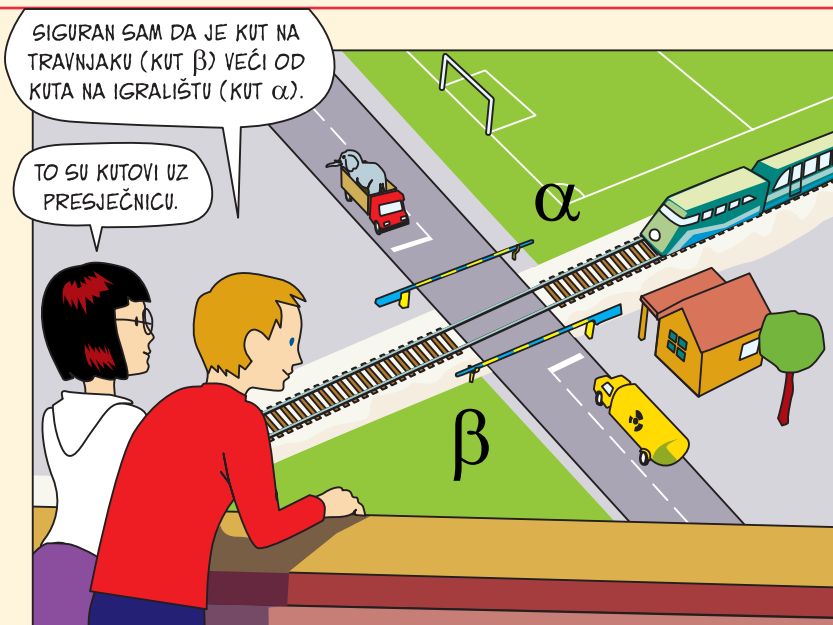


7. Docrtaj dio slike koji nedostaje i izračunaj ostale kutove uz presječnicu.



2.2. Kutovi s usporednim i okomitim kracima

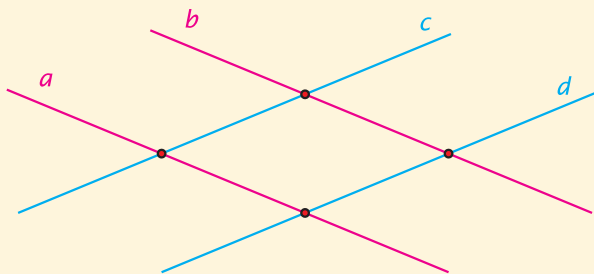
Ana i Luka su gledali kroz prozor svog stana na raskrižje željezničke pruge i ceste.



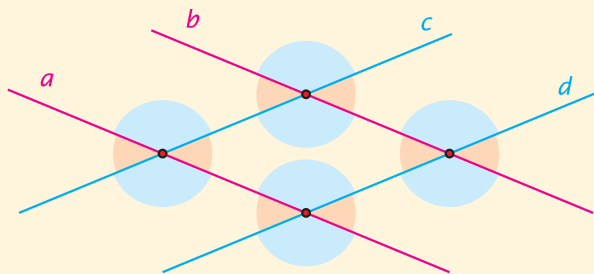
Kakvi su to kutovi uz presječnicu o kojima Ana priča? Prisjeti se što vrijedi za veličine takvih kutova.

Primjer 1. Dvije presječnice.

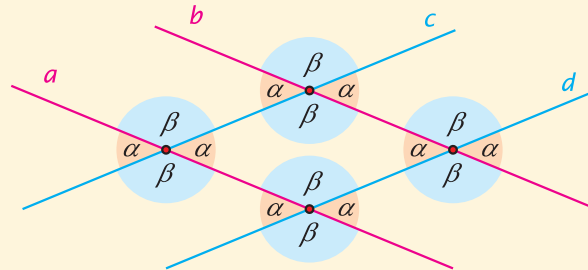
Na slici su nacrtana dva para usporednih pravaca, takva da vrijedi $a \parallel b$ i $c \parallel d$.



Pravci a i b su presječnice pravaca c i d . Pravci c i d su presječnice pravaca a i b . Sve što smo dosad naučili o presječnici možemo primijeniti i na ovu sliku.

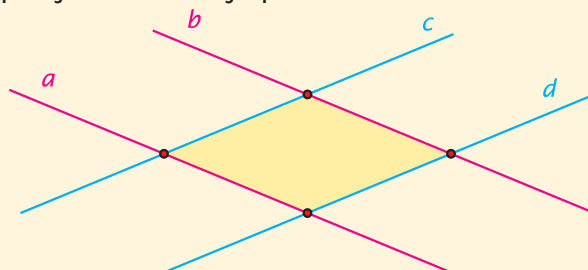


Vidimo da je s dvije usporedne presječnice određeno 16 kutova, i to dva puta po osam jednakih kutova. Pritom su kutovi α i β susjedni kutovi.



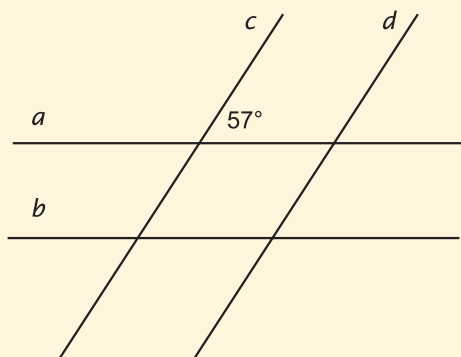
Dvije presječnice

Dakle, kutovi koje određuju dvije presječnice su ili jednaki ili im je zbroj 180° . Prepoznajete li četverokut koji se vidi na presjeku tih četiriju pravaca?



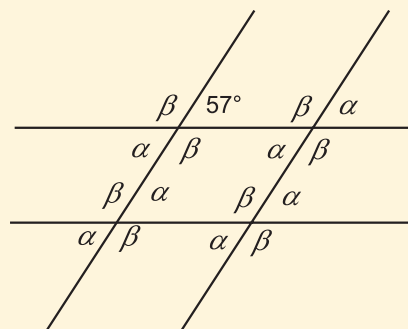
Primjer 2.
Kutovi uz dvije presječnice

Izračunaj ostale kutove na slici. Za nacrtane pravce vrijedi: $a \parallel b$ i $c \parallel d$.



Rješenje:

Najprije označimo sve jednake kutove na slici. Zadani kut označimo s α , a njemu susjedni s β .



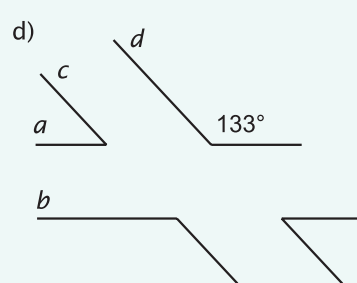
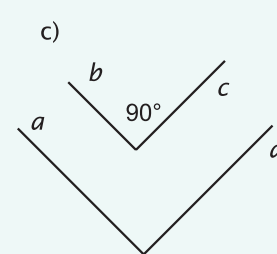
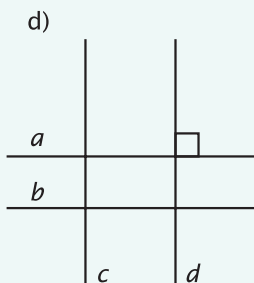
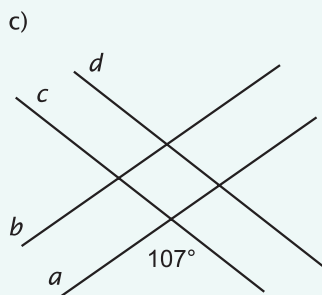
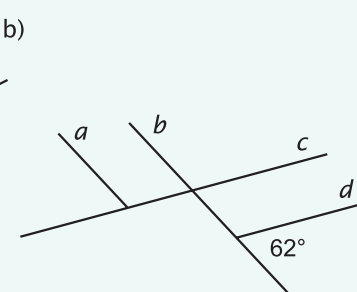
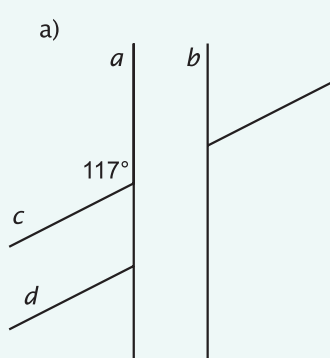
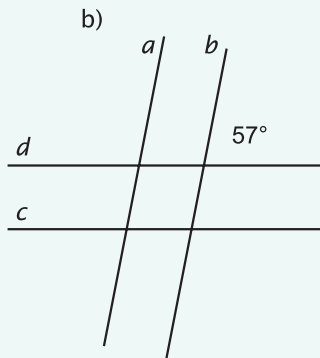
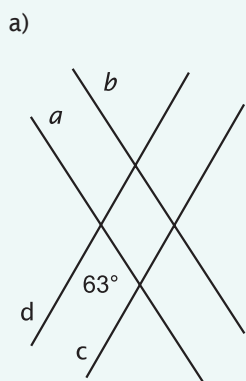
Svi kutovi α iznose 57° . Kut β je susjedan kutu α , te vrijedi $\alpha + \beta = 180^\circ$.

Kut β ćemo izračunati tako da od 180° oduzmemo veličinu zadanog kuta α .

$$\beta = 180^\circ - 57^\circ = 123^\circ$$

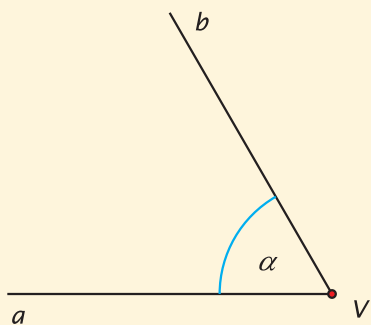
Zadaci

1. Izračunaj ostale kutove na slici. Za nacrtane pravce vrijedi: $a \parallel b$ i $c \parallel d$.



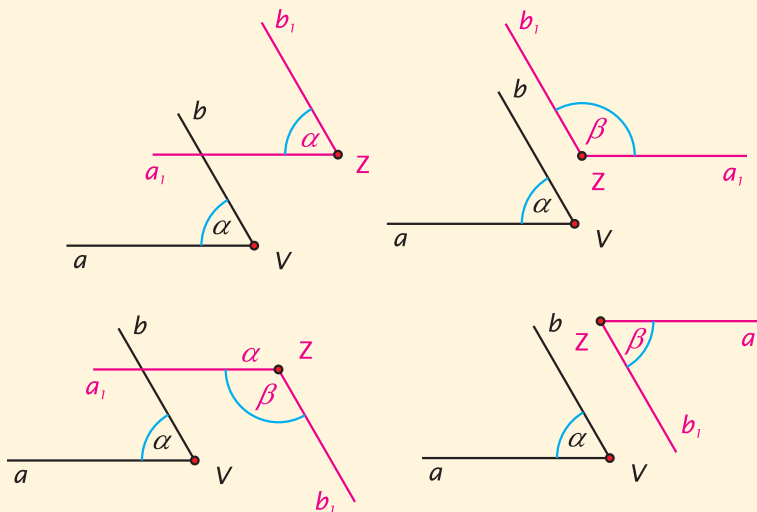
Primjer 3. Kutovi s usporednim kracima

Na slici je nacrtan kut α s vrhom u točki V i kracima a i b . Nacrtaj kut β kojemu je vrh u točki Z , a krakovi su mu usporedni s kracima a i b .



Rješenje:

Ovaj zadatak možemo riješiti na četiri

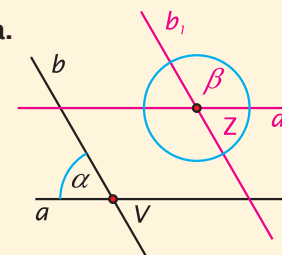


Važno

Šiljasti ili tupi kutovi s usporednim kracima su ili jednaki ili im je zbroj 180° .

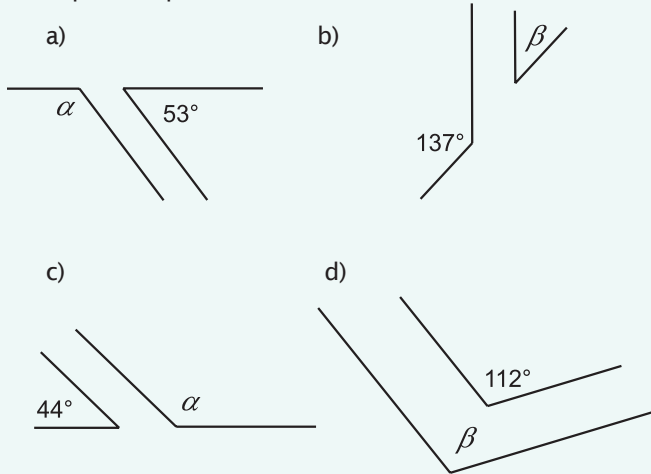
načina: Na svakoj slici kutovi α i β imaju usporedne krakove, pa kažemo da su to **kutovi s usporednim kracima**.

Produljimo li krakove a , b , a_1 i b_1 tako da dobijemo pravce, primijetit ćemo da dobivamo dva para usporednih pravaca kao u primjeru 1.

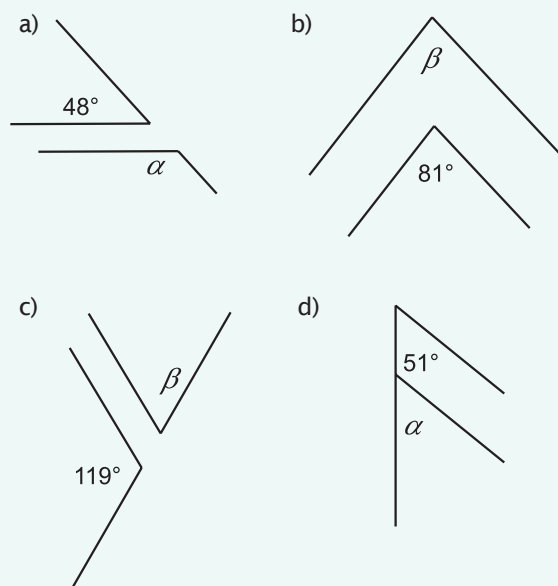


Zadaci

3. Odredi veličine kutova s usporednim kracima. Ako želiš, doctaj najprije sliku tako da se vide usporedni pravci.



4. Odredi veličine kutova s usporednim kracima.

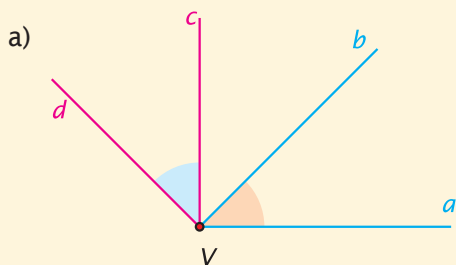


Primjer 4. Kutovi s okomitim kracima

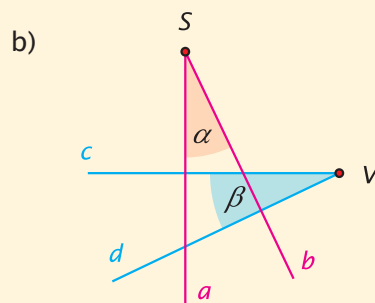
Nacrtajmo kutove s okomitim kracima i pogledajmo što možemo reći za njihove veličine.

Rješenje:

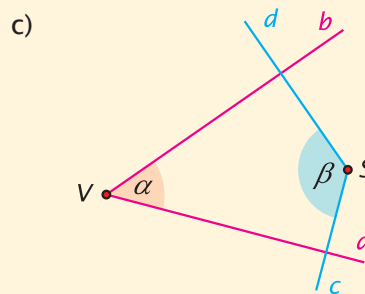
Postoji nekoliko mogućnosti za položaj takvih kutova. Izmjeri kutove α i β u svakom primjeru. U svim primjerima kut α omeđen je kracima a i b . Kut β je omeđen kracima c i d . Za krakove obaju kutova vrijedi $a \perp c$ i $b \perp d$.



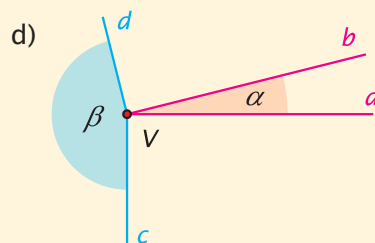
Kutovi α i β su jednaki.



Kutovi α i β su jednaki



Zbroj kutova α i β je 180° .



Zbroj kutova α i β je 180° .

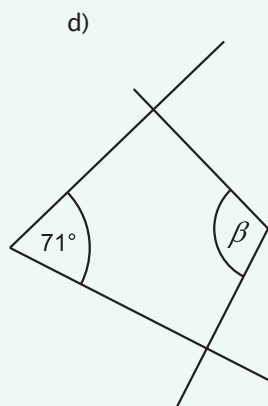
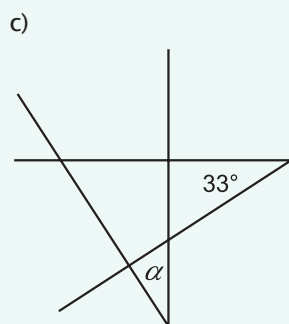
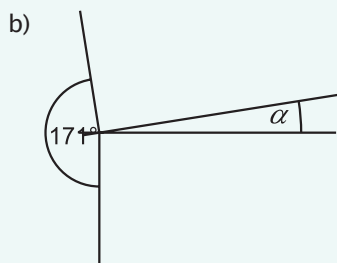
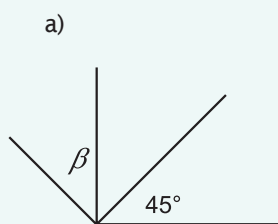


Važno

Šiljasti ili tupi kutovi s okomitim kracima su ili jednaki ili im je zbroj 180° .

Zadaci

5. Odredi veličine kutova s okomitim kracima.



6. Nacrtaj dva kuta s usporednim kracima tako da njihove veličine budu:

- jednake;
- da im zbroj veličina bude 180° .

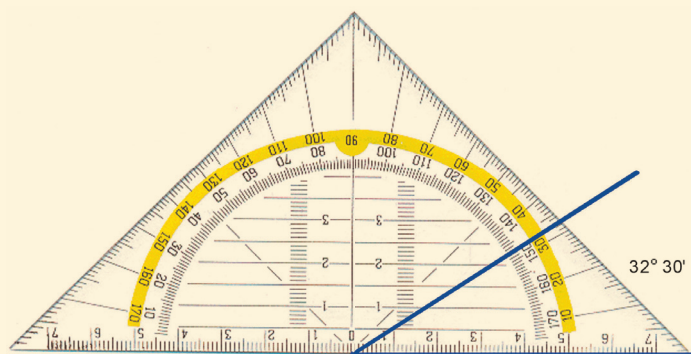
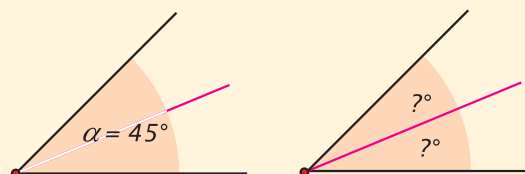
7. Nacrtaj dva kuta s okomitim kracima tako da njihove veličine budu:

- jednake;
- da im zbroj veličina bude 180° .

2.3. Računanje s veličinama kutova

Prepolovimo kut od 45°

Kut od 45° sa slike je podijeljen na dva jednaka dijela. Koliko stupnjeva ima svaki taj dio?



Pokušamo li podijeliti kut od 65° na dva jednaka dijela, kutovi koje ćemo dobiti ne mogu se izraziti prirodnim brojevima ako ih želimo izmjeriti u stupnjevima. Znamo da je $65 : 2 = 32.5$, to znači: “32 cijela stupnja i još pola stupnja”. Slično kao na ravnanu, tih “pola stupnja” se nalazi točno na polovici između 32° i 33° .

Vidimo da nam za kutove trebaju i manje mjerne jedinice osim stupnjeva. To su **kutne minute (oznaka: ')**.

Važno

Jedan stupanj sadrži 60 kutnih minuta.

$$1^\circ = 60'$$



Pogledajmo na slici kut od 1° i zamislimo da je podijeljen na 60 dijelova, na 60 kutnih minuta. Ako jedan stupanj sadrži $60'$, onda pola stupnja sadrže $30'$. Dakle, decimalni

broj 32.5° možemo zapisati kao $32^\circ 30'$.

$32.5^\circ = 32^\circ 30'$. Čitamo: “32.5 stupnja je jednako 32 stupnja i 30 kutnih minuta”.

Primjer 1.

Pretvaranje stupnjeva u kutne minute

Zadan je kut $\alpha = 34^\circ$. Koliko u tom kutu ima kutnih minuta?

$$1^\circ = 60'$$

Rješenje:

Ako je u jednom stupnju sadržano $60'$, onda je u 34° sadržano $34 \cdot 60$ kutnih minuta. Kako je $34 \cdot 60' = 2040'$, zaključujemo da je $\alpha = 34^\circ = 2040'$.

Primjer 2. Pretvaranje kutnih minuta u stupnjeve

Zadan je kut $\beta = 8700'$. Koliko stupnjeva ima kut β ? Kojoj vrsti pripada?

Rješenje:

Ako $60'$ čini 1° , onda $120'$ čini 2° , $180'$ čini 3° , $240'$ čini 4° itd. Pitamo se koliko stupnjeva čini $8700'$. Podijelit ćemo $8700' : 60 = 145^\circ$. Zaključujemo da je $\beta = 8700' = 145^\circ$. Kut β je tupi kut.

Primjer 3. Pravilno zapisivanje veličine kuta

Zadani su kutovi:

$$\alpha = 30^\circ 60'$$

$$\beta = 120^\circ 83'$$

U zapisu ovih kutova nešto "nije u redu". Što?
Pravilno zapiši kutove α i β .



Rješenje:

Kut α ima 30° i $60'$. No, znamo da je $60' = 1^\circ$.
To znači da kut α ima 30° i još 1° . Zapravo,
 $\alpha = 30^\circ + 1^\circ = 31^\circ$.

$$30^\circ \underbrace{60'}_{1^\circ} = 30^\circ + 1^\circ = 31^\circ$$

Na isti način postupimo i za kut β . On ima $83'$.
To je opet više od 1° jer je:

$$83' = \underbrace{60'}_{1^\circ} + 23' = 1^\circ 23'$$

Stoga kut β iznosi:

$$\beta = 120^\circ 83' = 120^\circ + 1^\circ + 23' = 121^\circ 23'$$

Sada možemo odgovoriti što sa zapisima zadanih kutova nije bilo "u redu": kutne minute su prelazile $60'$. Tada ih pretvaramo u stupnjeve, a ostatak zapisujemo u obliku kutnih minuta.

Mjerna jedinica manja od kutne minute naziva se kutna sekunda.
Jedna kutna minuta sadrži 60 kutnih sekundi.
 $1' = 60''$

Zadaci

1. Pretvori u kutne minute: 13° , 60° , 139° , 344° , 360° .
2. Pretvori u kutne minute: $12^\circ 1'$, $44^\circ 44'$, $53^\circ 59'$.
3. Pretvori u stupnjeve: $120'$, $600'$, $5400'$, $3000'$.
4. Pretvori u stupnjeve: $61'$, $84'$, $122'$, $435'$, $504'$, $905'$.
5. Zapiši na valjan način: $12^\circ 63'$, $54^\circ 70'$, $45^\circ 88'$, $23^\circ 120'$, $54^\circ 135'$.

Primjer 4. Zbrajanje kutova

Zadani su kutovi: $\alpha = 12^\circ 33'$ i $\beta = 100^\circ 40'$.
Koliko je $\alpha + \beta$?

Rješenje:

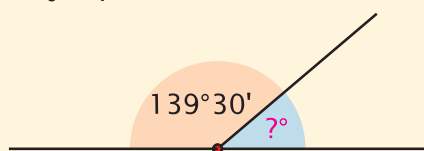
Potpišimo jednu veličinu ispod druge i zbrojimo. Zbrajamo posebno stupnjeve sa stupnjevima, a kutne minute s kutnim minutama.

$$\begin{array}{r} 12^\circ 33' \\ +100^\circ 40' \\ \hline 112^\circ 73' \end{array}$$

Zbrajanjem smo dobili veličinu $112^\circ 73'$.
Primijetimo da kutne minute prelaze $60'$, stoga rješenje možemo zapisati kao $113^\circ 13'$.

Primjer 5. Oduzimanje kutova

Izračunaj nepoznati kut sa slike:



Rješenje:

Na slici vidimo da poznati kut iznosi $139^\circ 30'$. Također, na slici vidimo da poznati i nepoznati kut zajedno čine ispruženi kut, tj. 180° . Zaključujemo da ćemo veličinu nepoznatog kuta dobiti oduzimanjem $180^\circ - 139^\circ 30'$. Potpišemo li jednu veličinu

ispod druge, primijetit ćemo da ne možemo oduzeti kutne sekunde:

$$\begin{array}{r} 180^\circ 00' \\ - 139^\circ 30' \\ \hline 00' \end{array}$$

Umjesto 180° napiši $179^\circ 60'$.

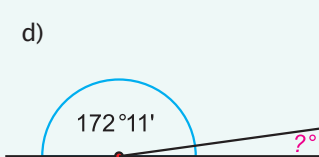
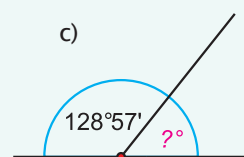
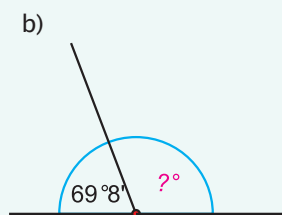
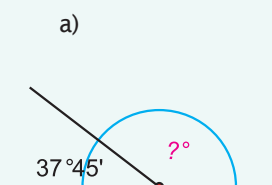
Zato broj 180° zapišimo u obliku $179^\circ 60'$ i oduzmimo:

$$\begin{array}{r} 179^\circ 60' \\ - 139^\circ 30' \\ \hline 40^\circ 30' \end{array}$$

Nepoznati kut iznosi $40^\circ 30'$.

Zadaci

6. Odredi nepoznate kutove sa slika:



7. Izračunaj:

- $23^\circ 56' + 11^\circ 1'$;
- $23^\circ 56' + 1^\circ 11'$;
- $113^\circ 6' + 1^\circ 53'$;
- $45^\circ 45' + 45^\circ 45'$;
- $300^\circ 13' + 54^\circ 40'$;
- $23^\circ + 145^\circ 17'$.

8. Izračunaj:

- $23^\circ 56' - 11^\circ 1'$;
- $123^\circ 6' - 110^\circ 4'$;
- $212^\circ 46' - 59^\circ 59'$;
- $72^\circ - 49^\circ 15'$;
- $102^\circ 26' - 101^\circ 31'$;
- $270^\circ 12' - 25^\circ$.

9. Izračunaj:

- $144^\circ 36' + 36^\circ 36'$;
- $81^\circ 17' - 41^\circ 21'$;
- $200^\circ - 5'$;
- $31^\circ 54' + 27^\circ 16'$;
- $77^\circ + 151^\circ 59'$;
- $122^\circ 46' - 101^\circ 10'$.

10. Od zbroja kutova $131^\circ 46'$ i $144^\circ 36'$ oduzmi $14^\circ 3'$.

11. Od zbroja kutova $204^\circ 12'$ i $56^\circ 46'$ oduzmi njihovu razliku.

12. Ako je $\alpha = 73^\circ 31'$ i $\beta = 44^\circ 36'$, koliko je:




- $\alpha + \beta$;
- $\alpha - \beta$;
- $\alpha + 144^\circ 36' - 22^\circ 54'$.

Primjeri računanja kutova pomoću džepnog računala

Napomena: U primjerima je opisano korištenje jednog modela džepnog računala. Na drugim modelima oznake na tipkama i postupci računanja mogu biti drugačiji.

Primjer 6. Mod rada za stupnjeve

Džepno računalo ima tri različita moda za rad s kutovima: DEG, RAD i GRD. Zapravo se radi o tri različite mjerne jedinice za veličine kutova: stupnjevi, radijani i gradi. Za osnovnoškolsku matematiku biti će vam potrebni samo stupnjevi.

Mod rada mijenjate tako pritisnete tipku  i strelicama  ili  se pomaknete na










željeni mod. Da bismo na džepnom računalu mogli računati sa stupnjevima, minutama i sekundama potrebno je da računalo bude u modu DEG (Degree –engl. stupanj). Prije rješavanja sljedećih primjera provjerite piše li vam na donjem dijelu zaslona džepnog računala DEG. Ako piše RAD ili GRAD morate najprije promijeniti mod u DEG.



 DRG





promjena moda

Primjer 7. Unošenje veličine kuta u stupnjevima, minutama i sekundama

Želimo napisati $45^{\circ} 13' 55''$.

1. Utipkajte broj stupnjeva  
2. Da biste stavili oznaku za stupnjeve pritisnite tipku  pa tipku 
3. Utipkajte broj minuta  
4. Da biste stavili oznaku za minute pritisnite tipku  pa strelicom  pomaknite pokazivač na oznaku ' i pritisnite tipku 

5. Utipkajte broj sekundi  





6. Da biste stavili oznaku za sekunde pritisnite tipku  pa strelicom  pomaknite pokazivač na oznaku " i pritisnite tipku 
- U prvom retku zaslona zapisana je veličina kuta u obliku $45^{\circ} 13' 55''$. Ukoliko pritisnete tipku  u drugom retku zaslona ćete dobiti decimalni zapis tog broja tj. 45.2319444.

 kut

Primjer 8. Zapisivanje decimalnog broja u obliku stupnjeva, minuta i sekundi

Prilikom računanja s veličinama kutova džepno računalo rezultate zapisuje u obliku decimalnog broja. Nakon toga je potrebno taj decimalni broj zapisati u obliku stupnjeva, minuta i sekundi.

1. Utipkajte decimalni broj 45.5

2. Za dobivanje zapisa u stupnjevima, minutama i sekundama pritisnite tipku 
 3. Pritiskom na strelicu  pomaknite pokazivač jedno mjesto ulijevo na **>DMS**
 4. Pritisnite tipku . U prvom retku zaslona bit će napisano **Ans > DMS**
 5. Pritisnite tipku 
- U drugom retku zaslona bit će napisan rezultat $45^{\circ} 13' 55''$.

Primjer 9.

Računanje s veličinama kutova

Želimo izračunati veličinu trećeg kuta trokuta za koji su zadani kutovi $\alpha = 56^\circ 44'$ i $\beta = 21^\circ 12' 33''$. Da bismo izračunali kut γ moramo od 180° oduzeti zadane kutove.

Dakle, računamo $180^\circ - 56^\circ 44' - 21^\circ 12' 33''$.

1. Utipkajte 1 8 0 i oznaku za stupnjeve



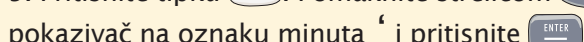
2. Pritisnite tipku $-$

3. Utipkajte broj stupnjeva prvog kuta 5 6



4. Utipkajte broj minuta prvog kuta 4 4

5. Pritisnite tipku \circ / \prime . Pomaknite strelicom pokazivač na oznaku minuta ' i pritisnite



6. Pritisnite tipku $-$

7. Utipkajte broj stupnjeva drugog kuta 2



8. Utipkajte broj minuta drugog kuta 1 2

9. Pritisnite tipku \circ / \prime . Pomaknite strelicom pokazivač na oznaku minuta ' i pritisnite

10. Utipkajte broj sekundi drugog kuta 3 3

11. Pritisnite tipku \circ / \prime . Pomaknite strelicom

12. Pritisnite tipku \circ / \prime . Pomaknite strelicom pokazivač na oznaku sekundi '' i pritisnite

13. Da biste dobili rezultat u obliku stupnjeva, minuta i sekundi pritisnite tipku \circ / \prime

14. Pritiskom na strelicu \leftarrow pomaknite pokazivač jedno mjesto ulijevo na **>DMS**

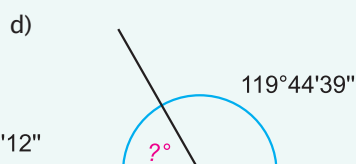
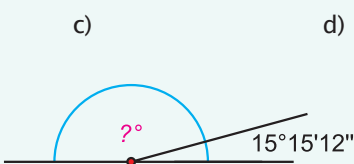
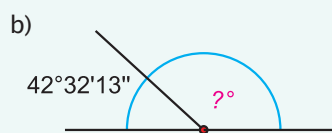
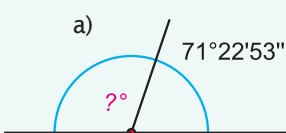
15. Pritisnite tipku \circ / \prime . U prvom retku zaslona bit će napisano **Ans > DMS**

16. Pritisnite tipku \circ / \prime . U drugom retku zaslona bit će napisan rezultat $102^\circ 3' 27''$.

Zadaci

Najprije procijeni rezultat, a zatim izračunaj koristeći džepno računalo.

1. Odredi nepoznate kutove sa slika:



2. Izračunaj:

- a) $223^\circ 56' + 41^\circ 16'$; b) $87^\circ 6' + 34^\circ 11' 43''$;
 c) $283^\circ 16' 44'' + 1^\circ 3' 17''$; d) $54^\circ + 54^\circ 45' 54''$;
 e) $150^\circ 13' 45'' + 4^\circ 46'$; f) $3^\circ 51' 55'' + 245^\circ 47'$.

3. Izračunaj:

- a) $63^\circ 16' - 21^\circ 1' 33''$; b) $98^\circ 6' 42'' - 71^\circ 4'$;
 c) $112^\circ 46' - 99^\circ$; d) $172^\circ - 59^\circ 25' 44''$;
 e) $178^\circ 36' - 101^\circ 52' 16''$; f) $275^\circ 42' 13'' - 125^\circ$.

4. Izračunaj:

- a) $49^\circ 56' 13'' + 26^\circ 36' 31''$; b) $181^\circ 17' - 141^\circ 2' 7''$;
 c) $360^\circ - 15''$; d) $131^\circ 4' 21'' + 7^\circ 6' 8''$;
 e) $37^\circ 45' + 51^\circ$; f) $122^\circ 6' 31'' - 1^\circ 1' 1''$.

5. Od zbroja kutova $111^\circ 6'$ i $49^\circ 6' 12''$ oduzmi $54^\circ 3' 55''$.

6. Od zbroja kutova $94^\circ 2' 33''$ i $5^\circ 4' 3''$ oduzmi njihovu razliku.

7. Ako je $\alpha = 53^\circ 21' 11''$ i $\beta = 14^\circ 16'$, koliko je:

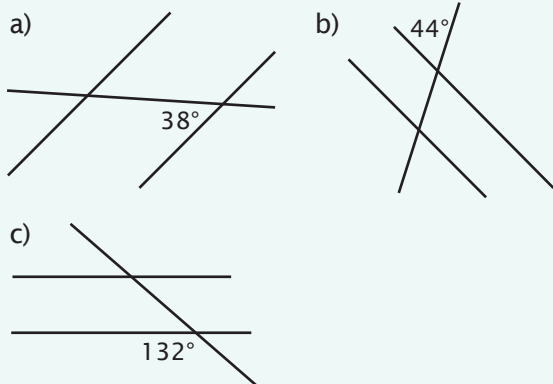
- a) $\alpha + \beta$; b) $\alpha - \beta$; c) $\alpha + 144^\circ 36' - 22^\circ 54'$;
 d) $2 \cdot \alpha + 3 \cdot \beta$; e) $\alpha - 2 \cdot \beta$;
 f) $244^\circ 36' 21'' - \alpha + 212^\circ 54' 33'' + \beta$;

8. Zapiši decimalne brojeve u obliku stupnjeva, minuta i sekundi.

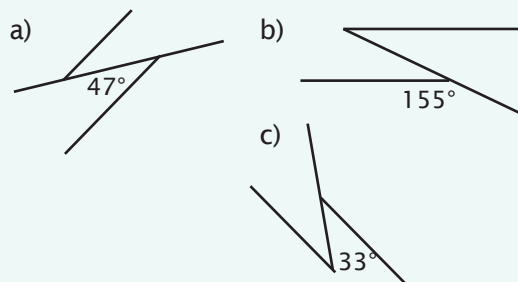
- a) 49.5° ; b) 181.17° ; c) 360.1° ; d) 131.65° ;
 e) 37.6° ; f) 22.63° ; g) 36.12° ; h) 13.9° ;
 i) 7.16° ; j) 92.8° .

Vježbalica

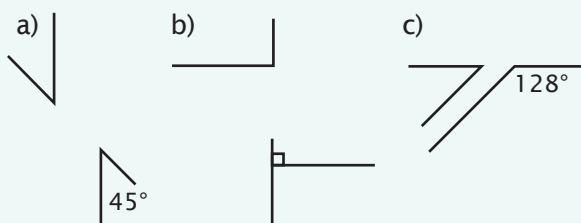
1. Izračunaj ostale kutove uz presječnicu.



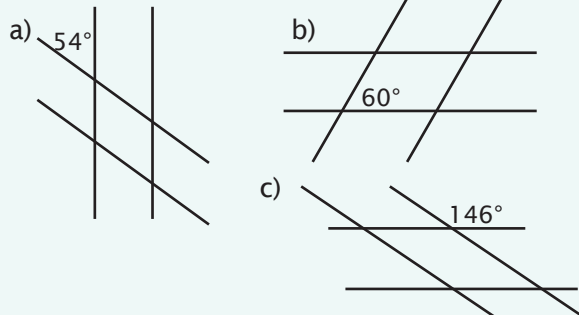
2. Doctraj dio slike koji nedostaje i izračunaj ostale kutove uz presječnicu.



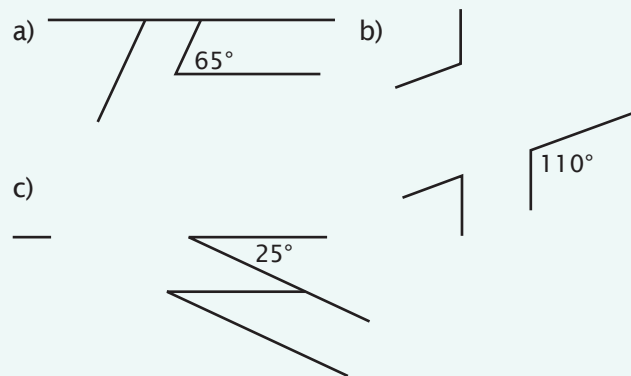
3. Doctraj dio slike koji nedostaje i izračunaj ostale kutove uz presječnicu.



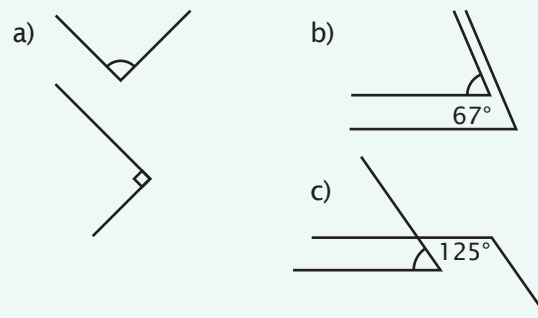
4. Izračunaj ostale kutove na slici. Pravci su u parovima usporedni.



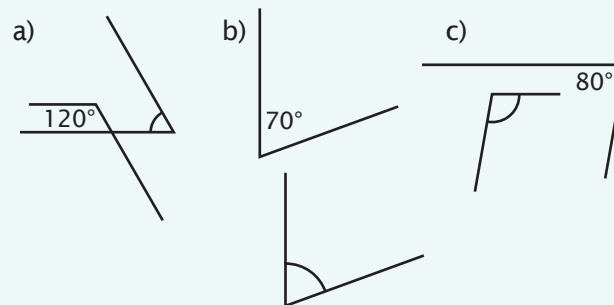
5. Doctraj dio slike koji nedostaje i izračunaj ostale kutove na slici. Za nacrtane pravce vrijedi da su u parovima usporedni.



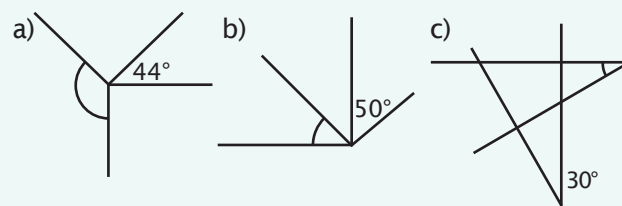
6. Odredi veličine kutova s usporednim kracima. Ako želiš, doctraj najprije sliku tako da se vide usporedni pravci.



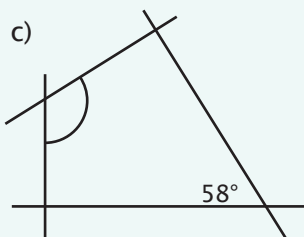
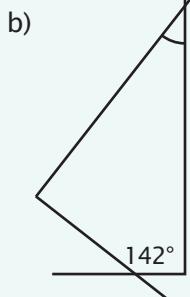
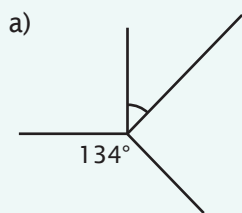
7. Odredi veličine kutova s usporednim kracima.



8. Odredi veličine kutova s okomitim kracima.



9. Odredi veličine kutova s okomitim kracima.

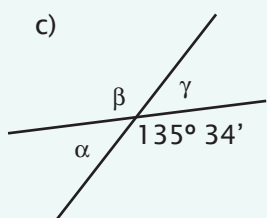
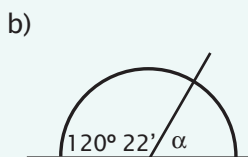
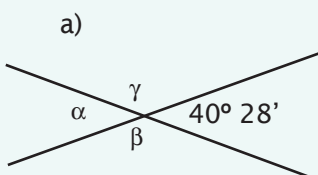


10. Pretvori u kutne minute: 13° , 60° , 139° , 344° , 360° .

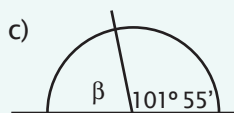
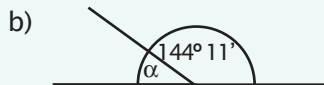
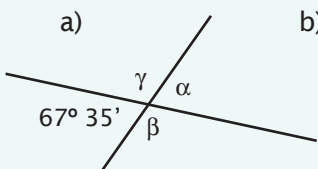
11. Pretvori u stupnjeve: $120'$, $600'$, $5400'$, $3000'$.

12. Zapiši na valjan način: $12^\circ 63'$, $54^\circ 70'$, $45^\circ 88'$, $23^\circ 120'$, $54^\circ 135'$.

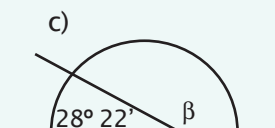
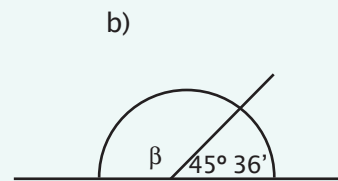
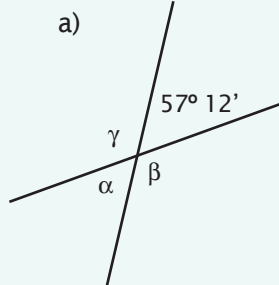
13. Odredi nepoznate kutove sa slika:



14. Odredi nepoznate kutove sa slika:



15. Odredi nepoznate kutove sa slika:



16. Izračunaj:

- a) $47^\circ 42' + 23^\circ 34'$;
- b) $158^\circ 46' + 15^\circ 43'$;
- c) $11^\circ 56' + 38'$.

17. Izračunaj:

- a) $52^\circ 21' - 31^\circ 57'$;
- b) $113^\circ 16' - 15^\circ 48'$;
- c) $122^\circ - 59^\circ 50'$.

18. Izračunaj:

- a) $28^\circ 16' + 136^\circ 56'$;
- b) $181^\circ 7' - 140^\circ 41'$;
- c) $180^\circ - 24'$;
- d) $231^\circ 44' + 7^\circ 36'$.

19. Od zbroja kutova $31^\circ 36'$ i $44^\circ 29'$ oduzmi $4^\circ 23'$.

20. Od zbroja kutova $24^\circ 52'$ i $6^\circ 16'$ oduzmi njihovu razliku.

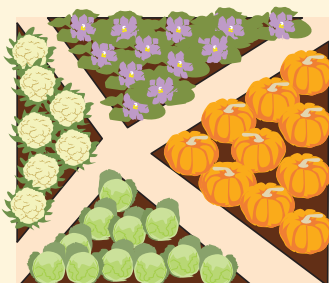
21. Ako je $\alpha = 43^\circ 35'$ i $\beta = 4^\circ 36'$, koliko je:

- a) $\alpha + \beta$; b) $\alpha - \beta$; c) $\alpha + 144^\circ - 22^\circ 4'$;
- d) $2 \cdot \alpha$; e) $3 \cdot \beta$; f) $\alpha : 2$; g) $\beta : 2$.

22. Ako je $\alpha = 55^\circ 25'$ i $\beta = 30^\circ 31'$, koliko je:

- a) $\alpha + \beta$; b) $\alpha - \beta$; c) $\alpha + 13^\circ - 35^\circ 54'$;
- d) $2 \cdot \alpha$; e) $3 \cdot \beta$; f) $\alpha : 2$; g) $\beta : 2$.

2.4. Trokut



Vrtne gredice

Kakav oblik imaju gredice s povrćem i cvijećem u vrtu Lukine majke?

O trokutu ste već učili u 5. razredu, prisjetimo se zajedno.

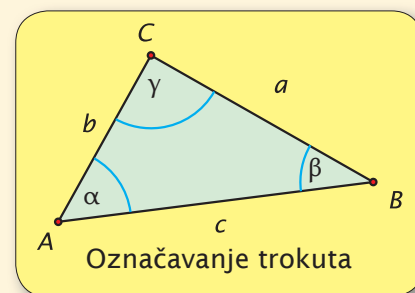
Važno

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine koje imaju zajedničke krajnje točke.

Vrhovi trokuta su točke, označavamo ih velikim tiskanim slovima A , B i C . Trokut s tim vrhovima označavamo kraće s: $\triangle ABC$.

Stranice trokuta su dužine \overline{AB} , \overline{BC} i \overline{CA} . Duljine stranica označavamo malim slovima a , b i c . Stranica duljine a nalazi se nasuprot vrhu A , stranica duljine b nalazi se nasuprot vrhu B , a stranica duljine c nasuprot vrhu C . Uobičajeno je $|AB| = c$, $|AC| = b$ i $|BC| = a$.

Kutovi $\sphericalangle CAB$, $\sphericalangle ABC$ i $\sphericalangle BCA$ su unutarnji kutovi trokuta $\triangle ABC$. Budući da je svakom vrhu trokuta pridružen samo jedan unutarnji kut, ponekad koristimo i kraće oznake $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$ i $\sphericalangle C$, koje čitamo "kut kod vrha A ", "kut kod vrha B ", "kut kod vrha C ". Veličine kutova označavaju se malim grčkim slovima α , β i γ . Kut α se obično nalazi kod vrha A , kut β kod vrha B , a kut γ kod vrha C .



Primjer 1. Vrste trokuta s obzirom na duljine stranica

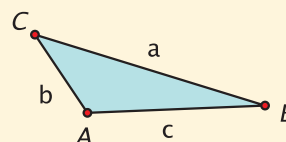
Promotrimo duljine stranica trokuta u prethodnim zadacima. Koje vrste trokuta smo vidjeli?

S obzirom na duljine stranica trokut može biti:

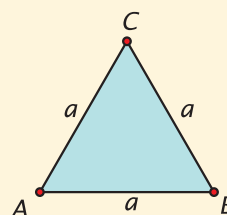
- raznostraničan,
- jednakostraničan,
- jednakokračan.

Rješenje:

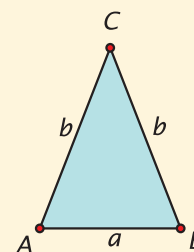
Raznostraničan



Jednakostraničan



Jednakokračan



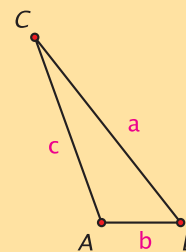
Važno

Trokut kojemu su sve stranice različitih duljina nazivamo **raznostraničan trokut**.

Opseg trokuta je zbroj duljina svih njegovih stranica.

Opseg raznostraničnog trokuta,

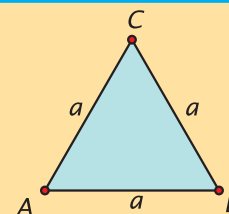
$$o = a + b + c.$$



Važno

Jednakostraničan trokut je trokut koji ima sve stranice jednakih duljina.

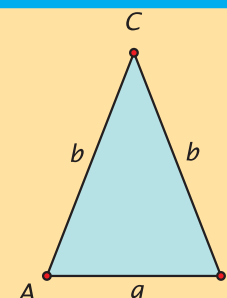
Opseg jednakostraničnog trokuta, $o = 3 \cdot a$.



Važno

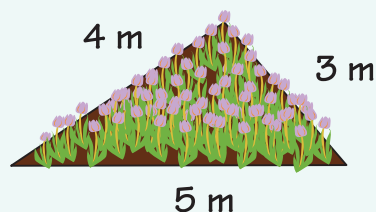
Jednakokrračan trokut je trokut koji ima dvije stranice jednakih duljina. Te dvije stranice nazivaju se **krakovi**, a preostala stranica trokuta naziva se **osnovicom**.

Opseg jednakokrračnog trokuta $o = a + 2 \cdot b$.



Zadaci

- Izračunaj opseg trokuta.
 - $a = 5 \text{ cm}$; $b = 9 \text{ cm}$; $c = 6 \text{ cm}$;
 - $a = 6 \text{ dm}$; $b = 5.3 \text{ dm}$; $c = 7.8 \text{ dm}$
 - $a = 1.5 \text{ m}$; $b = 0.7 \text{ m}$; $c = 0.9 \text{ m}$.
- Teta Nela ima vrt u obliku trokuta. Želi postaviti ogradu oko svog vrta. Koliko će joj metara žice trebati za ogradu? Koliko će stupova trebati, ako je razmak između stupova jedan metar?
- Izračunaj opseg jednakostraničnog trokuta.
 - $a = 5 \text{ cm}$;
 - $a = 6 \text{ dm}$;
 - $a = 1.5 \text{ m}$.
- Maja ima konopac duljine 33.9 m. Želi od njega napraviti jednakostraničan trokut. Kolika će biti duljina stranice?
- Majina mama je kupila 5 m trake za obrublivanje. Njome želi obrubiti stolnjak u obliku jednakostraničnog trokuta sa stranicom 2.25 m. Ima li dovoljno trake za taj stolnjak?



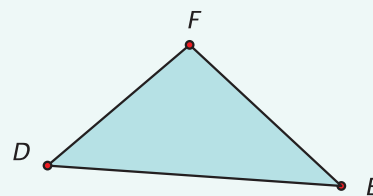
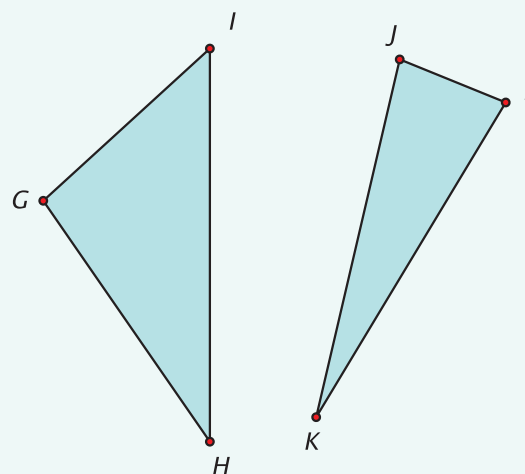
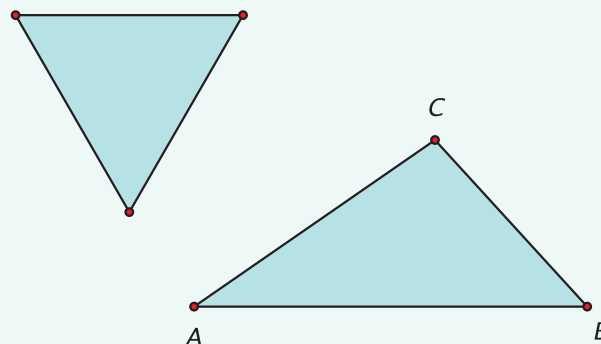
Zadaci

6. Izračunaj opseg jednakokravnog trokuta.
- $a = 5$ cm; $b = 9$ cm;
 - $a = 6$ dm; $b = 5.3$ dm;
 - $a = 1.5$ m; $b = 7$ dm.
7. Izračunaj opseg jednakokravnog trokuta s osnovicom duljine 3.6 m i krakom duljine 25 dm.
8. Župnik želi za Božić ukrasiti vrh crkvenog tornja svjetlećom cijevi. Koliko metara cijevi će mu biti potrebno? Krov tornja je sastavljen od četiri jednakokravnih trokuta s osnovicom 8.6 m i krakovima 12.3 m.



9. Osnovica jednakokravnog trokuta duga je 1.2 dm, a oba kraka zajedno duga su 20 cm.
- Kolika je duljina kraka u tom trokutu?
 - Kolika je opseg trokuta?

10. Izmjeri duljine stranica trokuta na slici te napiši je li raznostraničan, jednakostraničan ili jednakokravan. Izračunaj im opsege.



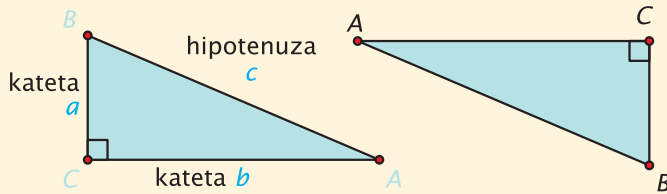
Mjerne jedinice za duljinu

1 km = 1000 m	1 m = 0.001 km	1 dm = 0.0001 km	1 cm = 0.00001 km	1 mm = 0.000001 km
1 km = 10 000 dm	1 m = 10 dm	1 dm = 0.1 m	1 cm = 0.01 m	1 mm = 0.001 m
1 km = 100 000 cm	1 m = 100 cm	1 dm = 10 cm	1 cm = 0.1 dm	1 mm = 0.01 dm
1 km = 1 000 000 mm	1 m = 1000 mm	1 dm = 100 mm	1 cm = 10 mm	1 mm = 0.1 cm

Primjer 2. Pravokutan trokut

Pravokutan trokut

Kutovi trokuta mogu biti različiti. Ako su dvije stranice trokuta okomite, kut između njih je **pravi kut**. Njega označavamo kvadratićem, kao na slici:



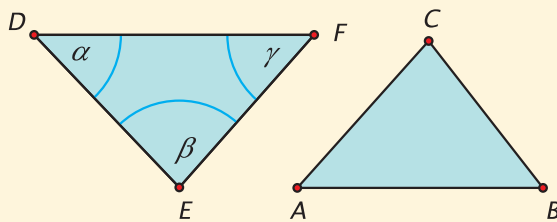
Važno

Trokut koji ima pravi kut naziva se **pravokutan trokut**. Stranice trokuta koje zatvaraju pravi kut nazivaju se **katete**. Stranica nasuprot pravom kutu naziva se **hipotenuza**.

Trokut kojem su svi kutovi šiljasti naziva se **šiljastokutan trokut**.

Trokut koji ima tupi kut naziva se **tupokutan trokut**.

Šiljastokutan trokut

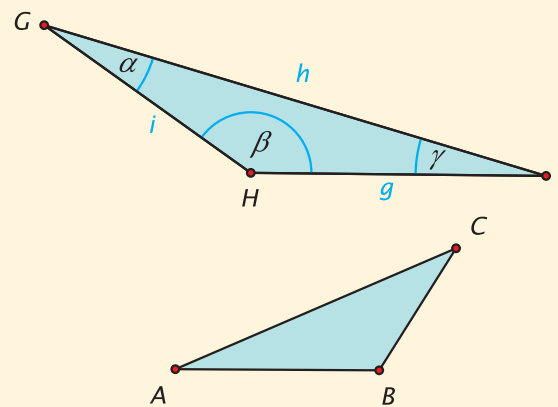


S obzirom na veličine kutova trokut može biti:

- šiljastokutan,
- tupokutan,
- pravokutan.

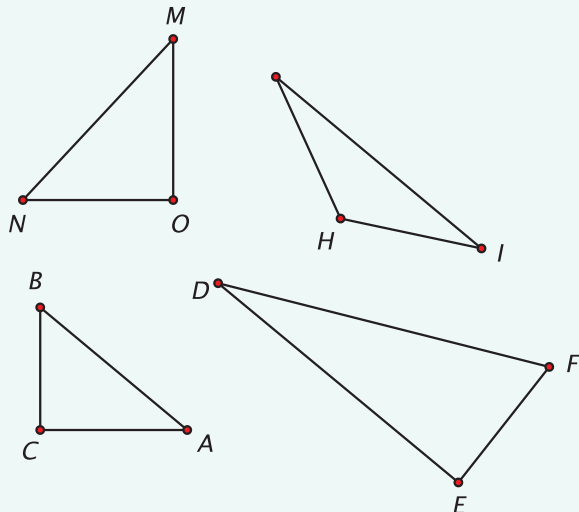
Tupokutan trokut.

Trokut na slici ima tupi kut β .

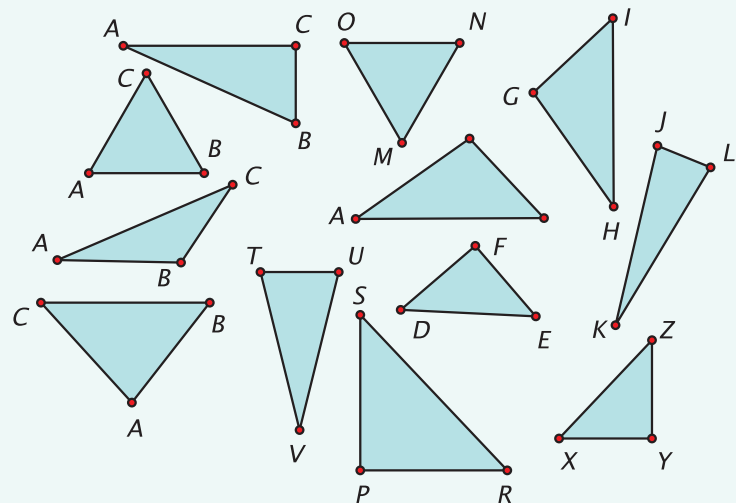


Zadaci

11. Za svaki trokut na slici napiši je li šiljastokutan, tupokutan ili pravokutan?

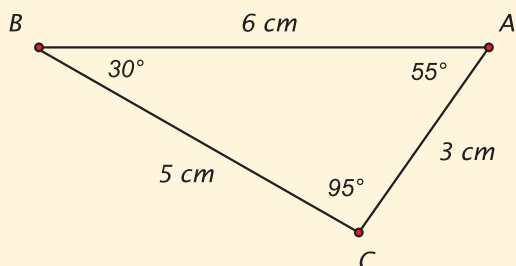


12. Za svaki trokut napiši kakav je s obzirom na duljine stranica i s obzirom na veličine kutova.



Primjer 3. Veza između duljina stranica i veličina kutova trokuta

Pogledajmo duljine stranica i veličine kutova trokuta na slici. Kakva veza postoji između njihovih veličina?



Rješenje:

Duljine stranica	Veličine kutova
$a = 5 \text{ cm}$	$\alpha = 55^\circ$
$b = 3 \text{ cm}$	$\beta = 30^\circ$
$c = 6 \text{ cm}$	$\gamma = 95^\circ$

Poredajmo stranice i kutove po veličini:

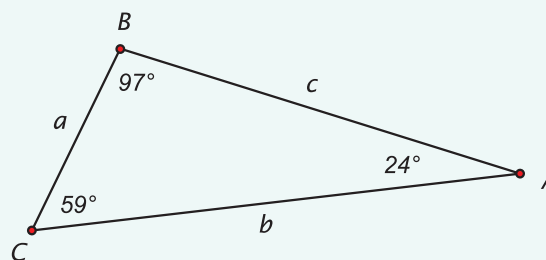
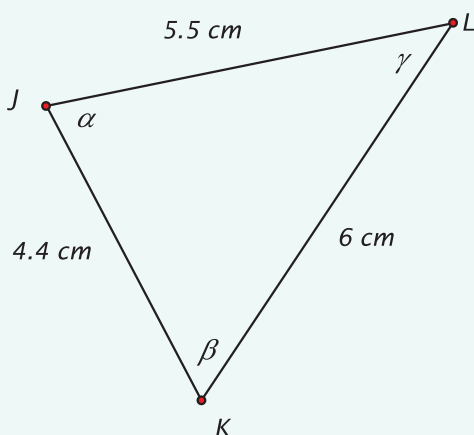
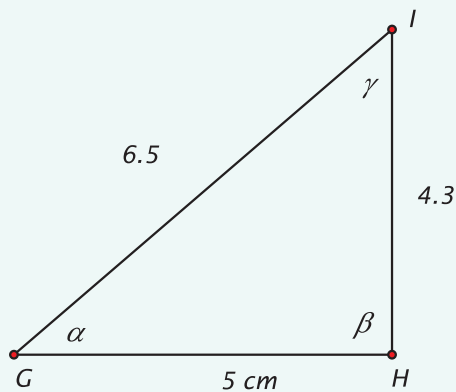
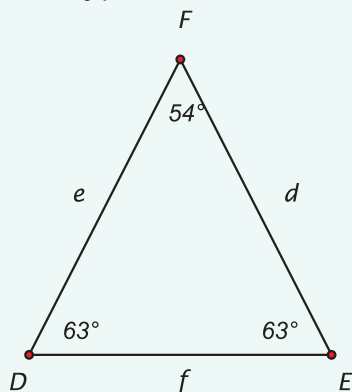
$$c > a > b \text{ i } \gamma > \alpha > \beta.$$

Vidimo da nasuprot najvećoj stranici (c) leži najveći kut (γ). Nasuprot najmanjoj stranici (b) leži najmanji kut (β).

Nasuprot većoj stranici trokuta leži veći kut, tj. nasuprot većem kutu leži veća stranica. Nasuprot jednakim stranicama nalaze se jednaki kutovi.

Zadaci

13. Poredaj po veličini kutove i stranice trokuta.

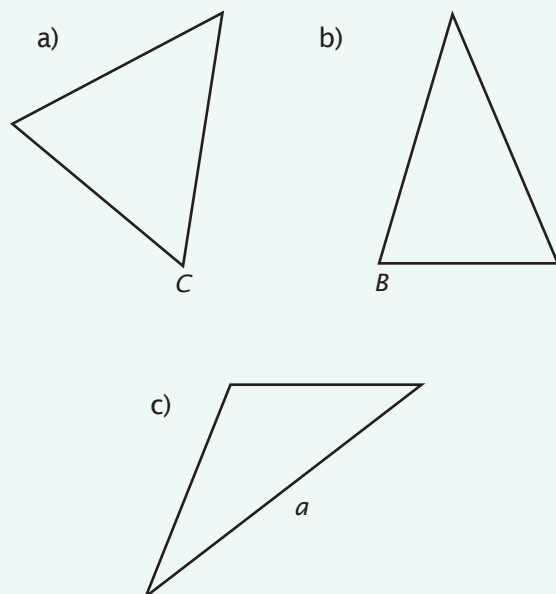


14. Koja je najdulja stranica pravokutnog trokuta?

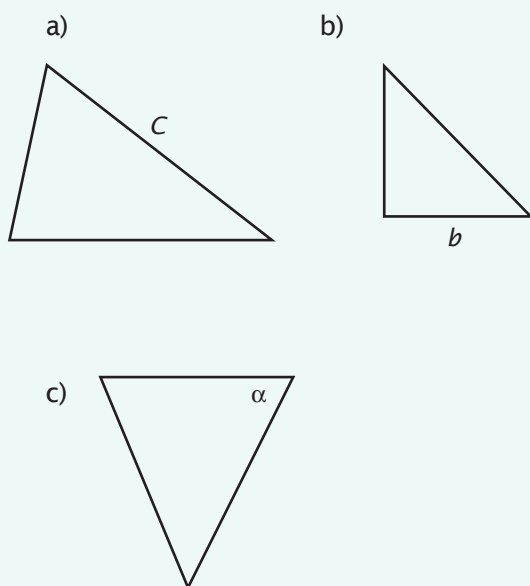
15. Uz stranicu a trokuta nalaze se dva jednaka kuta. Što možeš zaključiti o stranicama b i c tog trokuta? Obrazloži.

Vježbalica

1. Dopiši ostale oznake trokuta



2. Dopiši ostale oznake trokuta



3. Izračunaj opseg trokuta sa stranicama:

- a) $a = 4 \text{ cm}$, $b = 5 \text{ cm}$, $c = 8 \text{ cm}$;
 b) $c = 57 \text{ mm}$, $b = 3.3 \text{ cm}$, $a = 0.35 \text{ dm}$;
 c) $e = 8 \text{ m}$, $f = 78 \text{ dm}$, $g = 634 \text{ cm}$.

4. Nacrtaj trokut sa stranicama duljina 4.2 cm , 77 mm i 0.42 dm . Izračunaj mu opseg.
5. Izračunaj opseg jednakokravnog trokuta s osnovicom duljine 6.4 cm i krakom duljine 47 mm .
6. Izračunaj opseg jednakokravnog trokuta kojemu su krakovi duljine 2 cm , a osnovica duljine 1.5 cm .
7. Osnovica jednakokravnog trokuta duga je 1.2 dm , a oba kraka zajedno duga su 20 cm .
 Kolika je duljina kraka u tom trokutu? Koliki je opseg trokuta?
8. Stranica a trokuta iznosi 14 cm , stranica b iznosi 20 cm , a stranica c je za 2 cm dulja od stranice a . Koliko je duga stranica c ? Koliki je opseg tog trokuta?
9. Stranica b trokuta iznosi 8 cm , stranica a iznosi 102 mm , a stranica c je za 15 mm dulja od stranice b . Koliko je duga stranica c ? Koliki je opseg tog trokuta?
10. Nacrtaj jednakokstraničan trokut duljine stranice:
 a) 5 cm ; b) 36 mm ; c) 4.8 cm .
 Izračunaj opseg svakog od ovih trokuta.
 Izmjeri veličine kutova tih trokuta. Što primjećuješ?
11. Nacrtaj jednakokravan trokut duljine osnovice a i kraka b :
 a) $a = 3 \text{ cm}$, $b = 6 \text{ cm}$;
 b) $a = 2 \text{ cm}$, $b = 54 \text{ mm}$;
 c) $a = 6 \text{ cm}$; $b = 3.4 \text{ cm}$.
 Izračunaj opseg svakog od ovih trokuta.
12. Je li moguće nacrtati trokut s duljinama stranica:
 a) 3 cm , 4 cm i 4 cm ;
 b) 4 cm , 5 cm i 9 cm ;

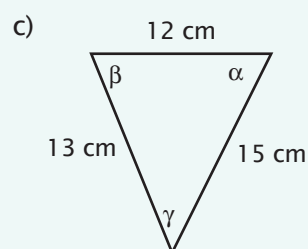
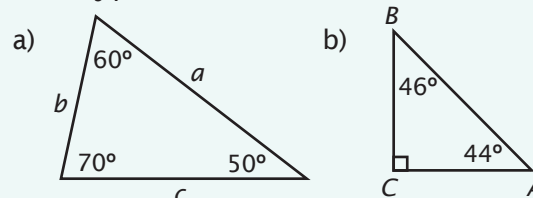
- c) 2 cm, 4 cm i 5 cm;
d) 11 cm, 15 cm i 3 cm?
13. Je li moguće nacrtati trokut s duljinama stranica:
a) 16 cm, 1 dm i 25 mm;
b) 3 cm, 34 mm i 3 cm;
c) 24 mm, 32 mm i 1 cm;
d) 4 cm, 43 mm i 83 mm?
14. Osnovica jednakokračnog trokuta duga je 8 cm, a svaki krak je za 2 cm kraći od osnovice. Koliki je opseg tog trokuta?
15. Krak jednakokračnog trokuta je 7 cm, a osnovica je za 2 cm kraća od kraka. Koliki je opseg tog trokuta?
16. Opseg jednakostraničnog trokuta je 18 cm. Kolika je duljina njegovih stranica?
17. Opseg jednakokračnog trokuta je 17 cm, a osnovica mu je duga 5 cm. Koliko su dugi krakovi tog trokuta?
18. Opseg jednakokračnog trokuta je 96 mm, a osnovica mu je duga 6 cm. Koliko su dugi krakovi tog trokuta?
19. Opseg jednakokračnog trokuta je 16 cm, a krak mu je dug 6 cm. Koliko je duga osnovica tog trokuta?
20. Opseg jednakokračnog trokuta je 138 mm, a krak mu je dug 4 cm. Koliko je duga osnovica tog trokuta?
21. Opseg jednakostraničnog trokuta je 678 mm, koliko su dugačke njegove stranice?
22. Opseg raznostraničnog trokuta je 23 cm, a dvije stranice su duge 6 cm i 8 cm. Izračunaj duljinu treće stranice tog trokuta.
23. Opseg raznostraničnog trokuta je 22 cm, a dvije stranice su duge 76 mm i 9 cm. Izračunaj duljinu treće stranice tog trokuta.
24. Opseg trokuta iznosi 16 cm, a dvije stranice su mu duljina 4 cm i 7 cm. Kolika je duljina treće stranice tog trokuta?

25. Nacrtaj pravokutan trokut s katetama duljina:

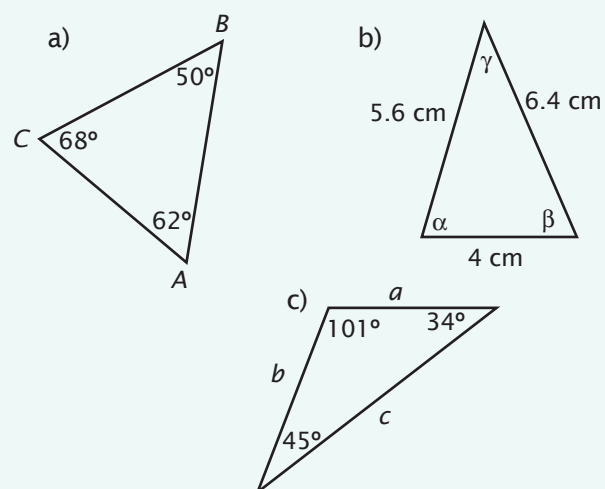
- a) 4 cm i 5 cm;
b) 5 cm i 5 cm;
c) 30 mm i 3 cm.

Koji od njih je jednakokračan?

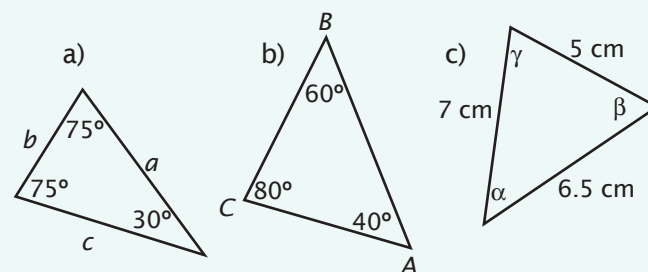
26. Poredaj po veličini kutove i stranice trokuta.



27. Poredaj po veličini kutove i stranice trokuta:



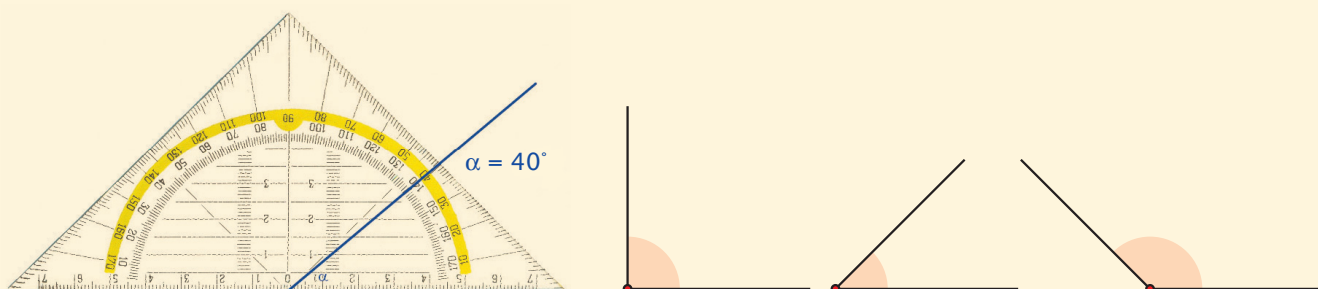
28. Poredaj po veličini kutove i stranice trokuta:



2.5. Zbroj kutova u trokutu

Mjerenje kuta

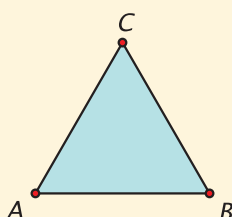
Izmjeri kutomjerom veličine kutova na slici.



Primjer 1.

Kutovi u jednakostraničnom trokutu

Na slici je nacrtan jednakostraničan trokut. Koliki su njegovi kutovi? Koliki je zbroj kutova u jednakostraničnom trokutu?



Rješenje:

Kutomjerom izmjerimo veličine njegovih kutova α , β i γ .

Dobivamo:

$$\alpha = 60^\circ$$

$$\beta = 60^\circ$$

$$\gamma = 60^\circ.$$

Svi kutovi u **jednakostraničnom trokutu** su jednaki i iznose 60° .

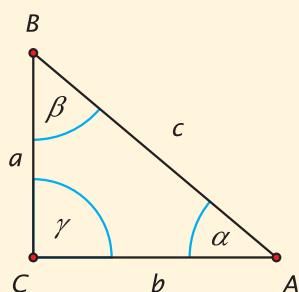
Zbroj kutova u tom trokutu je

$$\alpha + \beta + \gamma = 60^\circ + 60^\circ + 60^\circ = 180^\circ$$

Primjer 2.

Kutovi u raznostraničnom trokutu

Na slici je nacrtan raznostraničan trokut. Koliki su njegovi kutovi? Koliki je zbroj kutova u raznostraničnom trokutu?



Rješenje:

Zbroj kutova u trokutu

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ.$$

Izmjerimo njegove kutove.

$$\alpha = 50^\circ$$

$$\beta = 40^\circ$$

$$\gamma = 90^\circ.$$

Zbroj kutova u tom trokutu je

$$\alpha + \beta + \gamma = 50^\circ + 40^\circ + 90^\circ = 180^\circ.$$

Nacrtaj bilo kakav trokut, izmjeri mu kutove i izračunaj njihov zbroj.

Važno

Zbroj kutova u trokutu iznosi 180° . $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$.

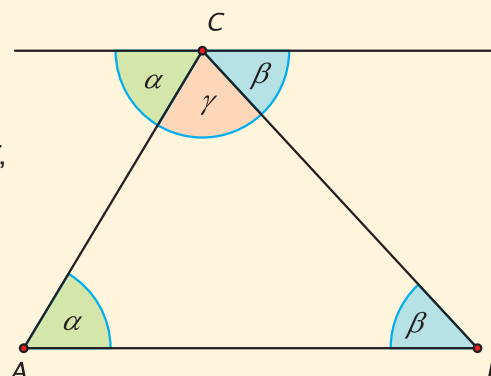
Tu tvrdnju možemo vrlo jednostavno dokazati.

Dokaz:

Pogledajmo na slici trokut $\triangle ABC$ s kutovima α , β i γ . Povucimo pravac usporedan sa stranicom \overline{AB} kroz vrh C . Time su kod vrha C , s jedne strane tog pravca, određena tri kuta.

Pogledajmo te kutove:

- srednji je kut γ ,
- lijevi je jednak kutu α jer on s kutom α ima usporedne krakove,
- desni je jednak kutu β jer on s kutom β ima usporedne krakove.

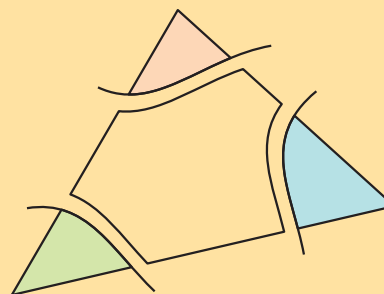


Ta tri kuta kod vrha C zajedno čine ispruženi kut, a ispruženi kut ima 180° .

Dakle, za svaki trokut vrijedi $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$.

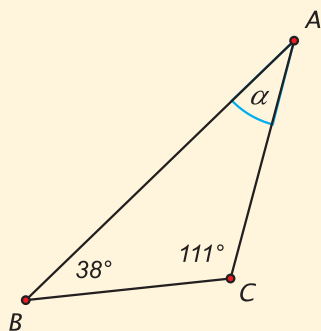
Papirnati dokaz

1. Nacrtaj trokut na papiru pa ga izreži.
2. Pobočaj svaki kut drugom bojom.
3. Odreži sva tri kuta trokuta.
4. Spoji ih vrhovima uz jednu stranu ravnala i vidjet ćeš da čine ispruženi kut.



Primjer 3. Izračunaj nepoznati kut

U trokutu $\triangle ABC$ poznate su veličine dvaju kutova: $\beta = 38^\circ$ i $\gamma = 111^\circ$. Koliki je kut α ?



Rješenje:

Znamo da je zbroj kutova u svakom trokutu 180° . Dakle, ako od 180° oduzmemo zbroj zadanih kutova, dobit ćemo treći kut tog trokuta.

Zbrojimo veličine dvaju zadanih kutova
 $38^\circ + 111^\circ = 149^\circ$

Veličinu kuta α dobit ćemo tako da od 180° oduzmemo taj zbroj.

$\alpha = 180^\circ - 149^\circ = 31^\circ$. Kut α iznosi 31° .

Treći kut trokuta dobivaš tako da od 180° oduzmeš ostala dva kuta.

Može i ovako:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

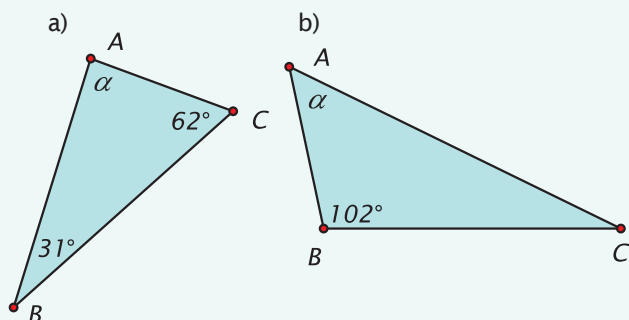
$$\alpha + 38^\circ + 111^\circ = 180^\circ$$

$$\alpha + 149^\circ = 180^\circ$$

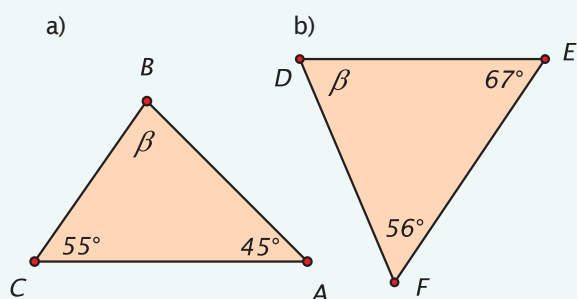
$$\alpha = 180^\circ - 149^\circ = 31^\circ$$

Zadaci

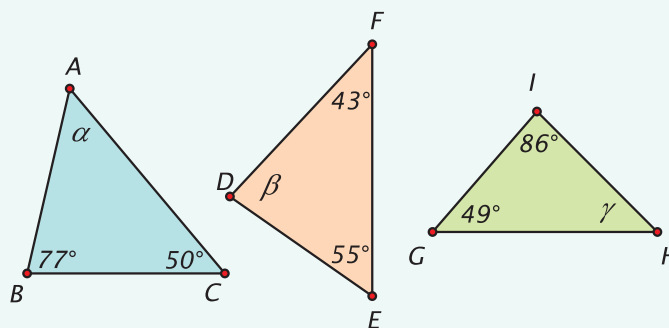
1. Koliko stupnjeva ima kut ?



2. Koliko stupnjeva ima kut ?



3. Izračunaj nepoznati kut trokuta.



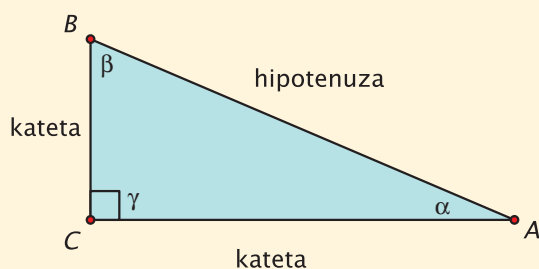
4. Izračunaj kut trokuta koji nedostaje.

α	β	γ
25°	123°	
	48°	81°
67°		101°
40°	50°	
$101^\circ 12'$		$33^\circ 24'$
	$45^\circ 55'$	$29^\circ 34'$
$66^\circ 42'$	$37^\circ 11'$	

Primjer 4.

Kutovi u pravokutnom trokutu

Koliki je zbroj kutova u pravokutnom trokutu?



Rješenje:

Kutovi u pravokutnom trokutu
 $\alpha + \beta = 90^\circ$

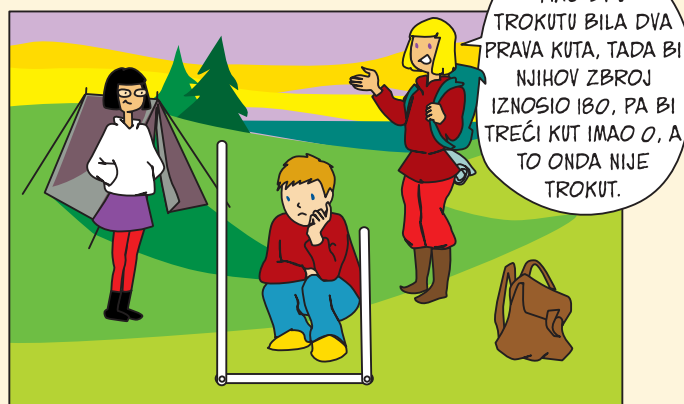
U svakom trokutu je zbroj kutova 180° , pa je tako i u pravokutnom trokutu zbroj kutova 180° .

Jedan kut u pravokutnom trokutu je pravi, dakle ima 90° . Taj kut najčešće označavamo s γ . Za ostala dva kuta u pravokutnom trokutu onda preostaje $180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$.

Važno

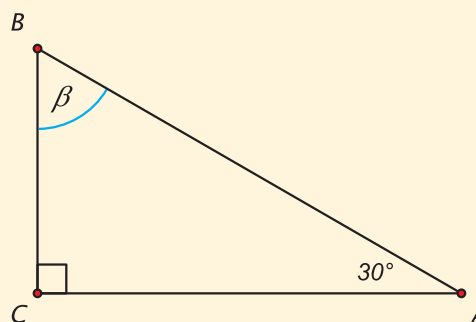
Zbroj šiljastih kutova u pravokutnom trokutu iznosi 90° .

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$



Primjer 5.

Neka je u pravokutnom trokutu jedan šiljasti kut $\alpha = 30^\circ$. Koliki je drugi šiljasti kut?



Rješenje:

Zbroj šiljastih kutova u pravokutnom trokutu iznosi 90° .

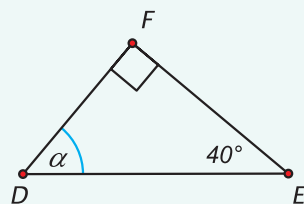
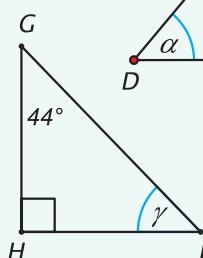
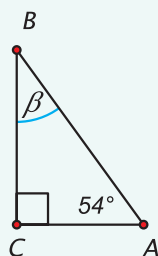
$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

S obzirom na to da znamo veličinu jednog šiljastog kuta, veličinu drugog ćemo dobiti tako da od 90° oduzmemo poznati kut.

$$\beta = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ. \text{ Kut } \beta \text{ iznosi } 60^\circ.$$

Zadaci

5. Izračunaj drugi šiljasti kut u pravokutnom trokutu.

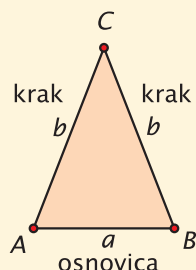


6. Izračunaj kut pravokutnog trokuta.

α	β	γ
25°		90°
	48°	90°
67°		90°
	50°	90°
$34^\circ 56'$		90°
	$56^\circ 12'$	90°

Primjer 6. Kutovi u jednakokračnom trokutu

Koliki je zbroj kutova u jednakokračnom trokutu?



Kutovi uz osnovicu jednakokračnog trokuta su jednaki.

Rješenje:

U svakom trokutu je zbroj kutova 180° , pa je tako i u jednakokračnom trokutu zbroj kutova 180° .

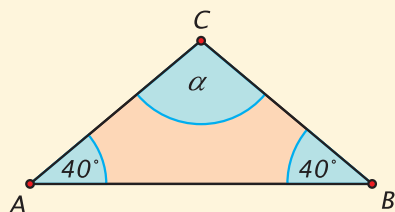
Budući da su u jednakokračnom trokutu krakovi jednakih duljina, to su i kutovi nasuprot svakom kraku također jednaki. Kažemo da su u jednakokračnom trokutu kutovi uz osnovicu jednaki. Te kutove obično označavamo s β . Kut nasuprot osnovice, koji zatvaraju krakovi, obično označavamo s α .

Važno

Za kutove u jednakokračnom trokutu vrijedi:
 $\alpha + 2 \cdot \beta = 180^\circ$

Primjer 7. Kut nasuprot osnovice

Koliki je kut nasuprot osnovici jednakokračnog trokuta, ako je veličina kuta uz osnovicu 40° ?



Rješenje:

Kut uz osnovicu označavamo s β . Dakle, zadano je $\beta = 40^\circ$ i trebamo izračunati veličinu

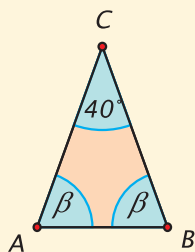
kuta α . Znamo da su u jednakokračnom trokutu dva kuta uz osnovicu jednakih veličina. Njihova zajednička veličina je $2 \cdot 40^\circ = 80^\circ$. Da bismo dobili veličinu kuta nasuprot osnovici, moramo taj broj oduzeti od 180° .
 $\alpha = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$. Kut nasuprot osnovici iznosi 100° .

Može i ovako:

$$\begin{aligned} \alpha + 2 \cdot \beta &= 180^\circ \\ \alpha + 2 \cdot 40^\circ &= 180^\circ \\ \alpha + 80^\circ &= 180^\circ \\ \alpha &= 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ. \end{aligned}$$

Primjer 8. Kut uz osnovicu

Koliki je kut uz osnovicu jednakokračnog trokuta, ako je veličina kuta nasuprot osnovici 40° ?



Rješenje:

Kut nasuprot osnovici označavamo s α . Dakle, zadano je $\alpha = 40^\circ$ i trebamo izračunati veličinu kuta β .

Zbroj kutova u trokutu je 180° . Oduzmemo

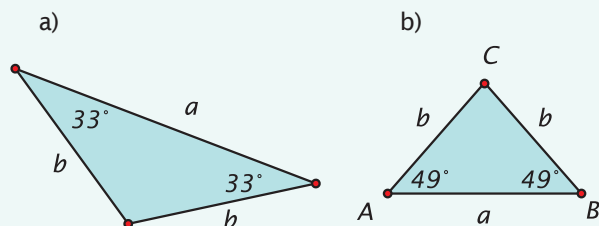
veličinu kuta α od 180° : $180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$. Dakle, za oba kuta uz osnovicu preostaje nam 140° . Da bismo izračunali veličinu jednog kuta uz osnovicu još moramo 140° podijeliti s 2.
 $\beta = 140^\circ : 2 = 70^\circ$. Kut na osnovici iznosi 70° .

Može i ovako:

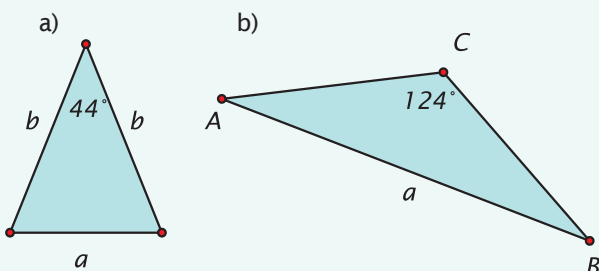
$$\begin{aligned} \alpha + 2 \cdot \beta &= 180^\circ \\ 40^\circ + 2 \cdot \beta &= 180^\circ \\ 2 \cdot \beta &= 180^\circ - 40^\circ \\ 2 \cdot \beta &= 140^\circ \\ \beta &= 140^\circ : 2 = 70^\circ \end{aligned}$$

Zadaci

7. Izračunaj kut nasuprot osnovice jednakokračnog trokuta.



8. Izračunaj kut uz osnovicu jednakokračnog trokuta.



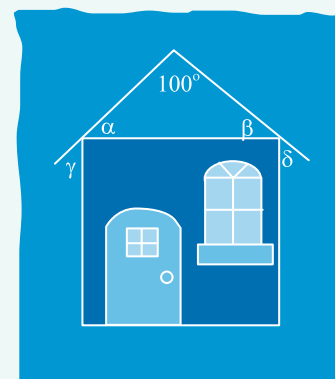
9. Izračunaj kut nasuprot osnovici jednakokračnog trokuta, ako je veličina kuta uz osnovicu:

a) 45° ; b) 60° ; c) 31° ; d) 72° .

10. Izračunaj kut uz osnovicu jednakokračnog trokuta, ako je veličina kuta nasuprot osnovici:

a) 144° ; b) 60° ; c) 131° ; d) 75° .

11. Majin tata želi Maji napraviti kućicu za lutke. Po nacrtu zna da kut pri vrhu krova treba biti 100° i da će obje strane krova biti jednake duljine. Koliki su ostali kutovi na krovu?



Vježbalica

1. Izračunaj kut trokuta koji nedostaje.

α	β	γ
125°	23°	
	43°	71°
27°		121°
48°	52°	

2. Izračunaj kut trokuta koji nedostaje

$95^\circ 22'$		$25^\circ 34'$
	$65^\circ 15'$	$39^\circ 54'$
$56^\circ 42'$	$47^\circ 31'$	
$45^\circ 12'$		88°

3. Izračunaj kut pravokutnog trokuta.

α	β	γ
35°		90°
	38°	90°
47°		90°
	30°	90°
$24^\circ 36'$		90°
	$36^\circ 22'$	90°

4. Izračunaj kut nasuprot osnovici jednakokračnog trokuta, ako je veličina kuta uz osnovicu:

a) 35° ; b) 40° ; c) 20° ; d) 68° .

5. Izračunaj kut uz osnovicu jednakokračnog trokuta, ako je veličina kuta nasuprot osnovici:

a) 120° ; b) 70° ; c) 31° ; d) 65° .

6. Izračunaj kut nasuprot osnovici jednakokračnog trokuta, ako je veličina kuta uz osnovicu:

a) 45° ; b) 80° ; c) 30° ; d) 65° .

7. Izračunaj kut uz osnovicu jednakokračnog trokuta, ako je veličina kuta nasuprot osnovici:

a) 130° ; b) 32° ; c) 44° ; d) 90° .

8. Zadani su unutarnji kutovi trokuta, izračunaj preostali unutarnji i vanjske kutove tog trokuta.

a) $\beta = 41^\circ$ i $\gamma = 67^\circ$.

b) $\alpha = 52^\circ$ i $\gamma = 49^\circ$.

9. Zadani su vanjski kutovi trokuta, izračunaj preostali vanjski i unutarnje kutove tog trokuta.

a) $\alpha' = 62^\circ$ i $\gamma' = 157^\circ$.

b) $\beta' = 109^\circ$ i $\gamma' = 128^\circ$.

10. Zadani su unutarnji kutovi trokuta, izračunaj preostali unutarnji i vanjske kutove tog trokuta.

a) $\beta = 101^\circ$ i $\gamma = 37^\circ$.

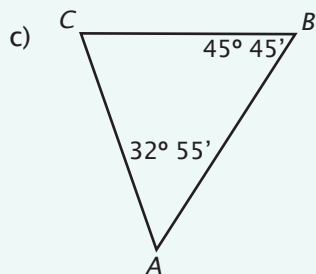
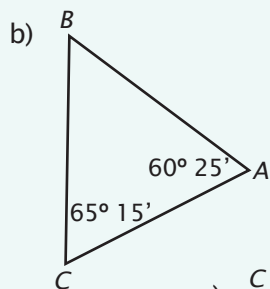
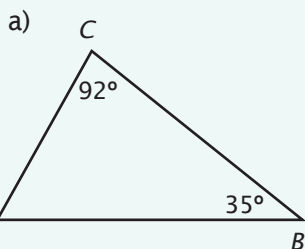
b) $\alpha = 72^\circ$ i $\gamma = 45^\circ$.

11. Zadani su vanjski kutovi trokuta, izračunaj preostali vanjski i unutarnje kutove tog trokuta.

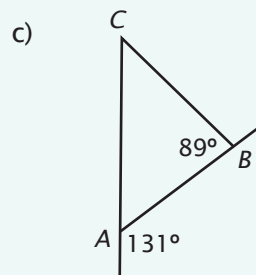
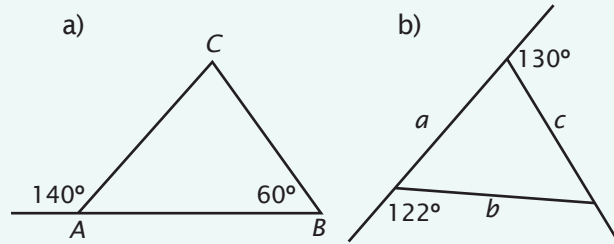
a) $\alpha' = 162^\circ$ i $\gamma' = 117^\circ$.

b) $\beta' = 139^\circ$ i $\gamma' = 89^\circ$.

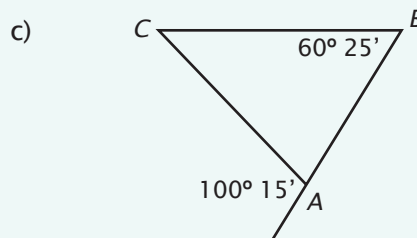
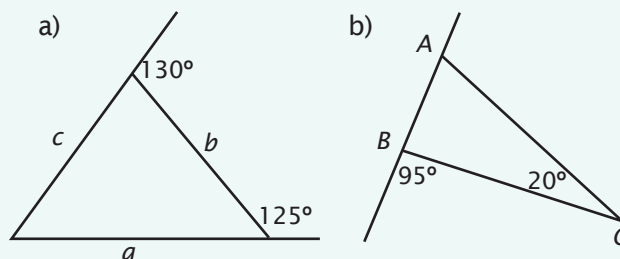
12. Odredi veličine nepoznatih kutova sa slike.



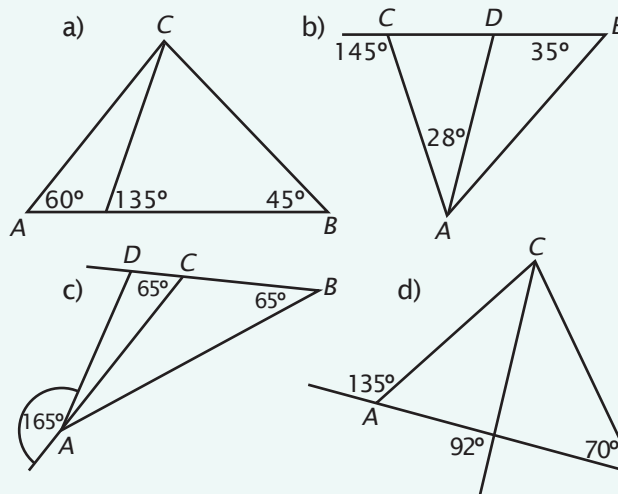
13. Odredi veličine nepoznatih kutova sa slike.



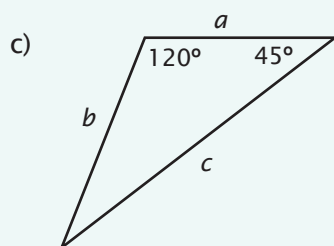
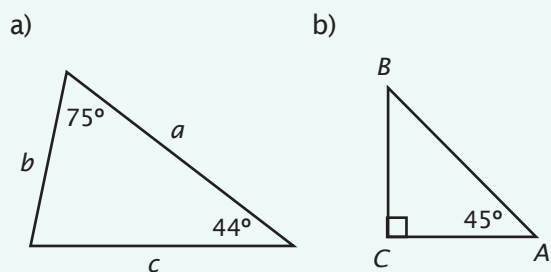
14. Odredi veličine nepoznatih kutova sa slike.



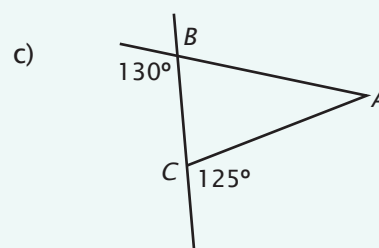
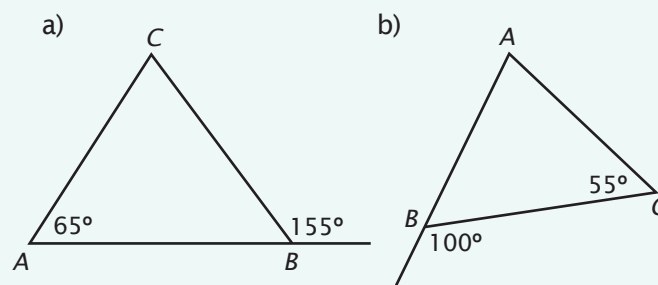
15. Odredi veličine nepoznatih kutova sa slike.



16. Poredaj po veličini kutove i stranice trokuta.



17. Poredaj po veličini kutove i stranice trokuta:



2.6. Simetrala kuta

Leptir

Pogledaj sliku leptira i odgovori na pitanja.

a) Leptiru su lijeva i desna strana jednake.

Koji matematički pojam koristimo za to?

b) Kako nazivamo pravac koji lik dijeli na potpuno jednake polovice?

c) Na listu papira nacrtaj leptira. Presavij taj list papira tako da se lijeva i desna strana leptira preklope. Nacrtaj pravac po presavijenom dijelu papira. Kako nazivamo taj pravac?

d) Na listu papira nacrtaj dužinu \overline{AB} , bilo koje duljine. Presavij taj list papira tako da se točke A i B preklope. Nacrtaj pravac po presavijenom dijelu papira. Kako nazivamo taj pravac?

e) Na listu papira nacrtaj kut s krakovima a i b te vrhom V. Presavij taj list papira tako da se krakovi a i b preklope. Nacrtaj pravac po presavijenom dijelu papira. Kako nazivamo taj pravac?



Primjer 1. Simetrala dužine

Važno

Simetrala dužine je pravac koji je okomit na tu dužinu i prolazi njenim polovištem. Svaka točka na simetrali dužine jednako je udaljena od krajeva te dužine.

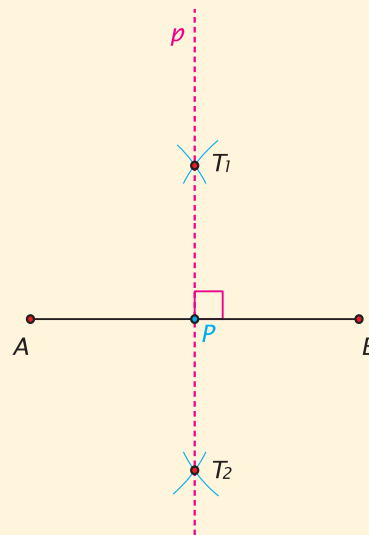
Prisjetimo se kako smo konstruirali simetralu dužine:

1. nacrtamo dužinu \overline{AB} ;
2. iglu šestara zabodemo u točku A i raširimo ga tako da mu je otvor veći od pola dužine \overline{AB} ;
3. nacrtamo kružni luk iznad i ispod dužine.



Kružni luk je dio kružnice.

4. premjestimo šestar u točku B , ne mijenjajući mu otvor;
5. nacrtamo kružni luk iznad i ispod dužine tako da presijecemo prvi kružni luk;
6. sjecišta kružnih lukova spojimo. Taj pravac je simetrala dužine \overline{AB} , a točka u kojoj siječe dužinu je njeno **polovište**.



Zadaci

1. Nacrtaj dužine zadanih duljina i konstruiraj njihove simetrale.

a) $|AB| = 6 \text{ cm}$;

b) $|CD| = 5 \text{ cm}$;

c) $|EF| = 7.5 \text{ cm}$.

Primjer 2. Simetrala kuta

Pogledajte crtež kuta koji ste napravili u uvodnom zadatku. Pravac koji ste nacrtali zove se simetrala kuta. Kroz koju točku

Simetrala kuta

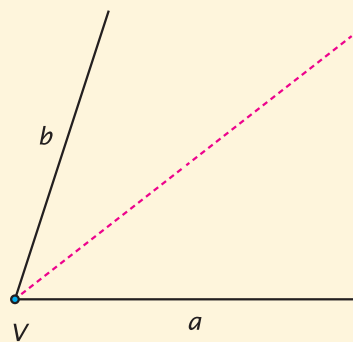
prolazi simetrala kuta? Na koliko dijelova simetrala dijeli kut? Kakvi su ti dijelovi?

Važno

Simetrala kuta je pravac koji raspolaavlja kut. Simetrala uvijek prolazi vrhom kuta i dijeli ga na dva jednaka dijela. Svaka točka na simetrali kuta jednako je udaljena od krakova kuta.

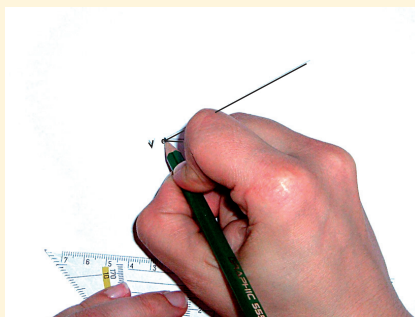
Rješenje:

Simetrala kuta prolazi vrhom kuta. Simetrala kuta dijeli kut na dva dijela. Izmjerimo dobivene dijelove s kutomjerom. Ta dva dijela kuta su jednake veličine.

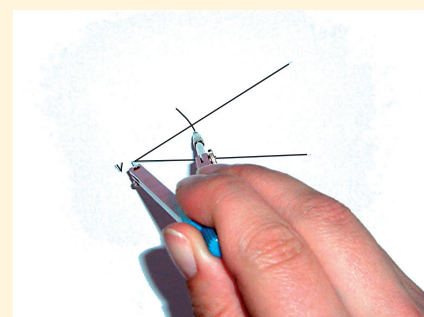


Primjer 3. Konstrukcija simetrale kuta

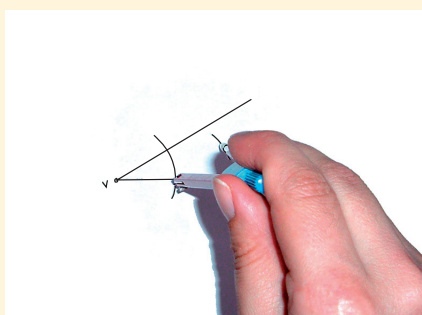
U matematici nije uvijek najpraktičnije presavijati papir da bismo odredili simetralu kuta, pa ćemo naučiti kako je konstruirati.



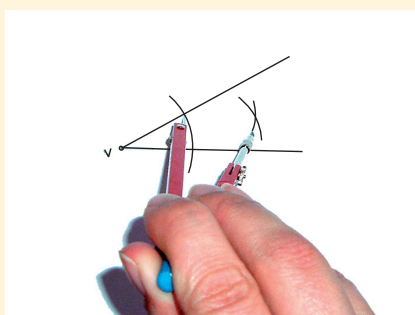
1. nacrtamo neki kut s vrhom u točki V;



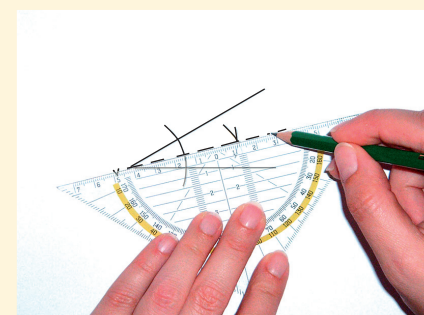
2. nacrtamo neki kružni luk iz točke V, tako da presiječemo oba kraka kuta;



3. premjestimo šestar u jedno od sjecišta te, ne mijenjajući otvor šestara, nacrtamo kružni luk unutar kuta (približno po sredini kuta);

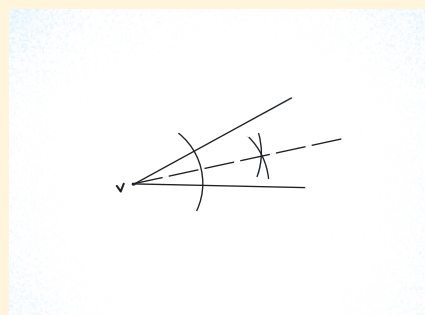


4. premjestimo šestar u drugo sjecište te, ne mijenjajući otvor šestara, nacrtamo kružni luk unutar kuta, tako da presiječemo prethodni;

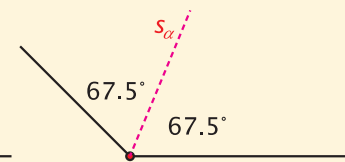
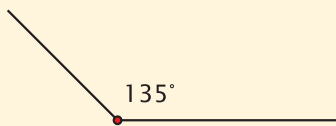
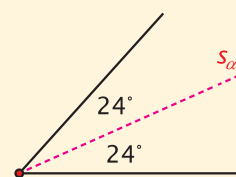
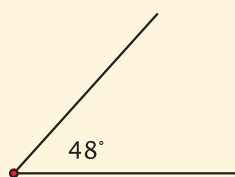


5. nacrtamo pravac kroz dobiveno sjecište i vrh kuta.

Crtanje simetrale kuta



Nacrtni pravac je simetrala kuta. Simetralu kuta α često označavamo sa s_α .



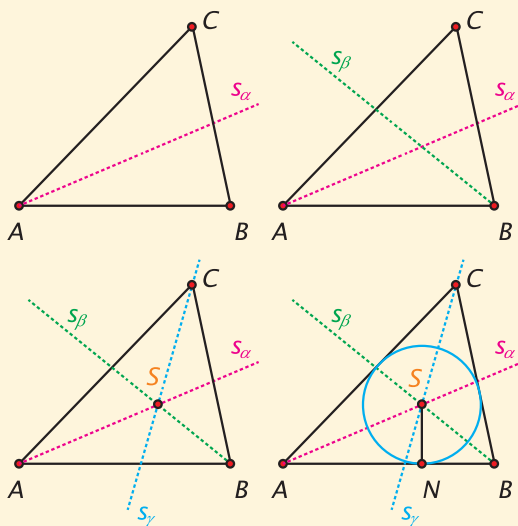
Zadaci

2. Nacrtnaj kutove zadanih veličina kutomjerom pa konstruiraj njihove simetrale. Kutomjerom provjeri dijeli li simetrala kut na dva jednaka dijela.

- a) $\alpha = 50^\circ$; b) $\beta = 90^\circ$; c) $\gamma = 150^\circ$;
d) $\delta = 30^\circ$; e) $\alpha = 75^\circ$; f) $\beta = 120^\circ$.

Primjer 4. Simetrale kutova trokuta

Nacrtajmo neki trokut i konstruirajmo simetralu svakog njegovog kuta. S obzirom na to da trokut ima tri kuta, imat će i tri simetrale kuta.



Simetralu kuta α označimo sa s_α , simetralu kuta β sa s_β i simetralu kuta γ sa s_γ . Sve tri simetrale kutova trokuta sijeku se u jednoj točki, označimo je sa S .

Pogledajmo zašto je ta točka posebna:

1. nacrtajmo okomicu iz točke S na stranicu \overline{AB} , označimo s N točku u kojoj ta okomica siječe stranicu \overline{AB} ;
2. uzmimo duljinu dužine \overline{SN} u šestar;
3. zabodimo iglu šestara u točku S i nacrtajmo kružnicu.

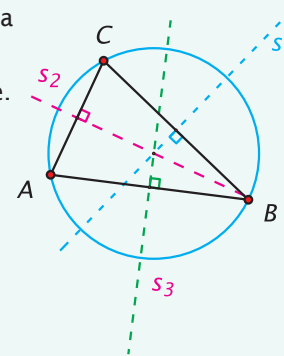
Ta kružnica se nalazi unutar trokuta i dodiruje svaku njegovu stranicu. Nazivamo je **upisana kružnica**. Središte S te kružnice je sjecište simetrala unutarnjih kutova trokuta.

Sjecište simetrala kutova trokuta je središte trokutu upisane kružnice.

Zadaci

3. Nacrtaj trokut i konstruiraj mu upisanu kružnicu ako je trokut:
 - a) pravokutan;
 - b) tupokutan;
 - c) jednakostraničan;
 - d) jednakokračan.
4. Nacrtaj četiri trokuta te im konstruiraj upisanu kružnicu.
5. Nacrtaj jednakostraničan trokut sa stranicom 6 cm. Nacrtaj mu i upisanu i opisanu kružnicu.

6. Sjecište simetrala stranica trokuta je središte trokutu opisane kružnice. Najprije nacrtaj trokut a zatim mu nacrtaj i opisanu kružnicu.



- a) šiljastokutan trokut;
 - b) tupokutan trokut;
 - c) pravokutan trokut.
7. Park ima oblik šiljastokutnog trokuta. Gdje bi trebalo smjestiti svjetiljku da ona osvijetli što veći dio parka?
 8. U bazen trokutastog oblika (šiljastokutan trokut) treba smjestiti vodoskok tako da voda iz njega doseže sva tri ruba tog bazena. Gdje je najbolje mjesto za taj vodoskok?

2.7. Konstrukcije nekih kutova

Crtanje kutova kutomjerom

Nacrtaj kutove od 30° , 45° , 60° i 90° pomoću kutomjera. U kakvoj vezi su kutovi od 60° i 30° te kutovi od 90° i 45° ?

U ovom poglavlju i u sljedećima želimo naučiti kako provesti geometrijsku konstrukciju trokuta. Geometrijska konstrukcija je geometrijski crtež koji smo napravili korištenjem samo ravnala i šestara. Upotrebom ravnala i šestara znamo crtati neke trokute, simetrale dužina i kutova te kružnice. Prije konstrukcija trokuta moramo još naučiti kako konstruirati neke kutove bez upotrebe kutomjera.

Konstrukcije i nacrti su potrebni prije izgradnje raznih objekata i strojeva. U posljednjih dvadesetak godina sve te konstrukcije i nacrti rade se pomoću osobnog računala. Za profesionalnu upotrebu koriste se razni CAD programi. CAD je skraćenica za Computer Aided Design - računalom potpomognut dizajn. To su programi koji

omogućavaju inženjerima i arhitektima konstruiranje i crtanje svega - od namještaja do aviona.

Ako želite i vi isprobati rad na konstrukcijama pomoću računala, upotrijebite neki od programa za dinamičnu geometriju kao što su GeoGebra, Geometer's Sketchpad, Cinderella ili GeoNext.



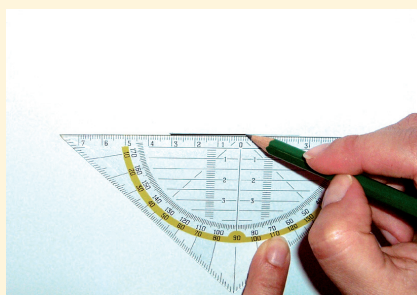
Primjer 1. Konstrukcija kuta od 60°

Kako bismo konstruirali kut od 60° ?

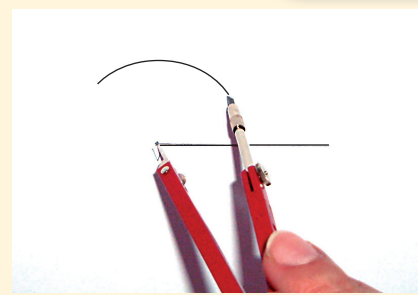
Rješenje:

Znamo da svaki kut u jednakostraničnom trokutu iznosi 60° . Kako jednakostraničan trokut znamo konstruirati, zaključujemo da je konstrukcija kuta od 60° zapravo dio konstrukcije jednakostraničnog trokuta.

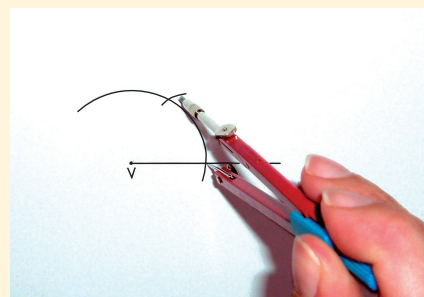
Recept za 60°



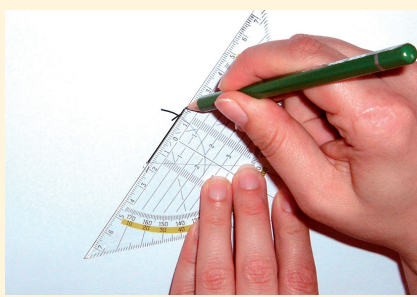
1. Nacrtamo polupravac s početnom točkom V;



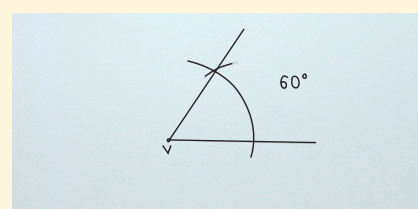
2. nacrtamo kružni luk iz V, koji presijeca nacrtani polupravac;



3. premjestimo šestar u sjecište kružnog luka i polupravca te, ne mijenjajući otvor šestara, presiječemo prvi kružni luk;



4. spojimo dobiveno sjecište s vrhom V.



Kut između nacrtanih polupravaca iznosi 60° . Kad bismo spojili sjecište kružnih lukova sa sjecištem kružnog luka i polupravca te vrhom V, dobili bismo jednakostraničan trokut.

Zadaci

- Konstruiraj kut od 60°
 - tako da su točka V i polupravac nacrtani kao u primjeru 1;
 - tako da su točka V i polupravac u nekom drugom položaju.
- Konstruiraj jednakostraničan trokut proizvoljne duljine stranice.

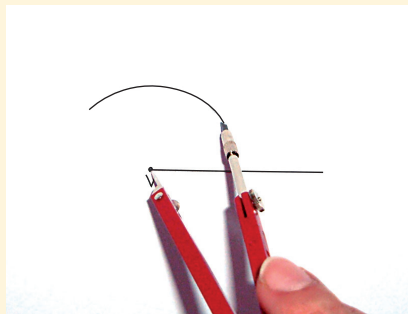
Primjer 2. Konstrukcija kuta od 30°

Kako bismo konstruirali kut od 30° ?

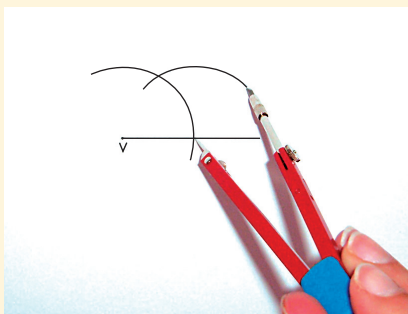
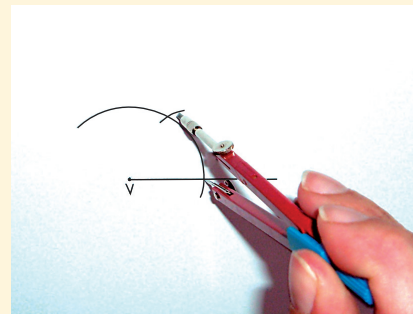
Rješenje:

Kut od 30° je polovica kuta od 60° . Da bismo konstruirali kut od 30° , najprije ćemo konstruirati kut od 60° , a zatim ga prepoloviti simetralom kuta.

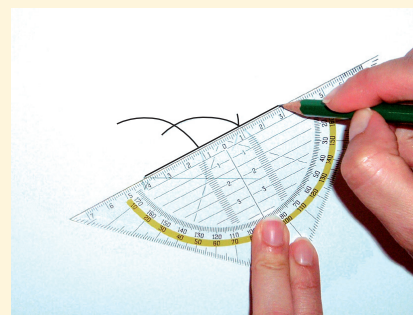
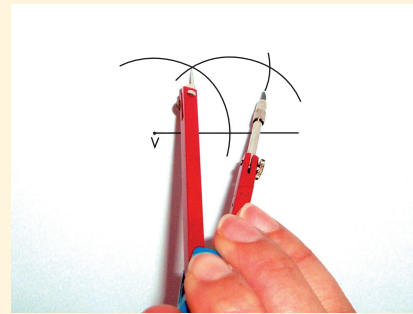
Recept za 30°



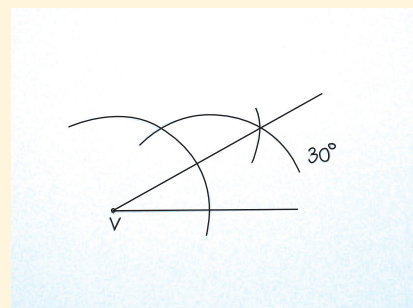
1. Konstruiramo kut od 60° ;



2. konstruiramo njegovu simetralu;



3. simetrala dijeli kut od 60° na dva kuta od 30° .



Zadaci

3. Konstruiraj kut od 30°
- tako da su točka V i polupravac nacrtani kao u primjeru 2;
 - tako da su točka V i polupravac u nekom drugom položaju.
4. Nacrtaj dužinu \overline{AB} duljine 5 cm. Konstruiraj dva kuta od 30° kojima su vrhovi točke A i B , a dužina \overline{AB} na zajedničkom kraku. Produži krakove konstruiranih kutova tako da se sijeku. Označi njihovo sjecište s C . Kakav je trokut $\triangle ABC$? Zašto?

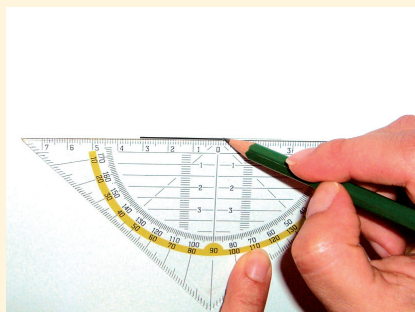
Recept za 120°

Primjer 3. Konstrukcija kuta od 120°

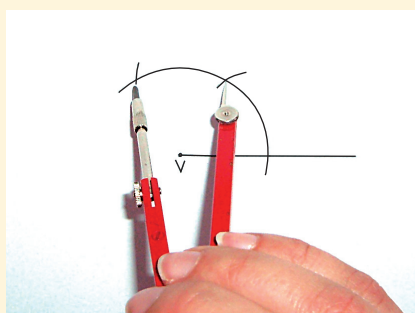
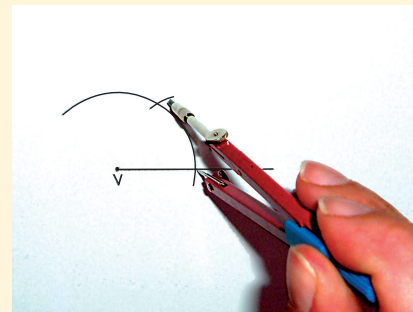
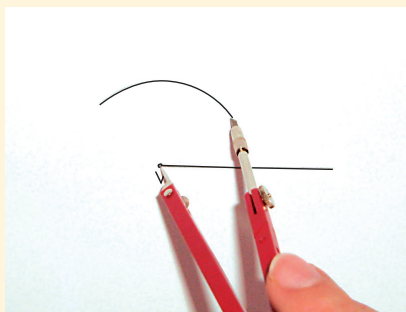
Kako bismo konstruirali kut od 120° ?

Rješenje:

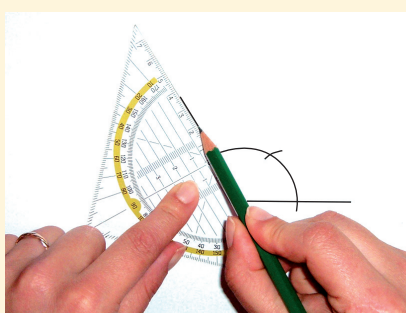
Kut od 120° je dvostruko veći od kuta od 60° . Da bismo konstruirali kut od 120° , dvaput zaredom ćemo konstruirati kut od 60° .



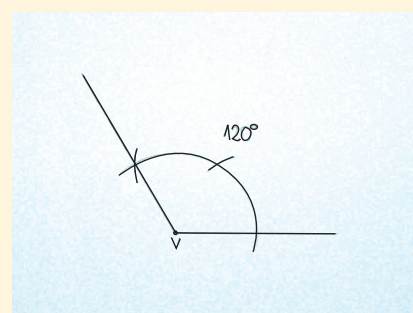
1. Konstruiramo kut od 60° ;



2. premjestimo šestar u sjecište kružnih lukova te, ne mijenjajući otvor šestara, presijecemo još jednom prvi kružni luk;



3. dobiveno sjecište spojimo s vrhom V .



Kut između nacrtanih polupravaca iznosi 120° .

Zadaci

5. Konstruiraj kut od 120°
- tako da su točka V i polupravac nacrtani kao u primjeru 3;
 - tako da su točka V i polupravac u nekom drugom položaju.
6. Nacrtaj dužinu \overline{AB} duljine 5 cm. U obje točke konstruiraj kutove od 120° tako da su okrenuti jedan prema drugom. Sijeku li se krakovi konstruiranih kutova? Zašto?
7. Nacrtaj dužinu \overline{AB} duljine 5 cm. U točki A konstruiraj kut od 30° , a u točki B od 120° tako da su okrenuti jedan prema drugom. Produlji krakove konstruiranih kutova tako da se sijeku. Označi njihovo sjecište s C . Kakav je trokut $\triangle ABC$? Zašto? Usporedi konstruirani trokut s trokutom u 6. zadatku.

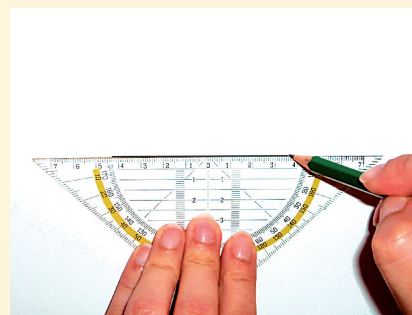
Primjer 4.
Konstrukcija kuta 90°

Kako bismo konstruirali kut od 90° ?

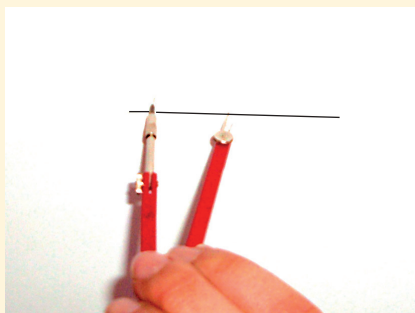
Recept za 90°

Rješenje:

Kut od 90° već znate nacrtati pomoću trokuta, samo trebate nacrtati okomicu. Kut od 90° možete konstruirati i šestarom tako da konstruirate simetralu dužine.

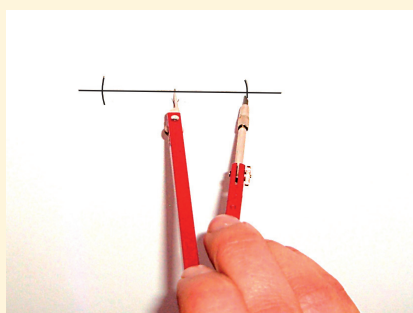


1. Nacrtamo pravac i na njemu istaknemo točku V ;

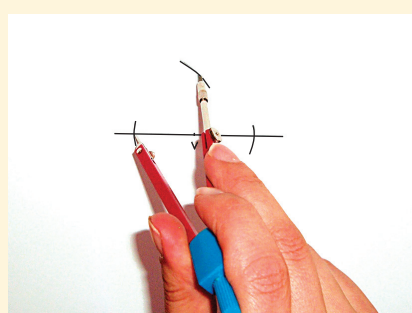


2. raširimo šestar proizvoljno;

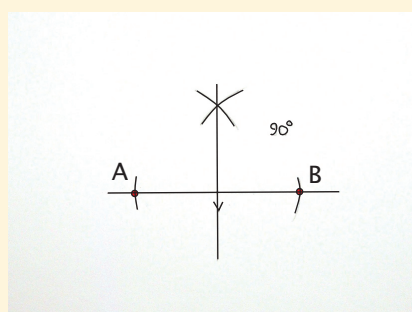
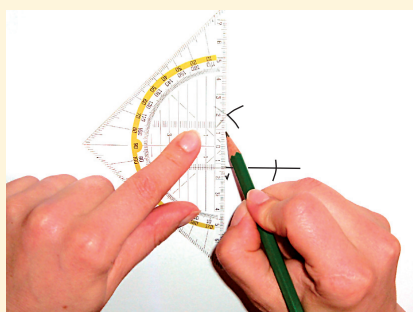
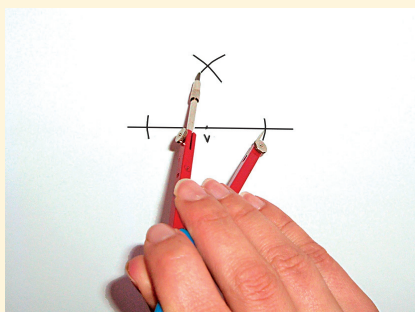
3. zabodemo iglu šestara u točku V ;



4. nacrtamo dva kružna luka koji presijecaju pravac lijevo i desno od točke V , tako smo dobili dužinu \overline{AB} ;



5. konstruiramo simetralu dužine \overline{AB} , okomita je na početni pravac.



Time smo zapravo konstruirali dva kuta od 90° .

Primijetimo da ubuduće ne trebamo označavati dužinu \overline{AB} na pravcu.

Zadaci

8. Konstruiraj kut od 90° pomoću simetrale dužine kao u primjeru 4.
9. Nacrtaj dužinu \overline{AB} duljine 5 cm. U obje točke konstruiraj kutove od 90° . Sijeku li se krakovi konstruiranih kutova? Zašto?
10. Nacrtaj dužinu \overline{AB} duljine 5 cm. U točki A konstruiraj kut od 30° , a u točki B od 90° tako da su okrenuti jedan prema drugom. Produlji krakove konstruiranih kutova tako da se sijeku. Označi njihovo sjecište s C . Kakav je trokut $\triangle ABC$? Zašto?
11. Nacrtaj dužinu \overline{AB} duljine 5 cm. Koje kutove, od naučenih, trebaš konstruirati u točkama A i B da bi konstruirani trokut bio pravokutan? Zašto?

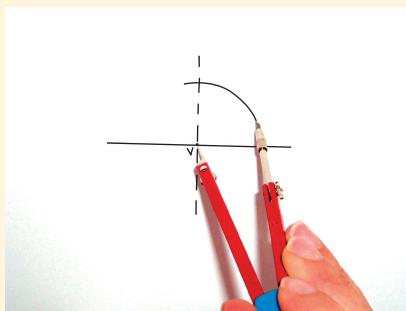
Primjer 5. Konstrukcija kuta 45°

Kako bismo konstruirali kut od 45° ?

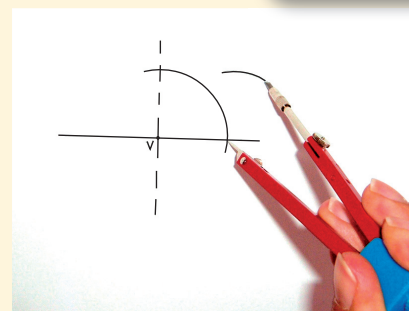
Rješenje:

Kut od 45° je polovica kuta od 90° . Da bismo konstruirali kut od 45° , prvo ćemo konstruirati kut od 90° , a zatim ga prepoloviti simetralom kuta.

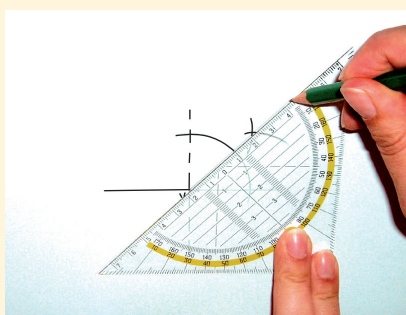
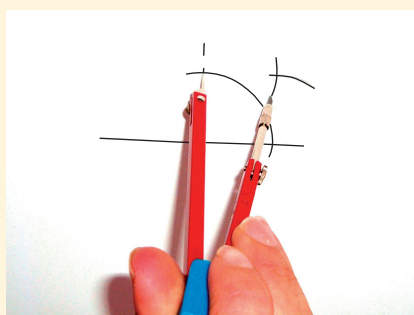
Recept za 45°



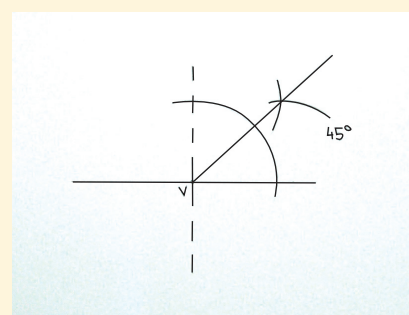
1. Konstruiramo kut od 90° ;



2. konstruiramo njegovu simetralu;

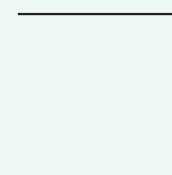
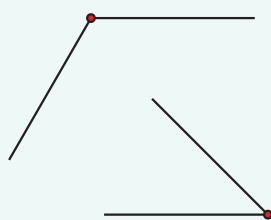


3. simetrala dijeli kut od 90° na dva kuta od 45° .



Zadaci

12. Konstruiraj kut od 45° :
- s desne strane okomice (kao u primjeru 5);
 - s lijeve strane okomice.
13. Nacrtaj dužinu \overline{AB} duljine 6 cm. U obje točke konstruiraj kutove od 45° tako da su okrenuti jedan prema drugom. Sijeku li se krakovi konstruiranih kutova? Ako da, označi njihovo sjecište sa C. Kakav je trokut $\triangle ABC$? Zašto?
14. Koliko stupnjeva imaju kutovi sa slike? Svakog od njih konstruiraj u bilježnicu.

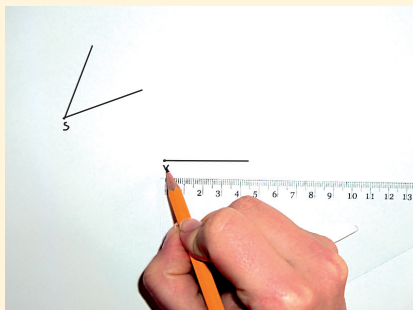


15. Nacrtaj dužinu \overline{AB} duljine 5 cm. U točki A konstruiraj kut od 60° , a u točki B kut od 30° tako da su okrenuti jedan prema drugom. Sijeku li se krakovi konstruiranih kutova? Ako da, označi njihovo sjecište sa C. Kakav je trokut $\triangle ABC$? Zašto?

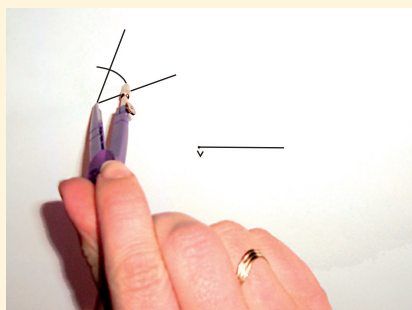
Primjer 6. Prenošnje kutova

Često nam jednak kut zatreba nekoliko puta u jednoj konstrukciji. Da ga ne bismo morali

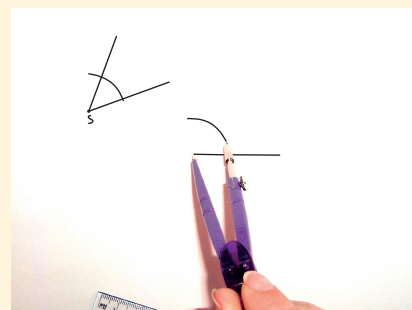
svaki put ponovno konstruirati, moramo naučiti kako se prenose kutovi.



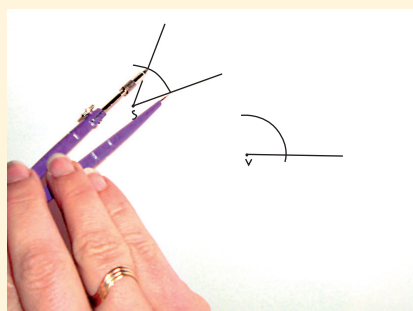
1. Konstruiramo zadani kut;
2. na mjestu gdje želimo prenijeti kut nacrtamo vrh i jedan krak kuta;



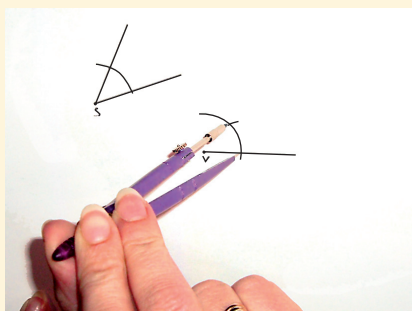
3. raširimo šestar proizvoljno;
4. zabodemo iglu šestara u vrh kuta;
5. nacrtamo kružni luk tako da presiječemo oba kraka kuta;



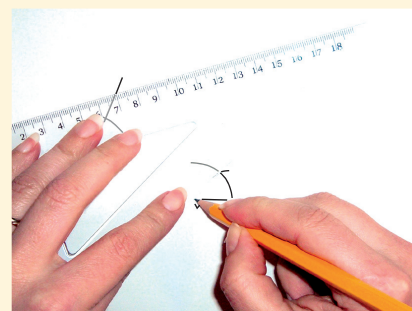
6. na mjestu gdje želimo prenijeti kut zabodemo iglu šestara u vrh kuta i ne mijenjajući otvor šestara nacrtamo kružni luk;



7. vratimo se na konstruirani kut - premjestimo šestar u jedno od sjecišta i raširimo ga tako da zahvaća dio od jednog sjecišta do drugog;



8. premjestimo šestar na novo mjesto i zabodemo iglu u sjecište kružnog luka i kraka kuta;
9. presiječemo taj kružni luk;



10. dobiveno sjecište spojimo s vrhom kuta.

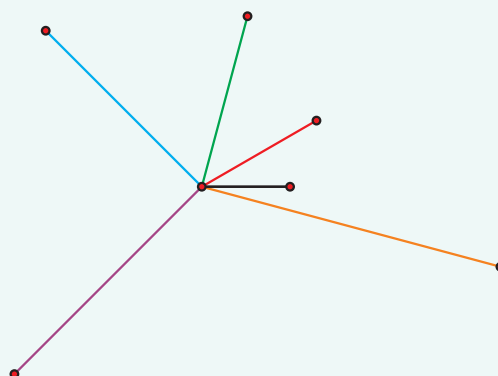
Recept za prenošenje kutova

Prenošenje kutova često se koristi kod različitih konstruktivnih zadataka u geometriji.

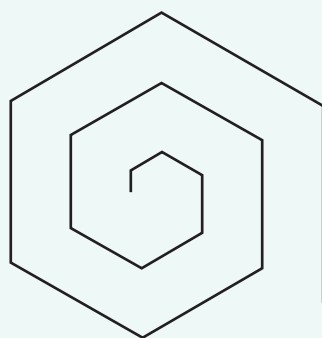
Koristeći dosad naučene konstrukcije kutova i simetrale kuta možemo konstruirati još mnoge kutove, primjerice 15° , 75° , 105° , 135° , 150° . No konstrukcije tih kutova traže malo više vremena, pa ćemo sve ostale kutove i dalje crtati pomoću kutomjera.

Zadaci

15. Konstruiraj zvijezdu kao na slici. Duljine krakova su redom: 2 cm, 3 cm, 4 cm, 5 cm, 6 cm i 7 cm.. Kutovi između krakova su redom: 30° , 45° , 60° , 90° , 120° . Kutove najprije konstruiraj sa strane, a zatim ih prenesi. Koliki kut je između posljednjeg i prvog kraka? Zašto?



16. Na slici je nacrtana šesterostrana spirala od 16 dužina. Konstruiraj takvu spiralu.



Opis postupka:

Najprije nacrtaj jednu stranicu duljine 1 cm, zatim kut od 120° , pa stranicu duljine 1.5 cm i ponovno

kut od 120° . Konstruktiju nastavi tako

da svaka sljedeća stranica bude za 0.5 cm dulja od prethodne. Kut je stalno 120° .

Kako bi konstruirao kvadratnu spiralu? Kakvu spiralu dobivamo ako umjesto kuta od 120° crtamo kut od 60° ?

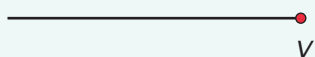
17. Naučili smo konstruirati kutove od 30° , 45° , 60° , 90° i 120° .

a) Koje trojke kutova možemo odabrati, među naučenima, tako da dobijemo trokut? Kutovi se mogu ponavljati više puta

b) Koji parovi kutova, među naučenima, ne tvore trokut?

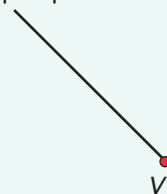
Vježbalica

- Nacrtaj dužine zadanih duljina i konstruiraj njihove simetrale.
 - $|AB| = 5.4$ cm ; b) $|CD| = 6.7$ cm ; c) $|EF| = 8$ cm .
- Nacrtaj kutove zadanih veličina kutomjerom pa konstruiraj njihove simetrale. Kutomjerom provjeri dijeli li simetrala kut na dva jednaka dijela.
 - $\alpha = 56^\circ$; b) $\beta = 100^\circ$; c) $\gamma = 80^\circ$;
 - $\delta = 40^\circ$; e) $\alpha = 175^\circ$; f) $\beta = 62^\circ$.
- Nacrtaj trokut i konstruiraj mu upisanu kružnicu.
 - pravokutan;
 - tupokutan;
 - jednakostraničan;
 - jednakokrtačan.
- Nacrtaj trokut i konstruiraj mu opisanu kružnicu.
 - pravokutan;
 - tupokutan;
 - jednakostraničan;
 - jednakokrtačan.
- Konstruiraj kutove:
 - 60° ; b) 45° ; c) 90° ; d) 120° ; e) 75° ; f) 30° .
- Konstruiraj kutove u vrhu V ako je položaj početnog polupravca kao na slici:



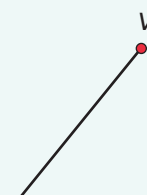
- 60° ; b) 45° ; c) 90° ; d) 120° ; e) 75° ; f) 30° .

- Konstruiraj kutove u vrhu V ako je položaj početnog polupravca kao na slici:



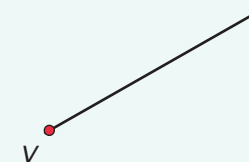
- 60° ; b) 45° ;
- 90° ; d) 120° ;
- 75° ; f) 30° .

- Konstruiraj kutove u vrhu V ako je položaj početnog polupravca kao na slici:



- 60° ; b) 45° ;
- 90° ; d) 120° ;
- 75° ; f) 30° .

- Konstruiraj kutove u vrhu V ako je položaj početnog polupravca kao na slici:



- 60° ; b) 45° ;
- 90° ; d) 120° ;
- 75° ; f) 30° .

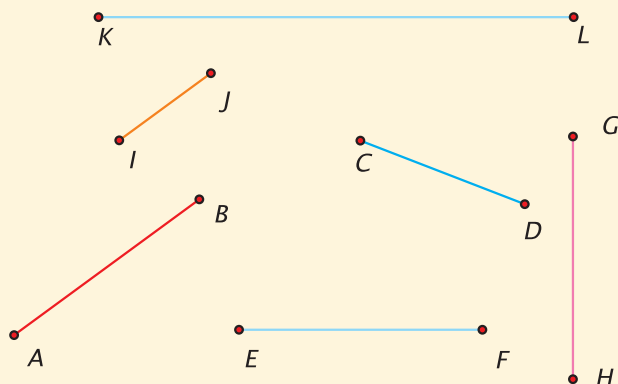
- Nacrtaj kutomjerom ili konstruiraj šestarom kut $\sphericalangle V$ i jedan polupravac s početkom u točki T izvan tog kuta. Zatim prenesi kut tako da mu vrh bude u točki T, a jedan krak na tom polupravcu.

- 45° ; b) 50° ; c) 60° ; d) 80° ;
- 120° ; f) 90° ; g) 70° ; h) 75° .

Primjer 2. Sukladne dužine

Sukladnost dužina

Pogledajmo dužine na slici. Koje od njih su sukladne crvenoj dužini \overline{AB} ?



Dvije dužine su sukladne, ako se mogu položiti jedna na drugu tako da se točno poklapaju.

Rješenje:

Da bismo lakše pronašli sukladne dužine, precrtajmo dužinu \overline{AB} na papir pa je prislonimo uz ostale dužine da vidimo s kojom se točno poklapa.

Vidimo da dužinu \overline{AB} možemo potpuno preklopiti s dužinama \overline{EF} i \overline{GH} . Dakle, dužine \overline{AB} , \overline{EF} i \overline{GH} su sukladne.

Što te tri dužine imaju različito, a što jednako? Zaključujemo da sukladne dužine mogu biti u različitim položajima, imati različite krajnje točke, biti nacrtane različitom bojom. Važno je da imaju jednake duljine.

Važno

Dužine su sukladne ako imaju jednake duljine.

Matematička oznaka za sukladnost je \cong .

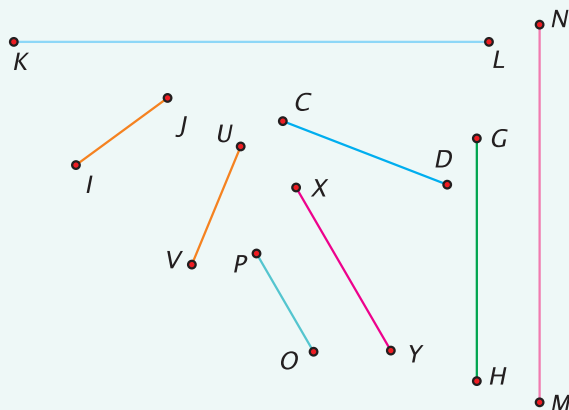
Sukladnost dužina u ovom primjeru zapisujemo ovako: $\overline{AB} \cong \overline{EF}$ i $\overline{AB} \cong \overline{GH}$. Čitamo: "dužina AB je sukladna dužini EF , dužina AB je sukladna dužini GH ".

 \cong

"je sukladan"

Zadaci

4. Napiši parove sukladnih dužina koje se nalaze na slici.

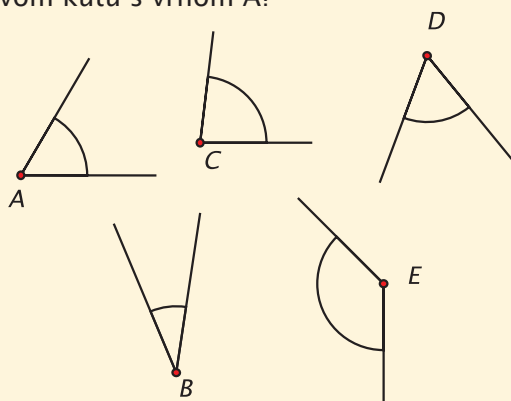


5. Nacrtaj dužinu \overline{AB} duljine 45 mm te nacrtaj još 3 njoj sukladne dužine.
6. Nacrtaj pravokutnik sa stranicama duljine 2 cm i 4 cm. Koje njegove dužine su sukladne?
7. Nacrtaj neki jednakokračan trokut i napiši koje njegove stranice su sukladne.
8. Nacrtaj neki jednakostraničan trokut i napiši koje njegove stranice su sukladne.

Primjer 3. Sukladni kutovi

Sukladnost kutova

Pogledajmo kutove na slici. Pojednostavljeno ćemo kutove označiti i razlikovati po njihovim vrhovima. Koji od njih su sukladni plavom kutu s vrhom A?



Dva kuta su sukladna, ako se mogu položiti jedan na drugi tako da se točno poklapaju.

Rješenje

Da bismo lakše pronašli sukladne kutove, precrtajmo kut $\sphericalangle A$ na papir, izrežimo ga, pa prislonimo na ostale kutove da vidimo s kojim se potpuno preklapa.

Vidimo da kut $\sphericalangle A$ možemo potpuno preklopiti s kutom $\sphericalangle D$. Kažemo da su $\sphericalangle A$ i $\sphericalangle D$ sukladni, tj. $\sphericalangle A \cong \sphericalangle D$.

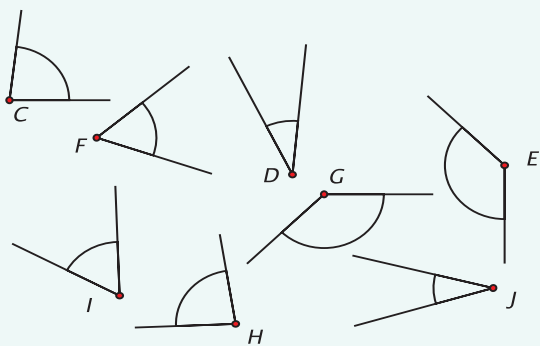
Što ta dva kuta imaju različito, a što jednako? Zaključujemo da sukladni kutovi mogu biti u različitim položajima, imati različite oznake, biti nacrtani različitom bojom. Važno je da imaju jednake veličine.

Važno

Kutovi su sukladni ako imaju jednake veličine.

Zadaci

9. Ispiši parove sukladnih kutova koji se nalaze na slici.



10. Nacrtaj neki jednakostraničan trokut. Napiši sukladne kutove tog trokuta.

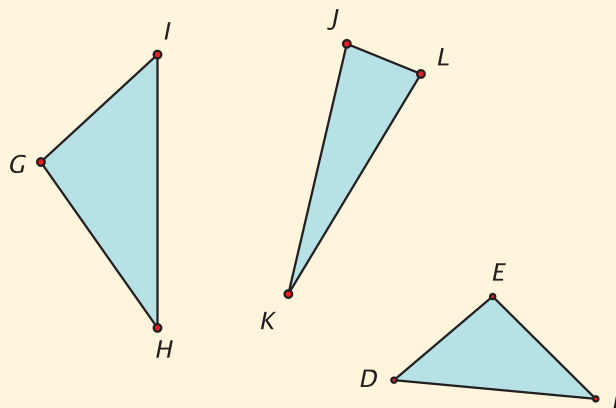
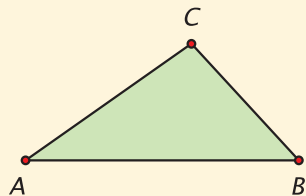
11. Nacrtaj neki jednakokrčan trokut. Napiši sukladne kutove tog trokuta.

12. Nacrtaj neki kvadrat. Koji kutovi kvadrata su sukladni?

Primjer 4. Sukladni trokuti

Sukladnost trokuta

Pogledajmo trokute na slici. Koji od njih su sukladni zelenom trokutu $\triangle ABC$?



Rješenje:

Za dva trokuta kažemo da su sukladna, ako se mogu položiti jedan na drugi tako da se potpuno preklapaju.

Da bismo lakše pronašli sukladne trokute, precrtajmo trokut $\triangle ABC$ na papir, izrežimo ga, pa prislonimo na ostale trokute da vidimo s kojim se potpuno preklapaju.

Vidimo da trokut $\triangle ABC$ možemo preklopiti s trokutom $\triangle GHI$. Trokuti $\triangle ABC$ i $\triangle GHI$ su sukladni, tj. $\triangle ABC \cong \triangle GHI$.

Što ta dva trokuta imaju različito, a što jednako?

Zaključujemo da sukladni trokuti mogu biti u različitim položajima, imati različite oznake, biti nacrtani različitom bojom.

Sukladni trokuti imaju sukladne stranice i sukladne kutove.

Vidimo da stranici \overline{AB} trokuta $\triangle ABC$ odgovara stranica \overline{HI} trokuta $\triangle GHI$.

Stranici \overline{BC} trokuta $\triangle ABC$ odgovara stranica \overline{IG} trokuta $\triangle GHI$. Stranici \overline{CA} trokuta $\triangle ABC$ odgovara stranica \overline{GH} trokuta $\triangle GHI$.

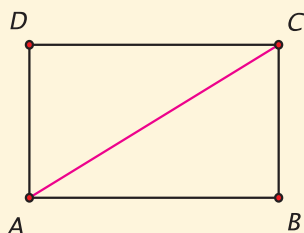
U trokutima $\triangle ABC$ i $\triangle GHI$ sukladne stranice su:

$$\overline{AB} \cong \overline{HI} \quad \overline{BC} \cong \overline{IG} \quad \overline{CA} \cong \overline{GH}.$$

Kutu $\sphericalangle CAB$ trokuta $\triangle ABC$ odgovara kut $\sphericalangle GHI$ trokuta $\triangle GHI$. Kutu $\sphericalangle ABC$ trokuta $\triangle ABC$ odgovara kut $\sphericalangle HIG$ trokuta $\triangle GHI$. Kutu $\sphericalangle BCA$ trokuta $\triangle ABC$ odgovara kut $\sphericalangle IGH$ trokuta $\triangle GHI$.

Primjer 5. Primjena 1. poučka o sukladnosti trokuta

Upotrebom poučka o sukladnosti SSS obrazložimo činjenicu da dijagonala pravokutnika dijeli pravokutnik na dva sukladna trokuta. Želimo dokazati da su trokuti $\triangle ABC$ i $\triangle ACD$ sukladni.



U trokutima $\triangle ABC$ i $\triangle GHI$ sukladni kutovi su:

$$\sphericalangle CAB \cong \sphericalangle GHI;$$

$$\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle HIG;$$

$$\sphericalangle BCA \cong \sphericalangle IGH.$$

Važno

Trokuti su sukladni ako su im sukladne odgovarajuće stranice i sukladni odgovarajući kutovi.

Naučili smo da sukladni trokuti imaju jednake duljine svih triju stranica i jednake veličine svih triju kutova. To znači da bismo trebali, želimo li provjeriti jesu li dva trokuta sukladna, mjeriti sve njegove stranice i kutove. Zanima nas možemo li i na temelju manje podataka o trokutima zaključiti jesu li oni sukladni.

Matematičari su davno zaključili da je trokut jednoznačno određen sa:

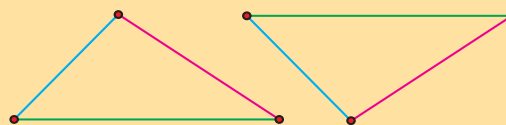
- sve tri stranice,
- dvije stranice i kutom između njih,
- jednom stranicom i dva kuta uz nju.

Tvrđnje o sukladnosti trokuta iskazane su u obliku poučaka.

Važno**1. Poučak o sukladnosti trokuta:**

stranica - stranica - stranica (SSS)

Dva su trokuta sukladna ako su im sve tri odgovarajuće stranice sukladne.

**Rješenje:**

Pogledajmo duljine njihovih stranica.

$|AB| = |CD|$ jer su to usporedne stranice pravokutnika. Dakle, $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.

$|BC| = |AD|$ jer su to usporedne stranice pravokutnika. Dakle, $\overline{BC} \cong \overline{AD}$.

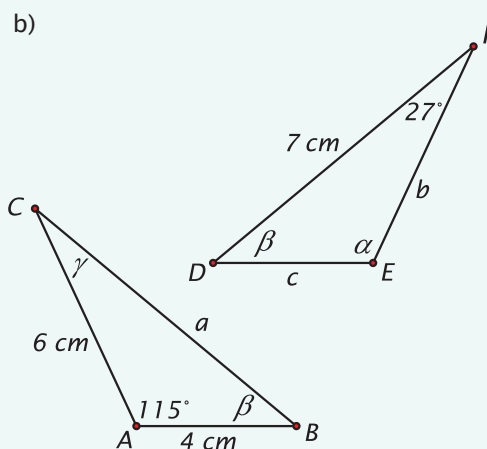
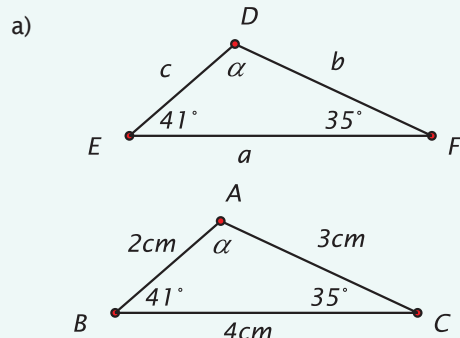
Dijagonala \overline{AC} je zajednička stranica za oba trokuta, pa je ona sukladna sama sebi.

Dakle, trokuti $\triangle ABC$ i $\triangle ACD$ imaju sukladne sve tri stranice. Po poučku SSS ta dva trokuta su sukladna.

Zadaci

13. Nacrtaj $\triangle ABC$ sa stranicama duljine 4 cm, 6 cm i 8 cm. Nacrtaj $\triangle DEF$ sa stranicama duljine 4 cm, 6 cm i 8 cm. Jesu li ta dva trokuta sukladna? Zašto? Napiši odgovarajuće stranice i odgovarajuće kutove.

14. Trokuti $\triangle ABC$ i $\triangle DEF$ su sukladni. Napišite duljine stranica i veličine kutova koje nedostaju na trokutima.

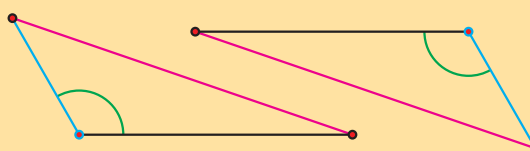


15. Objasni činjenicu da dijagonala kvadrata dijeli kvadrat na dva sukladna trokuta. Upotrijebi poučak o sukladnosti stranica - stranica - stranica.

Važno

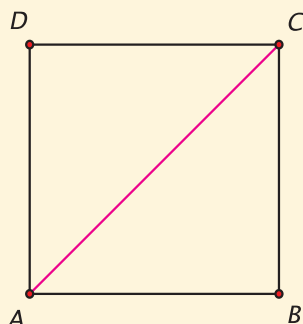
2. Poučak o sukladnosti trokuta: stranica - kut - stranica (SKS)

Dva su trokuta sukladna ako su im sukladne dvije odgovarajuće stranice i kut između njih.



Primjer 6. Primjena 2. poučka o sukladnosti trokuta

Upotrebom poučka o sukladnosti SKS obrazložimo činjenicu da dijagonala kvadrata dijeli kvadrat na dva sukladna trokuta. Želimo dokazati da su trokuti $\triangle ABC$ i $\triangle ACD$ sukladni.



Rješenje:

Pogledajmo duljine njihovih stranica i veličine kutova.

$|AB| = |CD|$ jer su to stranice kvadrata. Dakle, $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.

$|BC| = |AD|$ jer su to stranice kvadrata. Dakle, $\overline{BC} \cong \overline{AD}$.

$\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle CDA$ jer su oba kuta prava. Dakle, trokuti $\triangle ABC$ i $\triangle ACD$ imaju sukladne dvije stranice i kut između njih. Po poučku SKS, ta dva trokuta su sukladna.

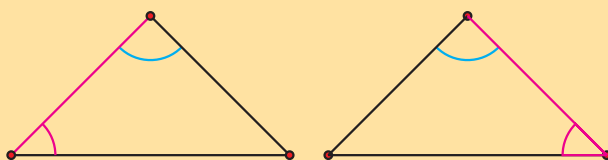
Zadaci

16. Nacrtaj $\triangle ABC$ sa stranicama $a = 4$ cm, $b = 6$ cm i kutom između njih $\gamma = 60^\circ$. Nacrtaj $\triangle DEF$ sa stranicama $d = 4$ cm, $e = 6$ cm i kutom između njih $\gamma = 60^\circ$. Jesu li ta dva trokuta sukladna? Zašto? Napiši odgovarajuće stranice i odgovarajuće kutove.
17. Obrazloži činjenicu da dijagonala pravokutnika dijeli pravokutnik na dva sukladna trokuta. Upotrijebi poučak o sukladnosti stranica - kut - stranica.
18. Obrazloži zašto su dva jednakokrana trokuta sukladna ako imaju sukladne krakove i kut nasuprot osnovici.
19. Pokaži da je svaka točka na simetrali dužine jednako udaljena od krajeva dužine.

Važno

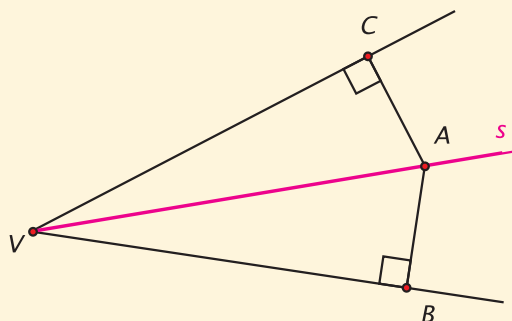
3. Poučak o sukladnosti trokuta: kut - stranica - kut (KSK)

Dva su trokuta sukladna ako im je sukladna jedna odgovarajuća stranica i ako su im sukladna dva odgovarajuća kuta koji leže na toj stranici.



Primjer 7. Primjena 3. poučka o sukladnosti trokuta

Pokažimo da je svaka točka na simetrali kuta jednako udaljena od krakova kuta.



Rješenje:

Nacrtamo neki kut s vrhom V i njegovu simetralu. Na simetrali kuta odaberemo neku točku i označimo je s A . Udaljenost od točke A do krakova mjeri se po okomici, pa nacrtajmo

okomicu iz točke A na jedan, a zatim i na drugi krak. Točke u kojima okomice sijeku krakove označimo s B i C . Pogledajte sliku.

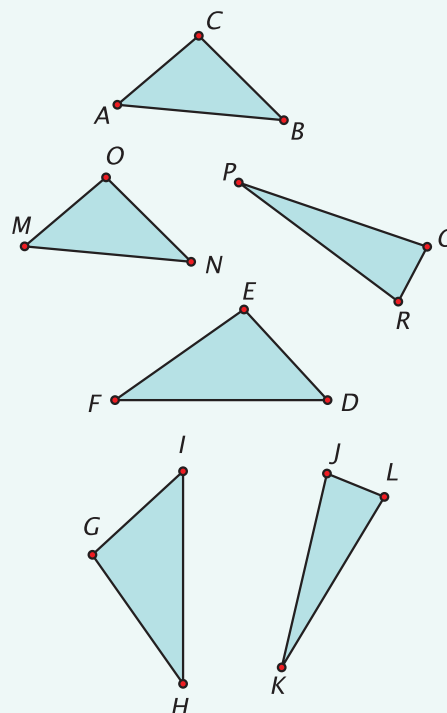
Trokuti $\triangle VBA$ i $\triangle VAC$ su pravokutni trokuti. Ta dva trokuta imaju zajedničku jednu stranicu - hipotenuzu \overline{VA} . Simetrala dijeli kut na dva dijela jednake veličine, ti su kutovi sukladni, $\sphericalangle BVA \cong \sphericalangle AVC$. Kako su ti trokuti pravokutni i treći kut im mora biti sukladan, $\sphericalangle VAB \cong \sphericalangle VAC$. Dakle, trokuti $\triangle VBA$ i $\triangle VAC$ imaju sukladnu jednu stranicu i dva kuta na njoj, pa su sukladni po poučku KSK.

Pošto su trokuti $\triangle VBA$ i $\triangle VAC$ sukladni, oni imaju sukladne i sve stranice, $\overline{VA} \cong \overline{VA}$, $\overline{VB} \cong \overline{VC}$, $\overline{AB} \cong \overline{AC}$. Iz toga zaključujemo da su duljine dužina \overline{AB} i \overline{AC} jednake, pa je točka A jednako udaljena od krakova kuta. Kako smo točku A birali proizvoljno, ta tvrdnja vrijedi za svaku točku na simetrali kuta.

Zadaci

20. Nacrtaj $\triangle ABC$ sa stranicom $a = 5$ cm i kutovima na njoj $\beta = 45^\circ$ i $\gamma = 60^\circ$. Nacrtaj $\triangle DEF$ sa stranicom $d = 5$ cm i kutovima na njoj $\beta = 45^\circ$ i $\gamma = 60^\circ$. Jesu li ta dva trokuta sukladna? Zašto? Napiši odgovarajuće stranice i odgovarajuće kutove.
21. Obrazloži činjenicu da okomica na osnovicu, kroz nasuprotni vrh, jednakokravnog trokuta dijeli jednakokravan trokut na dva sukladna pravokutna trokuta. Upotrijebi poučak o sukladnosti kut - stranica - kut.
22. Obrazloži ove tvrdnje za paralelogram koristeći jednakost kutova s usporednim kracima i poučke o sukladnosti:
- nasuprotni kutovi paralelograma su jednakih veličina;
 - dijagonala paralelograma dijeli paralelogram na dva sukladna trokuta;
 - dijagonale paralelograma se međusobno raspolavljaju.
23. Konstruiraj jednakostraničan trokut $\triangle ABC$ sa stranicom duljine 6 cm. Konstruiraj točke D , E i F koje su polovišta stranica jednakostraničnog trokuta $\triangle ABC$. Povežemo li te točke dužinama, podijelit ćemo početni trokut na četiri manja trokuta. Jesu li sva ta četiri manja trokuta sukladna?

11. Napiši parove sukladnih trokuta koji se nalaze na slici.



12. Nacrtaj jednakostraničan trokut $\triangle ABC$ i njemu sukladan trokut $\triangle DEF$.
13. Nacrtaj dva sukladna pravokutna trokuta.

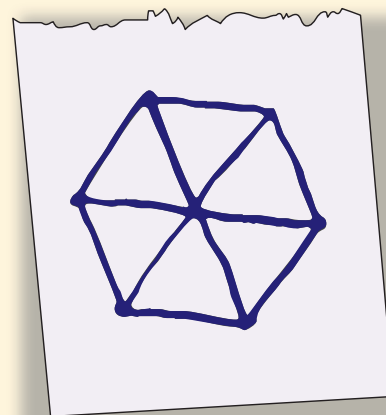


4. Poučak o sukladnosti trokuta: stranica - stranica - kut (SSK)

Dva su trokuta sukladna ako su im sukladne dvije odgovarajuće stranice i kut nasuprot duljoj stranici.

2.9. Osnovne konstrukcije trokuta

Anina mama želi napraviti cvjetnu gredicu za 6 različitih vrsta cvijeća. Ana je predložila da nacrtaju gredicu sastavljenu od 6 jednakostraničnih trokuta sa stranicom 2 m. Ana je nacrtala skicu prostoručno, no sad treba napraviti precizan crtež. Pomogni Ani nacrtati tu gredicu na papiru, tako da staviš duljinu stranice trokuta 2 cm. Procijeni kolika je najveća širina gredice.



Naučili smo konstruirati neke kutove i sad ih želimo upotrijebiti pri konstrukciji trokuta. Konstruirati neki trokut znači nacrtati ga pomoću ravnala i šestara. Takve konstrukcije zahtijevaju da najprije proučimo zadane podatke i zatim smislimo redosljed konstruiranja pojedinih dijelova. Nakon konstrukcije, dobro bi bilo porazgovarati o mogućim drugačijim rešenjima postavljenog zadatka.

Osnovni postupci pri konstrukciji trokuta:

1. **Analiza:** proučavanje zadanih uvjeta, načina konstrukcije i crtanje skice,
2. **Konstrukcija:** konstruiranje kutova i dužina kojima se dobiva traženi trokut,
3. **Dokaz:** utvrđivanje da konstruirani trokut zadovoljava uvjete zadatka,
4. **Rasprava:** ispitivanje uvjeta uz koje se zadatak može riješiti te koliko ima rješenja.



Osnovne konstrukcije trokuta dijele se u tri grupe, ovisno zadanim elementima trokuta:

- zadane sve tri stranice,
- zadane dvije stranice i kut između njih,
- zadana jedna stranica i dva kuta uz nju.

Primjer 1. Konstrukcija trokuta, ako su zadane duljine sve tri stranice

Konstruirajmo trokut kojemu su zadane duljine svih triju stranica: $a = 6$ cm, $b = 5$ cm i $c = 4$ cm.

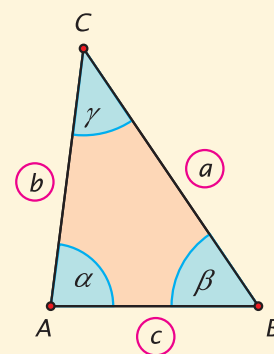
Rješenje:

Najprije prostoručno nacrtajmo skicu i na njoj označimo zadane elemente trokuta.

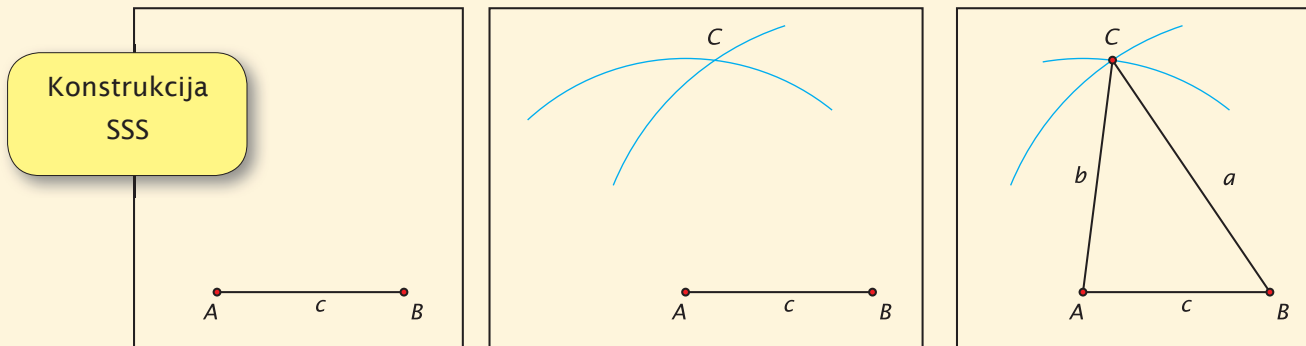
Skica nam omogućava da lakše uočimo međusobne odnose zadanih elemenata trokuta te odredimo redosljed konstrukcija.

Kad su zadane sve tri stranice trokuta svejedno je s kojom od njih

počinjemo konstrukciju. S obzirom na to da je na skici nacrtana stranica \overline{AB} vodoravno dolje, početak ćemo konstrukciju s njom.



Redoslijed konstrukcije:



Konstrukcija
SSS

1. stranica c , tj. \overline{AB} ;
2. kružni luk sa središtem u točki A i polumjerom a , iznad dužine \overline{AB} ;
3. kružni luk sa središtem u točki B i polumjerom b , iznad dužine \overline{AB} ;
4. sjecište nacrtanih kružnih lukova je točka C ;
5. spojimo točku C s točkama A i B .

Kružni lukovi se sijeku u još jednoj točki, s “donje strane” dužine \overline{AB} . Time bismo dobili sukladan trokut, samo “okrenut prema dolje”. Na ovaj način konstruiraju se i jednakostraničan i jednakokrtačan trokut. Iz konstrukcije slijedi da dobiveni trokut zadovoljava zadane uvjete.

Rješenje je jedinstveno zbog poučka SSS o sukladnosti trokuta, pa kažemo da je trokut jednoznačno određen ako su mu poznate duljine svih triju stranica. Konstrukcija je moguća ako je duljina svake stranice manja od zbroja preostalih dviju.

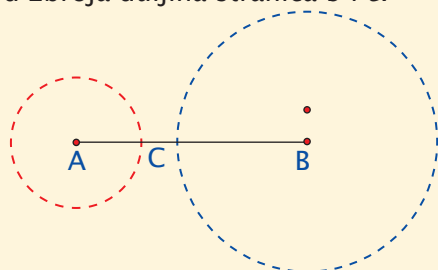
Primjer 2. Nejednakost trokuta

Konstruirajmo trokut kojemu su zadane duljine svih triju stranica: $a = 4$ cm, $b = 2$ cm i $c = 7$ cm.

Rješenje:

Konstrukciju izrađujemo istim redoslijedom kao i u prethodnom primjeru:

1. stranica c , tj. \overline{AB} ;
2. kružni luk sa središtem u točki A i polumjerom b , iznad dužine \overline{AB} ;
3. kružni luk sa središtem u točki B i polumjerom a , iznad dužine \overline{AB} ;
4. sjecište nacrtanih kružnih lukova je točka C ; naišli smo na problem jer se kružni lukovi ne sijeku zato što je duljina stranice a veća od zbroja duljina stranica b i c .



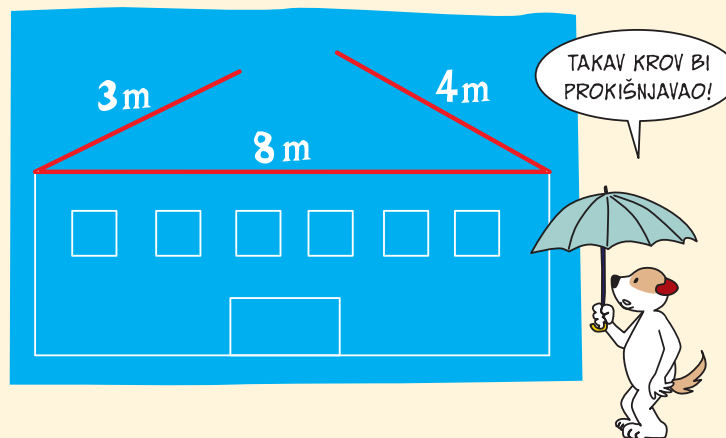
Trokut s duljinama stranica 7 cm, 2 cm i 4 cm ne možemo nacrtati, jer dužine tih duljina ne zatvaraju trokut.

Nejednakost trokuta

Trokut sa zadanim duljinama svih stranica može se konstruirati ako je duljina svake stranice trokuta manja od zbroja duljina ostalih dviju stranica.

$$a < b + c, \quad b < a + c, \quad c < a + b.$$

Primjerice, trokuti s ovim duljinama stranica ne postoje: 3, 4, 8; 5, 5, 10; 9, 5, 3.



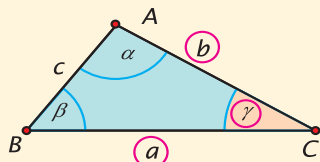
Zadaci

- Konstruiraj trokut kojemu su zadane duljine svih triju stranica.
 - $a = 3$ cm, $b = 4$ cm, $c = 5$ cm;
 - $a = 6$ cm, $b = 4$ cm, $c = 3$ cm;
 - $a = 6$ cm, $b = 7$ cm, $c = 5$ cm;
 - $a = 3.5$ cm, $b = 4.5$ cm, $c = 5.5$ cm.
- Konstruiraj jednakokraničan trokut.
 - $a = 3$ cm;
 - $a = 5$ cm;
 - $a = 4.5$ cm.
 - $a = 26$ mm;
 - $a = 35$ mm;
 - $a = 60$ mm.
- Konstruiraj jednakokračan trokut s osnovicom a i krakovima b .
 - $a = 3$ cm, $b = 5$ cm;
 - $a = 6$ cm, $b = 4$ cm;
 - $a = 6.5$ cm, $b = 7$ cm.
- Koje od zadanih trojki brojeva mogu biti duljine stranica trokuta?
 - 3, 3, 3;
 - 3, 4, 7;
 - 4, 4, 10;
 - 15, 16, 17.
- Napiši sve mogućnosti duljina stranica trokuta kojemu je opseg 12 cm, a sve duljine stranica prirodni brojevi. Postoji li koji jednakokraničan ili jednakokračan trokut među njima?

Primjer 3. Konstrukcija trokuta kojemu su zadane duljine dviju stranica i veličina kuta između njih

Konstruirajmo trokut kojemu su zadane duljine dviju stranica $a = 5$ cm, $b = 4$ cm i veličina kuta između njih $\gamma = 30^\circ$.

Rješenje:



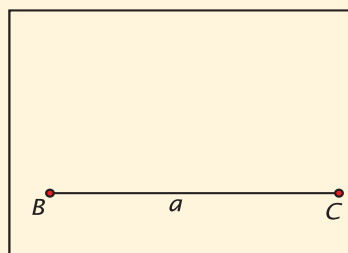
Najprije prostoručno nacrtajmo skicu tako da je zadana stranica a "dolje". Na skici označimo zadane elemente trokuta.

Konstrukciju počinjemo s jednom od zadanih stranica, nije važno kojom. Mi ćemo početi sa stranicom a .

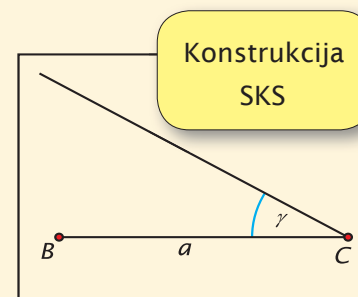
Mogli smo konstrukciju kuta γ napraviti s "donje" strane dužine \overline{BC} . Time bismo dobili još jedan trokut, sukladan konstruiranome, samo "okrenut prema dolje".

Na ovaj način konstruiramo i pravokutne trokute. Iz konstrukcije slijedi da dobiveni trokut zadovoljava zadane uvjete. Rješenje je jedinstveno zbog poučka SKS o sukkladnosti trokuta, pa kažemo da je trokut jednoznačno

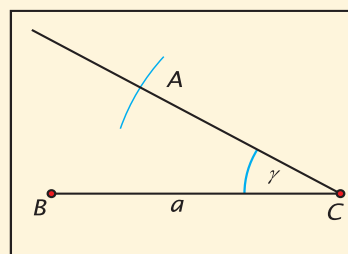
Redosljed konstrukcije:



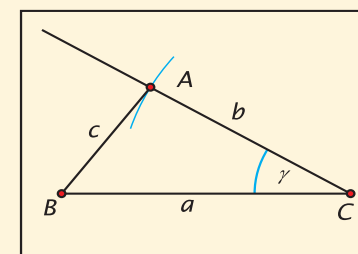
1. stranica a tj. \overline{BC} ;



2. u vrhu C konstruiramo kut γ , tako da mu je jedan krak \overline{BC} ;



3. kružni luk sa središtem u točki C i polumjerom b , tako da presiječemo drugi krak kuta γ ;



4. sjecište kružnog luka i drugog kraka kuta je točka A ;
5. spojimo točku A s točkom B .

Niti jedan kut u trokutu ne može biti veći od 180° .
Zbroj kutova u trokutu je 180° .



određen ako su mu poznate duljine dviju stranica i veličina kuta između njih. Konstrukcija je moguća ako je veličina kuta manja od 180° .

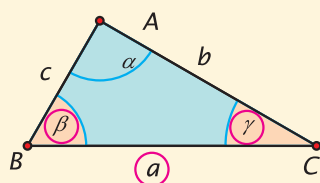
Zadaci

6. Konstruiraj trokut kojemu su zadane duljine dviju stranica i veličina kuta između njih.
- $a = 3$ cm, $b = 4$ cm, $\gamma = 60^\circ$;
 - $a = 6$ cm, $c = 4$ cm, $\beta = 45^\circ$;
 - $b = 6$ cm, $c = 7$ cm, $\alpha = 90^\circ$;
 - $b = 3.5$ cm, $c = 4.5$ cm, $\alpha = 120^\circ$.
 - $a = 35$ mm, $c = 42$ mm, $\beta = 60^\circ$;
 - $b = 39$ mm, $a = 47$ mm, $\gamma = 30^\circ$.
7. Konstruiraj pravokutan trokut kojemu su zadane duljine kateta.
- $a = 3$ cm, $b = 5$ cm; b) $a = 6$ cm, $b = 4$ cm.
8. Konstruiraj jednakokrčan trokut kojemu je zadana duljina kraka i kuta između njih, tj. kuta nasuprot osnovice.
- $b = 5$ cm, $\alpha = 45^\circ$;
 - $b = 3.5$ cm, $\alpha = 120^\circ$.

Primjer 4. Konstrukcija trokuta kojemu je zadana duljina jedne stranice i veličina dvaju kutova uz nju

Konstruirajmo trokut kojemu je zadana duljina jedne stranice, $a = 5$ cm i veličina dvaju kutova uz nju $\beta = 60^\circ$ i $\gamma = 30^\circ$.

Rješenje:



Najprije prostoručno nacrtajmo skicu tako da je zadana stranica a "dolje". Na skici označimo zadane elemente trokuta.

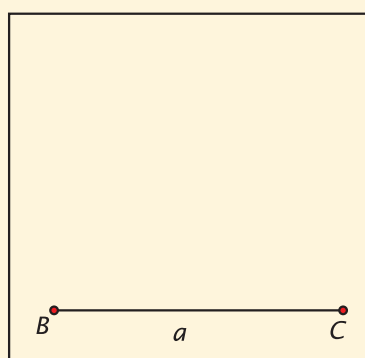
Pošto pri ovoj konstrukciji imamo zadanu duljinu samo jedne stranice, uvijek počinjemo konstrukciju s crtanjem te stranice, a zatim slijede kutovi bilo kojim redoslijedom.

Konstrukcija KSK

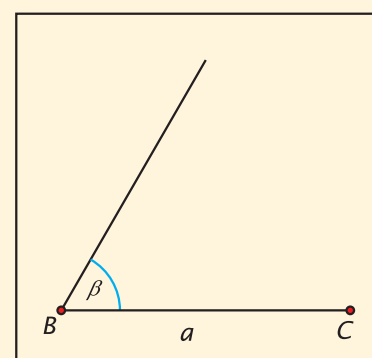
Mogli smo konstrukcije kutova β i γ napraviti s "donje" strane dužine \overline{BC} .

Time bismo dobili još jedan trokut, sukladan konstruiranome, samo "okrenut prema dolje". Iz konstrukcije slijedi da dobiveni trokut zadovoljava zadane uvjete.

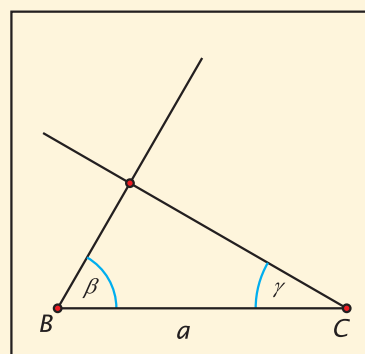
Redoslijed konstrukcije:



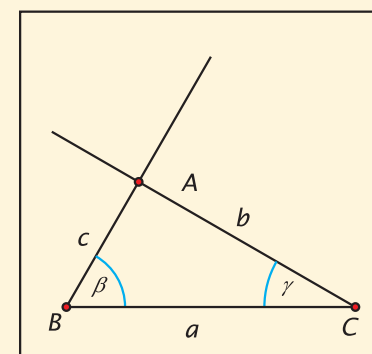
1. stranica a , tj. \overline{BC} ;



2. u vrhu B konstruiramo kut β , tako da mu je jedan krak \overline{BC} ;



3. u vrhu C konstruiramo kut γ , tako da mu je jedan krak \overline{BC} ;



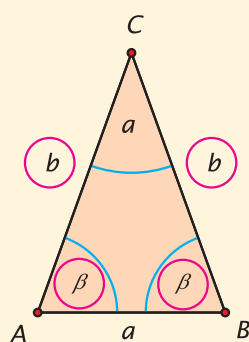
4. sjecište krakova tih kutova je točka A .

Rješenje je jedinstveno zbog poučka KSK o sukladnosti trokuta, pa kažemo da je trokut jednoznačno određen ako mu je poznata duljina jedne stranice i veličina dva kuta na toj stranici. Konstrukcija je moguća ako je zbroj veličina kuta manji od 180° .

Primjer 5. Konstrukcija jednakokračnog trokuta

Konstruirajmo jednakokračan trokut kojemu je duljina kraka $b = 5$ cm, a kut uz osnovicu $\beta = 45^\circ$.

Rješenje:



Najprije prostoručno nacrtajmo skicu i na njoj označimo zadane elemente trokuta.

Da bismo mogli nacrtati taj trokut, nedostaje nam drugi kut uz krak. Dakle, najprije moramo izračunati veličinu kuta nasuprot osnovici.

Za kutove u jednakokračnom trokutu vrijedi: $\alpha + 2 \cdot \beta = 180^\circ$. Najprije izračunamo veličinu kutova uz osnovicu, $2 \cdot 45^\circ = 90^\circ$. $\alpha = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$. Kut nasuprot osnovici iznosi 90° . Sad imamo dovoljno elemenata za KSK konstrukciju, kao u primjeru 4.

Konstrukcija
jednakokračnog
trokuta

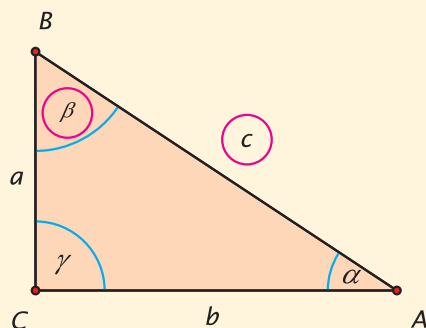
Redoslijed konstrukcije:

1. stranica, b tj. \overline{BC} , jer je to jednakokračan trokut;
2. u vrhu B konstruiramo kut β , tako da mu je jedan krak \overline{BC} ;
3. u vrhu C konstruiramo kut α , tako da mu je jedan krak \overline{BC} ;
4. sjecište krakova tih kutova je točka A .

Primjer 6. Konstrukcija pravokutnog trokuta

Konstruirajmo pravokutan trokut kojemu je duljina hipotenuze $c = 5$ cm i kut $\beta = 30^\circ$.

Rješenje:



Najprije nacrtajmo, prostoručno, skicu i na njoj označimo zadane elemente trokuta.

Da bismo mogli nacrtati taj trokut nedostaje

nam drugi kut na hipotenuzi. Dakle, najprije moramo izračunati veličinu tog kuta.

Za kutove u pravokutnom trokutu vrijedi: $\alpha + \beta = 90^\circ$. Da bismo izračunali kut α , od 90° oduzmemo veličinu zadanog šiljastog kuta. $\alpha = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$. Drugi šiljasti kut tog pravokutnog trokuta iznosi 60° .

Sad imamo dovoljno elemenata za KSK konstrukciju, kao u primjeru 4.

Konstrukcija
pravokutnog
trokuta

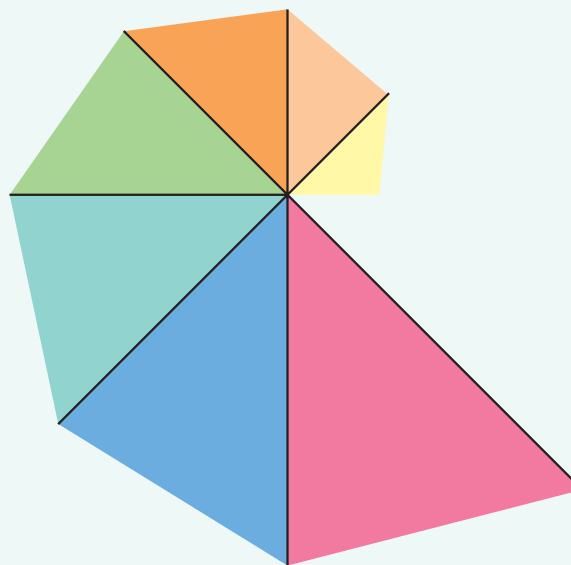
Redoslijed konstrukcije:

1. stranica c , tj. \overline{AB} ;
2. u vrhu B konstruiramo kut β ;
3. u vrhu A konstruiramo kut α ;
4. sjecište krakova tih kutova je točka C .

Zadaci

9. Konstruiraj trokut kojemu je zadana duljina jedne stranice i veličina dvaju kutova uz nju.
- $a = 3 \text{ cm}$, $\beta = 45^\circ$, $\gamma = 60^\circ$;
 - $b = 6 \text{ cm}$, $\alpha = 90^\circ$, $\gamma = 30^\circ$;
 - $c = 4.5 \text{ cm}$, $\alpha = 120^\circ$, $\beta = 45^\circ$;
 - $a = 5 \text{ cm}$, $\beta = 45^\circ$, $\gamma = 45^\circ$;
 - $b = 4 \text{ cm}$, $\alpha = 60^\circ$, $\gamma = 30^\circ$;
 - $c = 10 \text{ cm}$, $\alpha = 120^\circ$, $\beta = 30^\circ$.
10. Konstruiraj jednakokračan trokut kojemu je zadana duljina osnovice i kuta uz nju.
- $a = 5 \text{ cm}$, $\beta = 45^\circ$;
 - $a = 6 \text{ cm}$, $\beta = 30^\circ$.
11. Konstruiraj jednakokračan trokut kojemu je zadana duljina osnovice i kuta nasuprot njoj.
- $a = 6.5 \text{ cm}$, $\alpha = 120^\circ$;
 - $a = 4.5 \text{ cm}$, $\alpha = 60^\circ$.
12. Konstruiraj jednakokračan trokut kojemu je zadana duljina kraka i kuta uz osnovicu.
- $b = 6 \text{ cm}$, $\beta = 30^\circ$;
 - $b = 4.5 \text{ cm}$, $\beta = 45^\circ$.
13. Konstruiraj pravokutan trokut kojemu je zadana duljina hipotenuze i jednog šiljastog kuta.
- $c = 7 \text{ cm}$, $\alpha = 45^\circ$;
 - $c = 6.5 \text{ cm}$, $\beta = 60^\circ$.
14. Nacrtaj trokut. Kutove nacrtaj kutomjerom.
- $c = 7 \text{ cm}$, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 70^\circ$;
 - $a = 6 \text{ cm}$, $b = 4.5 \text{ cm}$, $\gamma = 50^\circ$;
 - $a = 5.5 \text{ cm}$, $b = 3.7 \text{ cm}$, $c = 6 \text{ cm}$;
 - $a = 4.8 \text{ cm}$, $\beta = 55^\circ$, $\gamma = 75^\circ$;
 - $b = 6 \text{ cm}$, $c = 7 \text{ cm}$, $\alpha = 40^\circ$.
 - duljina stranice a je 4 cm , duljina stranice b je za 1 cm dulja od a , a stranica c je za 1 cm dulja od b .

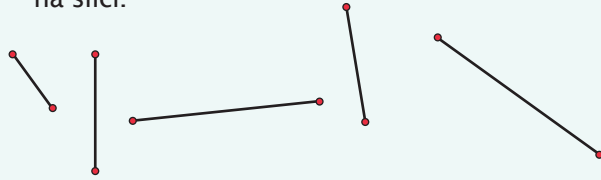
15. Konstruiraj "trokutastu puževu kućicu" kao na slici. Svi kutovi u sredini su od 45° , prvi krak ima duljinu 2 cm , a svaki sljedeći je za 1 cm dulji.



16. Konstruiraj jednakokračan trokut kojemu je zadana duljina kraka i kuta nasuprot osnovice.
- $b = 4 \text{ cm}$, $\alpha = 60^\circ$;
 - $b = 52 \text{ mm}$, $\alpha = 30^\circ$.
17. Konstruiraj pravokutan trokut kojemu je zadana duljina katete i jednog šiljastog kuta.
- $b = 4 \text{ cm}$, $\alpha = 60^\circ$;
 - $a = 35 \text{ mm}$, $\beta = 30^\circ$;
 - $a = 55 \text{ mm}$, $\alpha = 45^\circ$;
 - $b = 3.5 \text{ cm}$, $\beta = 30^\circ$.
18. Nacrtaj jednakokračan trokut s osnovicom $a = 3 \text{ cm}$ i kutovima na njoj od 70° . Vrh nasuprot osnovice označi s A , a vrhove na osnovici s B i C . Nacrtaj kružnicu sa središtem u A i polumjerom $|AB|$. U šestar uzmi duljinu dužine \overline{BC} pa je nanosi redom po kružnici počevši od točke B . Koliko točaka si dobio na kružnici na taj način? Spoji točke redom. Koji lik si nacrtao?

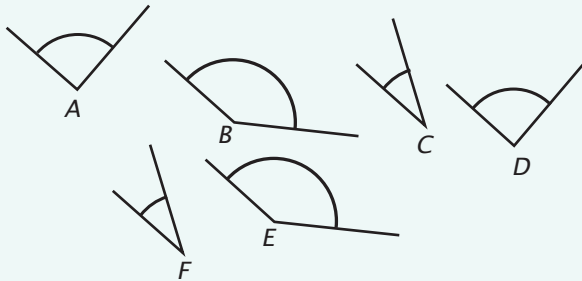
Vježbalica

1. Napiši parove sukladnih dužina koje se nalaze na slici.

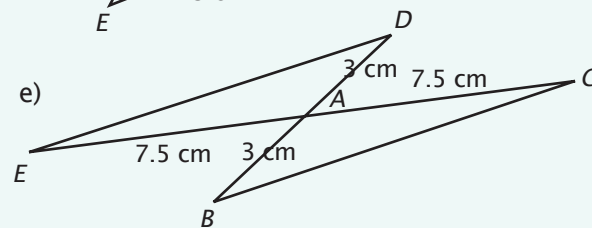
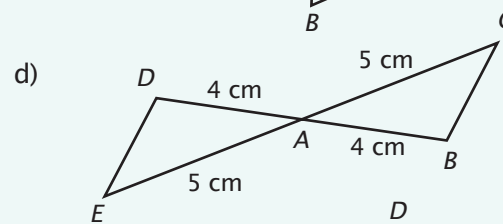
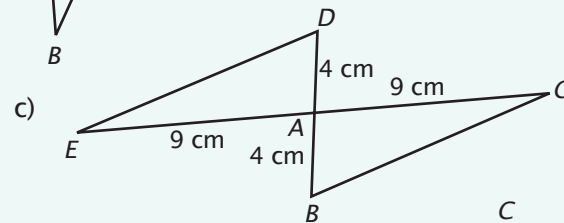
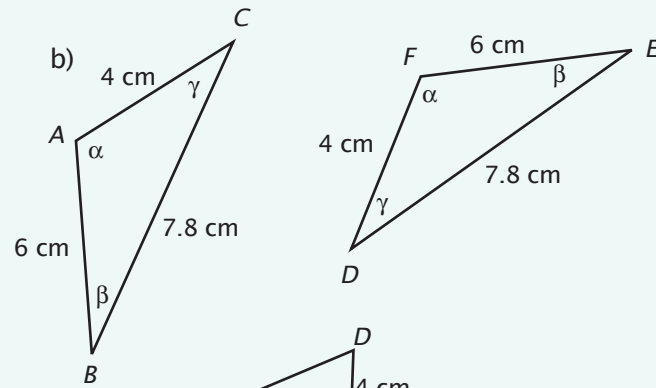
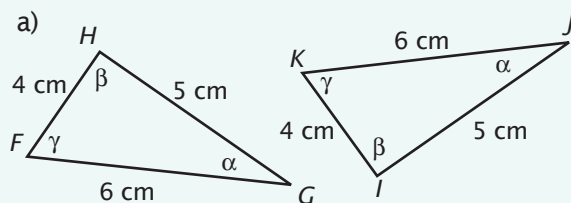


2. Nacrtaj pravokutnik sa stranicama duljine 2.3 cm i 4 cm. Koje njegove dužine su sukladne?

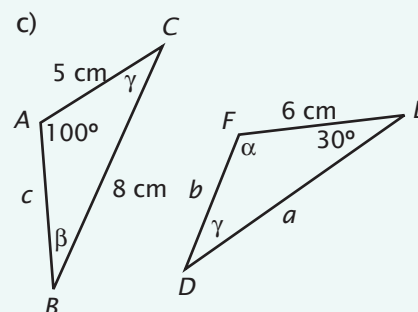
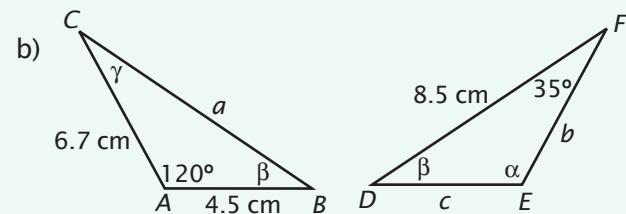
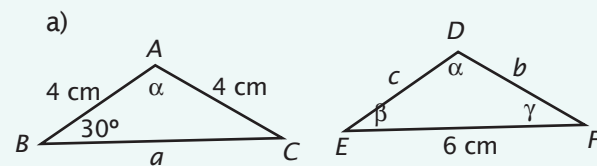
3. Ispiši parove sukladnih kutova koji se nalaze na slici.



4. Nacrtaj neki jednakostraničan trokut EFG. Napiši sukladne kutove tog trokuta.
5. Nacrtaj neki jednakokračan trokut DEF. Napiši sukladne kutove tog trokuta.
6. Nacrtaj neki kvadrat EFGH. Koji kutovi kvadrata su sukladni?
7. Nacrtaj jednakostraničan trokut $\triangle ABC$ duljine stranica $a = 5.3$ cm i njemu sukladan trokut $\triangle DEF$.
8. Nacrtaj dva sukladna pravokutna trokuta.
9. Jesu li dva trokuta sa slike sukladna? Zašto? Napiši odgovarajuće stranice i odgovarajuće kutove.



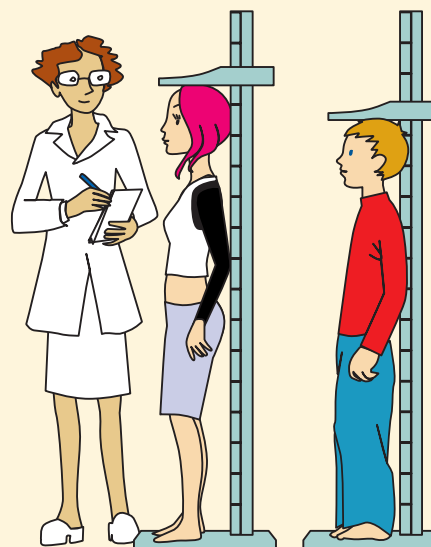
10. Trokuti $\triangle ABC$ i $\triangle DEF$ su sukladni. Napišite duljine stranica i veličine kutova koje nedostaju na trokutima.



11. Konstruiraj trokut kojemu su zadane duljine svih triju stranica.
- $a = 3.4$ cm, $b = 4.2$ cm, $c = 5.5$ cm;
 - $a = 6.3$ cm, $b = 4.7$ cm, $c = 3.5$ cm;
 - $a = 6.2$ cm, $b = 7.5$ cm, $c = 5$ cm.
12. Konstruiraj jednakostraničan trokut.
- $a = 3.8$ cm; b) $a = 5.4$ cm; c) $a = 4$ cm.
13. Konstruiraj jednakokračan trokut s osnovicom a i krakovima b .
- $a = 3.6$ cm, $b = 5.8$ cm;
 - $a = 6$ cm, $b = 4.4$ cm;
 - $a = 5$ cm, $b = 7.5$ cm.
14. Je li moguće nacrtati trokut s duljinama stranica:
- 2.9 cm, 4.1 cm i 4.5 cm;
 - $4\frac{1}{2}$ cm, $5\frac{1}{3}$ cm i $9\frac{5}{6}$ cm;
 - 2.7 cm, 4.1 cm i 5.6 cm;
 - 11.3 cm, 15.5 cm i 3 cm?
15. Je li moguće nacrtati trokut s duljinama stranica:
- 16.7 cm, 1.2 dm i 28 mm;
 - 2 cm, 35 mm i 1.5 cm;
 - 29 mm, 71 mm i 14 cm;
 - $4\frac{2}{5}$ cm, 4.3 cm i $8\frac{2}{5}$ cm?
16. Konstruiraj trokut kojemu su zadane duljine dviju stranica i veličina kuta između njih.
- $b = 3$ cm, $c = 4$ cm, $\alpha = 60^\circ$;
 - $a = 6.2$ cm, $c = 4.4$ cm, $\beta = 45^\circ$;
 - $b = 6.4$ cm, $c = 7.5$ cm, $\alpha = 90^\circ$;
 - $a = 3.4$ cm, $b = 4.5$ cm, $\gamma = 120^\circ$.
17. Konstruiraj pravokutan trokut kojemu su zadane duljine kateta.
- $a = 3.6$ cm, $b = 5.3$ cm;
 - $a = 6.7$ cm, $b = 4.1$ cm.
18. Konstruiraj trokut kojemu je zadana duljina jedne stranice i veličina dvaju kutova uz nju.
- $c = 5$ cm, $\alpha = 120^\circ$, $\beta = 45^\circ$;
 - $b = 4.3$ cm, $\alpha = 90^\circ$, $\gamma = 30^\circ$;
 - $a = 3.8$ cm, $\beta = 45^\circ$, $\gamma = 60^\circ$;
 - $a = 5.3$ cm, $\beta = 45^\circ$, $\gamma = 45^\circ$;
 - $b = 4.2$ cm, $\alpha = 60^\circ$, $\gamma = 30^\circ$;
 - $c = 8.2$ cm, $\alpha = 120^\circ$, $\beta = 30^\circ$.
19. Konstruiraj jednakokračan trokut kojemu je zadana duljina kraka i kuta između njih, tj. kuta nasuprot osnovice.
- $b = 5.6$ cm, $\alpha = 45^\circ$;
 - $b = 4.5$ cm, $\alpha = 120^\circ$.
20. Konstruiraj jednakokračan trokut kojemu je zadana duljina osnovice i kuta uz nju.
- $a = 3$ cm, $\beta = 45^\circ$;
 - $a = 6.3$ cm, $\beta = 30^\circ$.
21. Konstruiraj jednakokračan trokut kojemu je zadana duljina osnovice i kut nasuprot njoj.
- $a = 7$ cm, $\alpha = 120^\circ$
 - $a = 3$ cm, $\alpha = 60^\circ$
22. Konstruiraj jednakokračan trokut kojemu je zadana duljina kraka i kut uz osnovicu.
- $b = 6.1$ cm, $\beta = 30^\circ$;
 - $b = 4.4$ cm, $\beta = 45^\circ$.
23. Konstruiraj pravokutan trokut kojemu je zadana duljina hipotenuze i jednog šiljastog kuta.
- $c = 8$ cm, $\alpha = 45^\circ$;
 - $c = 5.6$ cm, $\beta = 60^\circ$.
24. Nacrtaj trokut. Kutove nacrtaj kutomjerom.
- $c = 6.5$ cm, $\alpha = 40^\circ$, $\beta = 70^\circ$
 - $a = 5.8$ cm, $b = 7.5$ cm, $\gamma = 55^\circ$
 - $a = 4.5$ cm, $b = 2.7$ cm, $c = 6$ cm
 - $a = 3.8$ cm, $\beta = 35^\circ$, $\gamma = 85^\circ$
 - $b = 6.2$ cm, $c = 7.3$ cm, $\alpha = 50^\circ$

2.10. Visine trokuta

Ana i Luka su bili na sistematskom pregledu kod liječnika. Pogledaj sliku i reci kolika je Anina visina, a kolika Lukina. U kojem je položaju u odnosu na podlogu mjerac visine?



Primjer 1. Visina zagrebačke katedrale

Katedrala je najpoznatija zagrebačka građevina. Posvećena je uznesenju Marijinu i kraljevima Stjepanu i Ladislavu. Ispod današnje prvostolnice postoje ostaci predtatarske

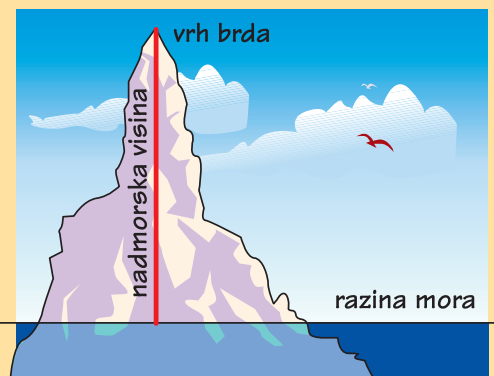


Zagrebačka katedrala

katedrale koja je građena u 12. stoljeću. Katedrala je tijekom vremena nekoliko puta stradala u požaru i potresu. Današnji izgled s dva neogotička zvonika dobila je pri obnovi nakon potresa 1880. godine. Visina zvonika je oko 105 metara.

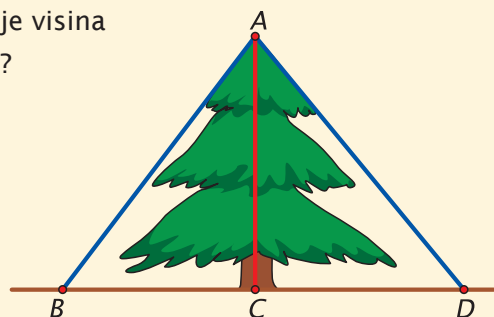
Visina neke građevine je udaljenost najviše točke te građevine od tla, mjerena po okomici.

Nadmorska ili apsolutna **visina** je okomita udaljenost neke točke od srednje razine mora.



Primjer 2. Visina bora

Koja od dužina na slici je visina bora?



Rješenje:

Visinu određujemo od vrha bora, tj. od točke A. Na slici su nacrtane tri dužine kojima je jedna krajnja točka A: \overline{AB} , \overline{AC} , \overline{AD} . No samo jedna od njih je okomita na ravninu tla - dužina \overline{AC} . Dakle, dužina \overline{AC} prikazuje visinu bora.

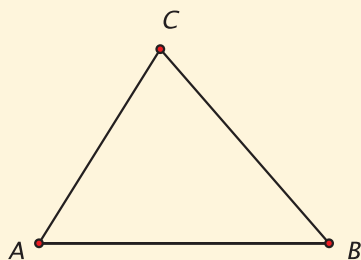
Visinu uvijek određujemo po okomici.



Primjer 3. Visina trokuta

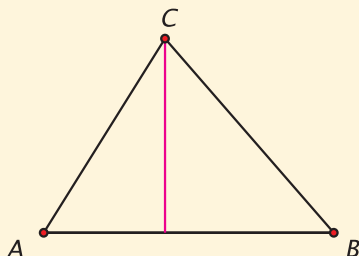
Na slici je nacrtan šiljastokutan trokut $\triangle ABC$.
Kako ćemo nacrtati njegovu visinu?

Visina
trokuta



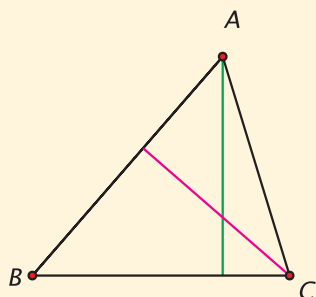
Rješenje:

Povucimo okomicu iz točke C na stranicu \overline{AB} .
Točku u kojoj okomica siječe dužinu \overline{AB} označimo s D . Dužina \overline{CD} je visina trokuta $\triangle ABC$.

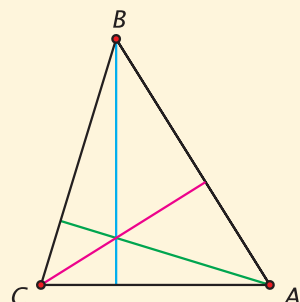


A gdje bismo nacrtali visinu da je trokutu $\triangle ABC$ dolje stranica \overline{BC} ?

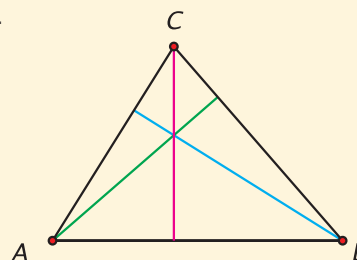
Na isti način nacrtamo okomitu dužinu i vidimo da je visina dužina \overline{AE} .



Naravno, tako možemo nacrtati i treću dužinu, \overline{BF} , koja je okomita na stranicu \overline{AC} i prolazi vrhom B .

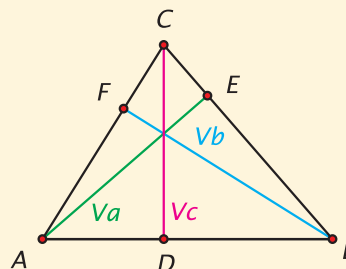


U ovom primjeru nacrtali smo tri dužine \overline{CD} , \overline{AE} i \overline{BF} . Sve te tri dužine su visine trokuta.



Visine trokuta dobivaju ime po stranici na koju su okomite:

- visina \overline{AE} je visina na stranicu a i označavamo je s v_a ,
- visina \overline{BF} je visina na stranicu b i označavamo je s v_b ,
- visina \overline{CD} je visina na stranicu c i označavamo je s v_c .

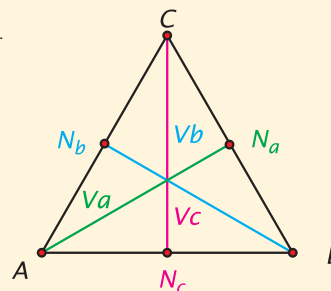


Krajnja točka visine koja se nalazi na stranici trokuta naziva se **nožište** visine.

U našem primjeru nožište visine v_a je točka E , visine v_b točka F , a visine v_c točka D .

Nožišta često označavamo prema visinama:

N_a, N_b, N_c .

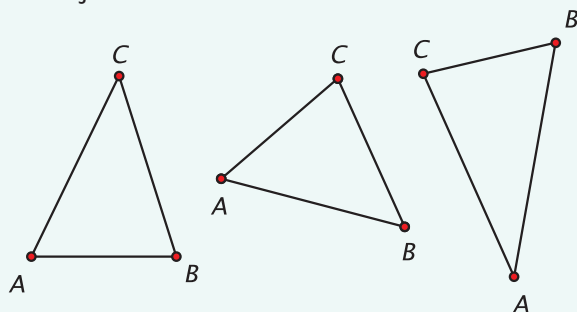


Važno

Visina trokuta je dužina povučena okomito na stranicu, ili produžetak stranice, iz nasuprotnog vrha. Trokut ima tri visine.

Zadaci

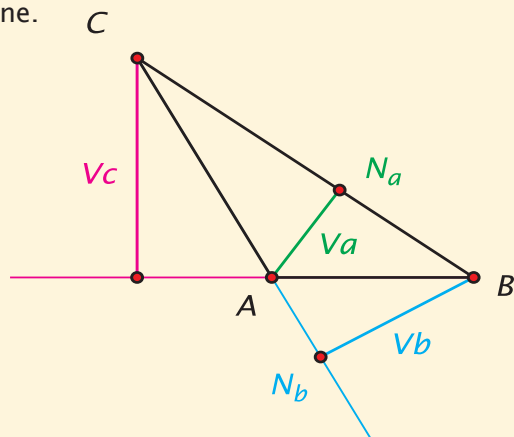
- Nacrtaj neki šiljastokutan trokut te njegove visine.
- Nacrtaj visine zadanih trokuta.



- Konstruiraj trokut i sve tri njegove visine.
 - $a = 5$ cm, $b = 6$ cm i $c = 7$ cm;
 - $a = 6$ cm, $\beta = 50^\circ$ i $\gamma = 65^\circ$;
 - $b = 7$ cm, $c = 5$ cm i $\alpha = 70^\circ$;
 - Jednakostraničan trokut, $a = 4.5$ cm;
 - Jednakokrtačan trokut, osnovica $a = 4$ cm, krakovi $b = 6$ cm.

Primjer 4. Visine tupokutnog trokuta

Nacrtajmo jedan tupokutan trokut i njegove visine.



Rješenje:

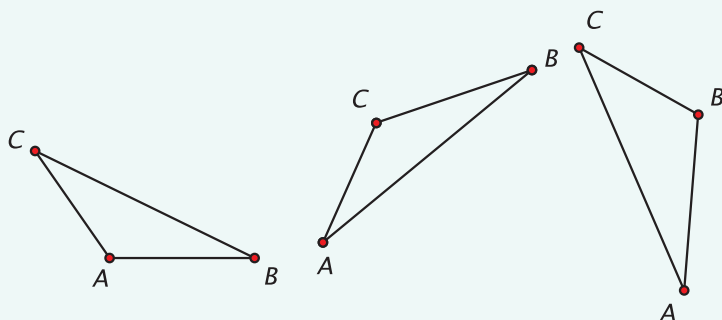
Visinu v_a iz vrha A crtali smo kao i u prijašnjem primjeru. No visine v_b i v_c iz vrhova B i C nismo. Te se visine nalaze izvan trokuta. Da bismo nacrtali te visine, najprije crtkanom crtamo pravce na kojima leže stranice trokuta, a onda okomice na njih.

Visine
tupokutnog
trokuta

Kod tupokutnog trokuta dvije visine se nalaze izvan trokuta.

Zadaci

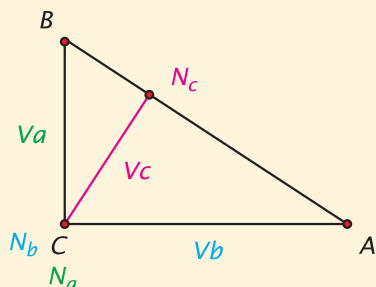
- Nacrtaj neki tupokutan trokut i njegove visine.
- Nacrtaj visine zadanih trokuta.



- Konstruiraj tupokutan trokut i sve tri njegove visine.
 - $a = 3.5$ cm, $b = 5$ cm, i $c = 8$ cm;
 - $c = 2$ cm, $\alpha = 40^\circ$ i $\beta = 120^\circ$;
 - $a = 5$ cm, $b = 4$ cm i $\gamma = 130^\circ$.

Primjer 5. Visine pravokutnog trokuta

Nacrtajmo jedan pravokutan trokut i njegove visine.



Rješenje:

Visina v_c na hipotenuzu nalazi se unutar trokuta. Visina v_a poklopila se s katetom b , a visina v_b poklopila se s katetom a . Nožišta visina v_a i v_b su u vrhu pravog kuta.

Dvije visine pravokutnog trokuta poklapaju se s njegovim katetama.

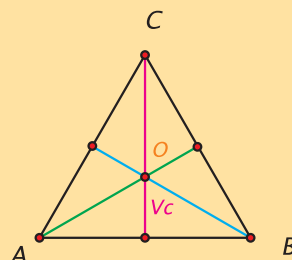
Zadaci

8. Konstruiraj pravokutan trokut i njegove visine.
 - a) $a = 3$ cm, $b = 4$ cm, i $c = 5$ cm;
 - b) $c = 6$ cm, $\alpha = 40^\circ$ i $\beta = 50^\circ$;
 - c) $a = 6$ cm, $b = 3.5$ cm i $\gamma = 90^\circ$.
9. Objasni činjenicu da visina na osnovicu jednakokravnog trokuta dijeli taj trokut na dva sukladna trokuta.

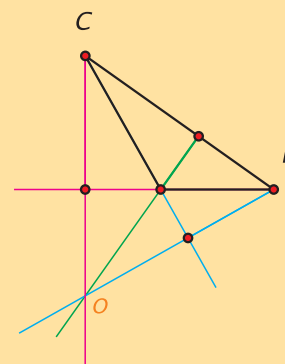


Sva tri pravca na kojima leže visine trokuta sijeku se u jednoj točki. Tu točku nazivamo **ortocentar**.

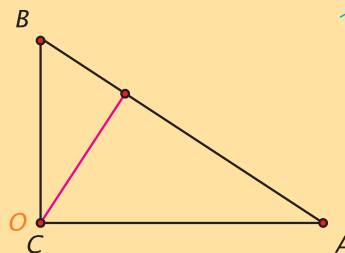
Ortocentar šiljastokutnog trokuta je unutar njega.



Ortocentar tupokutnog trokuta nalazi se izvan trokuta i sjecište je produžetaka visina.

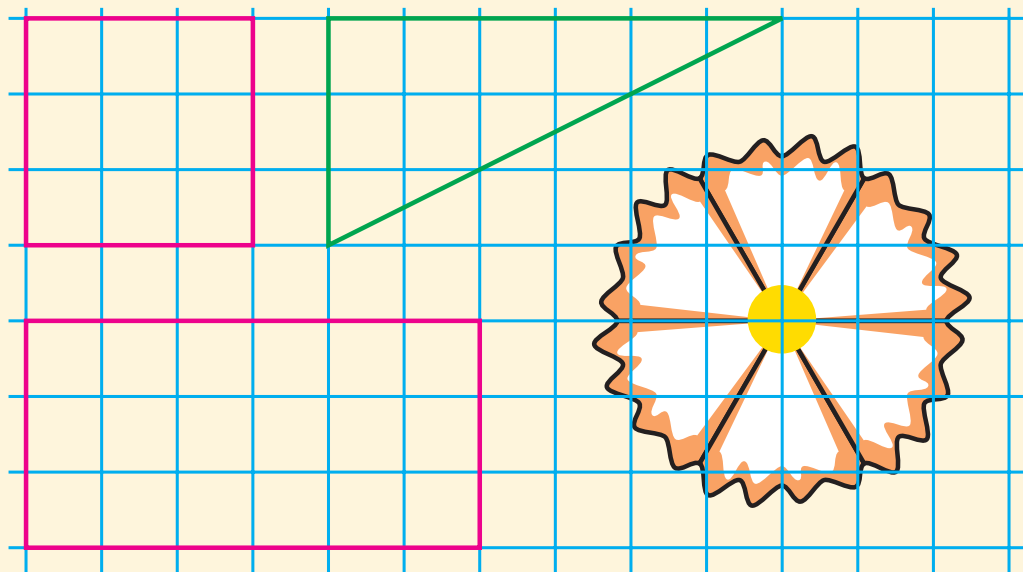


Ortocentar pravokutnog trokuta je vrh pravog kuta.



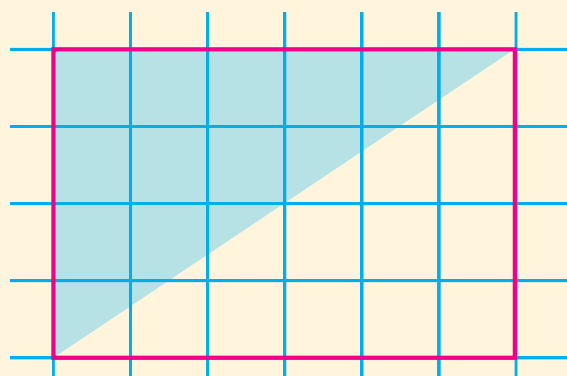
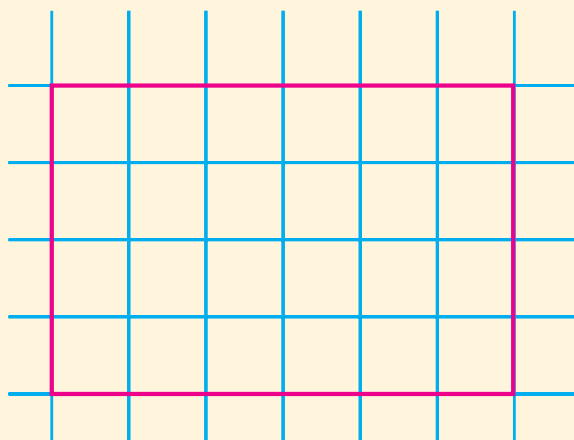
2.11. Površina trokuta

Odredi površinu kvadrata i pravokutnika na slici. Procijeni površinu pravokutnog trokuta i cvijeta. Svi likovi su nacrtani na kvadratnoj mreži, površina jednog kvadratića je 1 cm^2 .



Primjer 1. Površina pravokutnog trokuta

- a) U kvadratnoj mreži je nacrtan crveni pravokutnik sa stranicama $a = 4 \text{ cm}$ i $b = 6 \text{ cm}$. Kolika je njegova površina?



- b) Pravokutnik je podijeljen dijagonalom na dva jednaka dijela. Koji likovi su dobiveni tom podjelom? Kolika je površina jednog od njih?

Rješenje:

a) Na slici vidimo da je površina pravokutnika 24 cm². Prisjetimo se formule za izračunavanje **površine pravokutnika**

$$P = a \cdot b$$

b) Pravokutnik je podijeljen na dva sukladna pravokutna trokuta. Površina jednog pravokutnog trokuta jednaka je polovici površine tog

pravokutnika, dakle 12 cm². Pravokutnom trokutu su katete $a = 4$ cm i $b = 6$ cm. Mogli smo površinu izračunati i pomoću formule

$$P = (a \cdot b) : 2$$

Formulu za **površinu pravokutnog trokuta** često zapisujemo i ovako: $P = \frac{a \cdot b}{2}$.

Važno

Površina pravokutnog trokuta

$$P = (a \cdot b) : 2 \text{ ili } P = \frac{a \cdot b}{2}$$

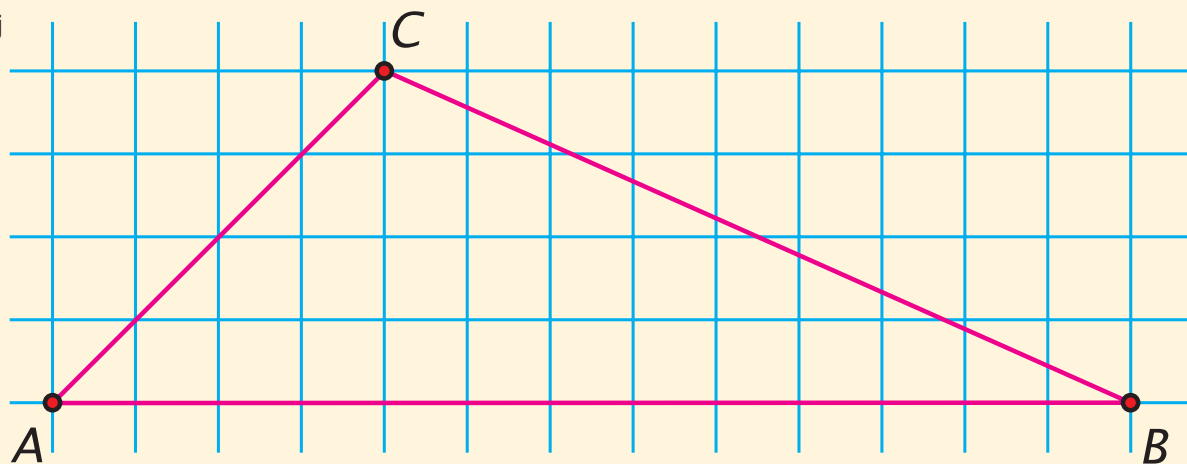
Zadaci

- Izračunaj površinu pravokutnog trokuta kojemu su zadane duljine kateta.
 - $a = 2$ cm i $b = 5$ cm;

- $a = 4$ dm i $b = 12$ dm;
- $a = 6$ m i $b = 5$ m;
- $a = 2.5$ cm i $b = 5.6$ cm.

Primjer 2. Površina trokuta

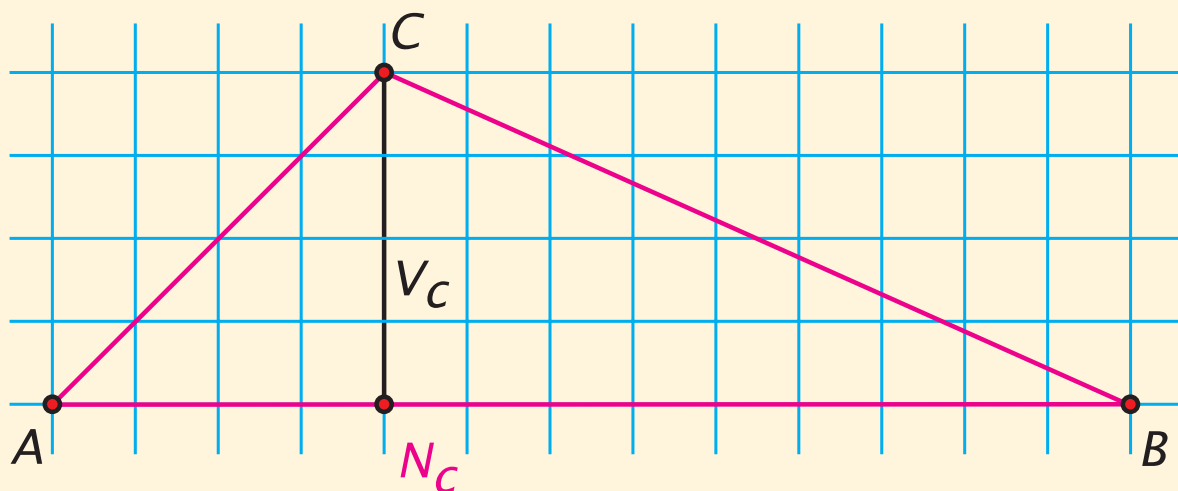
Na kvadratnoj mreži s kvadratićima stranice 1 cm nacrtan je trokut. Kolika je njegova površina?



Rješenje:

Pokušajmo najprije procijeniti površinu prebrojavajući kvadratiće. Vidimo da trokut prekriva 20 cijelih kvadratića, te 13 dijelova kvadratića. Tih 13 dijelova kvadratića tvori približno 5 cijelih kvadratića. Zaključujemo da je površina približno 25 cm².

Nacrtajmo visinu v_c tog $\triangle ABC$. Ta visina dijeli trokut $\triangle ABC$ na dva pravokutna trokuta $\triangle AN_cC$ i $\triangle CN_cB$. Odredimo, brojanjem kvadratića sa slike, duljine kateta tih pravokutnih trokuta te njihove površine.



$\triangle AN_C C$ ima katete duljine $|AN_C| = 4$ cm i $v_c = |CN_C| = 4$ cm. Njegova površina jednaka je $P_{\triangle AN_C C} = \frac{4 \cdot 4}{2} = 8$ cm².
 $\triangle CN_C B$ ima katete duljine $|N_C B| = 9$ cm i $v_c = |CN_C| = 4$ cm. Njegova površina jednaka je $P_{\triangle CN_C B} = \frac{9 \cdot 4}{2} = 18$ cm².

Površina cijelog trokuta $\triangle ABC$ jednaka je zbroju površina tih dvaju pravokutnih trokuta:
 $P_{\triangle ABC} = P_{\triangle AN_C C} + P_{\triangle CN_C B} = 8 + 18 = 26$ cm²
 Površina trokuta jednaka je polovini umnoška duljine jedne stranice i visine na tu stranicu.
 $P = \frac{a \cdot v_a}{2}$, $P = \frac{b \cdot v_b}{2}$ ili $P = \frac{c \cdot v_c}{2}$.



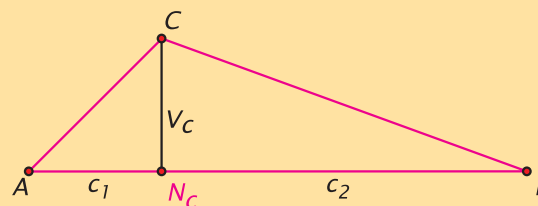
Izvod formule za površinu trokuta $\triangle ABC$.

Sa v_c označimo duljinu visine na stranicu c , a s c_1 i c_2 dijelove na koje nožište visine dijeli stranicu c .

Pritom vrijedi $c_1 + c_2 = c$.

$$P_{\triangle ABC} = P_{\triangle AN_C C} + P_{\triangle CN_C B} = \frac{c_1 \cdot v_c}{2} + \frac{c_2 \cdot v_c}{2} = \frac{c_1 \cdot v_c + c_2 \cdot v_c}{2} = \frac{(c_1 + c_2) \cdot v_c}{2} = \frac{c \cdot v_c}{2}.$$

Na isti način mogli smo odrediti površinu trokuta pomoću stranice a i visine v_a ili pomoću stranice b i visine v_b .



Važno

Površina trokuta jednaka je polovini umnoška duljine jedne stranice i visine na tu stranicu.

$$P = \frac{a \cdot v_a}{2}, P = \frac{b \cdot v_b}{2} \text{ ili } P = \frac{c \cdot v_c}{2}.$$

Primjer 3.

Izračunaj površinu trokuta sa stranicom $a = 2.5$ cm i pripadnom visinom $v_a = 3.4$ cm.

Rješenje:

$$P = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{2.5 \cdot 3.4}{2} = \frac{8.5}{2} = 8.5 : 2 = 4.25 \text{ cm}^2.$$

Zadaci

2. Izračunaj površinu trokuta kojemu su zadane duljina jedne stranice i pripadne visine.

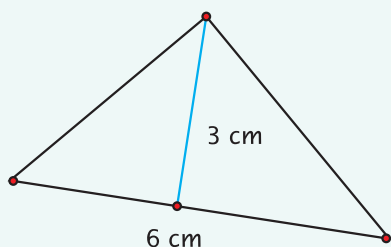
- a) $a = 2 \text{ cm}$ i $v_a = 5 \text{ cm}$;
- b) $b = 14 \text{ dm}$ i $v_b = 10 \text{ dm}$;
- c) $c = 6 \text{ m}$ i $v_c = 7 \text{ m}$;
- d) $a = 3.5 \text{ cm}$ i $v_a = 5.6 \text{ cm}$.

3. Izračunaj površinu trokuta kojemu su zadane duljina jedne stranice i pripadne visine.

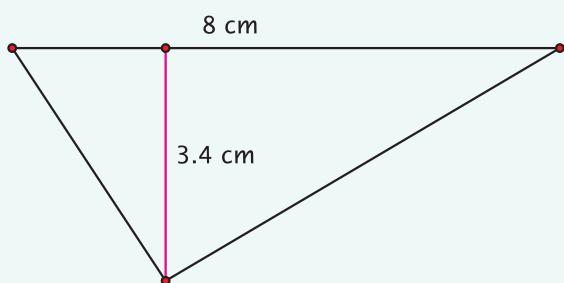
- a) $a = 4 \text{ cm}$ i $v_a = 5 \text{ dm}$;
- b) $b = 1.4 \text{ dm}$ i $v_b = 10 \text{ cm}$;
- c) $c = 5 \text{ m}$ i $v_c = 75 \text{ cm}$;
- d) $a = 6.5 \text{ m}$ i $v_a = 44 \text{ dm}$.

4. Izračunaj površine trokuta na slici.

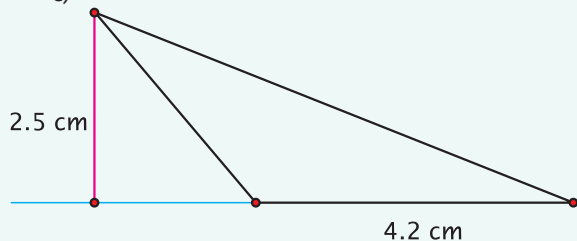
a)



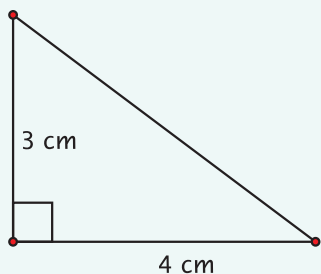
b)



c)

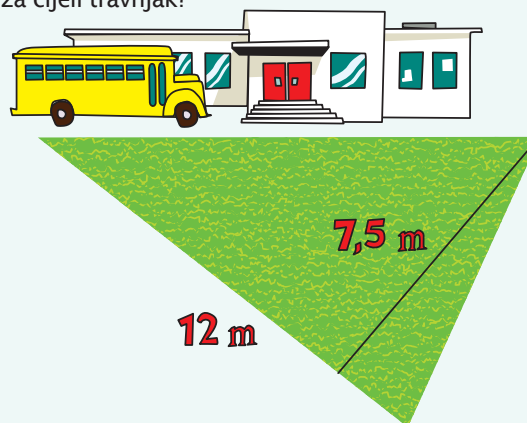


d)



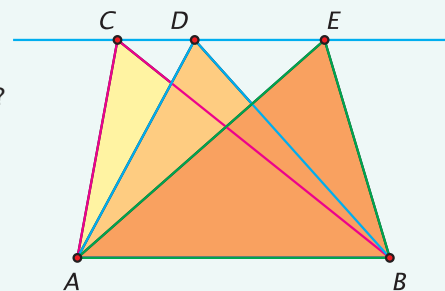
Mjerne jedinice za površinu	
$1 \text{ km}^2 = 1\,000\,000 \text{ m}^2$	$1 \text{ dm}^2 = 100 \text{ cm}^2$
$1 \text{ km}^2 = 100\,000\,000 \text{ dm}^2$	$1 \text{ dm}^2 = 10\,000 \text{ mm}^2$
$1 \text{ km}^2 = 10\,000\,000\,000 \text{ cm}^2$	$1 \text{ cm}^2 = 0.0000000001 \text{ km}^2$
$1 \text{ km}^2 = 1\,000\,000\,000\,000 \text{ mm}^2$	$1 \text{ cm}^2 = 0.0001 \text{ m}^2$
$1 \text{ m}^2 = 0.000001 \text{ km}^2$	$1 \text{ cm}^2 = 0.01 \text{ dm}^2$
$1 \text{ m}^2 = 100 \text{ dm}^2$	$1 \text{ cm}^2 = 100 \text{ mm}^2$
$1 \text{ m}^2 = 10\,000 \text{ cm}^2$	$1 \text{ mm}^2 = 0.000000000001 \text{ km}^2$
$1 \text{ m}^2 = 1\,000\,000 \text{ mm}^2$	$1 \text{ mm}^2 = 0.000001 \text{ m}^2$
$1 \text{ dm}^2 = 0.00000001 \text{ km}^2$	$1 \text{ mm}^2 = 0.0001 \text{ dm}^2$
$1 \text{ dm}^2 = 0.01 \text{ m}^2$	$1 \text{ mm}^2 = 0.01 \text{ cm}^2$

5. Učenici žele kod škole napraviti travnjak u obliku trokuta, kao na slici. Da bi se zasijao 1 m^2 potrebno je 25 g sjemena trave. Koliko sjemena je potrebno za cijeli travnjak?



6. Krov crkvenog tornja sastoji se od četiri jednakokračna trokuta osnovice 3.6 m i visine 6.8 m. Koliko je lima potrebno da se prekrije cijeli krov? Ako je cijena 1 m^2 lima 20 kn koliko treba platiti lim za cijeli krov?

7. Nacrtani trokuti imaju jednake površine. Zašto?



8. Kako će se promijeniti površina trokuta, ako se:

- a) duljina stranice utrostruči, a duljina visine ostane ista;
- b) duljina stranice ostane ista, a duljina visine udvostruči;
- c) duljina stranice utrostruči, a duljina visine udvostruči.

Primjer 4. Računanje katete pravokutnog trokuta

Površina pravokutnog trokuta je 50 m^2 , a duljina jedne katete je 10 m . Kolika je duljina druge katete?

Rješenje:

Zadanu katetu označimo s a , a nepoznatu s b te ispišimo zadane podatke:

$$P = 50 \text{ m}^2; a = 10 \text{ m}; b = ?$$

Formula za površinu pravokutnog trokuta je

$$P = \frac{a \cdot b}{2}$$

Uvrstimo u nju zadane podatke: $50 = \frac{10 \cdot b}{2}$

Koristeći vezu između množenja i dijeljenja možemo je zapisati i ovako: $50 \cdot 2 = 10 \cdot b$.

Izračunamo umnožak $50 \cdot 2$, dobivamo:

$$100 = 10 \cdot b$$

Da bismo dobili veličinu b , moramo još 100 podijeliti s 10 .

$$b = 100 : 10; b = 10 \text{ m}$$

Duljina druge katete je 10 m .

Zadaci

9. Izračunaj duljinu druge katete pravokutnog trokuta.

a) $P = 80 \text{ cm}^2$, $a = 16 \text{ cm}$;

b) $P = 75 \text{ dm}^2$, $b = 6 \text{ dm}$;

c) $P = 21 \text{ m}^2$, $a = 2.5 \text{ m}$;

d) $P = 24.42 \text{ dm}^2$, $b = 6.6 \text{ dm}$;

e) $P = 27.28 \text{ m}^2$, $a = 44 \text{ dm}$;

f) $P = 18.2 \text{ dm}^2$, $b = 52 \text{ cm}$.

Primjer 5. Računanje visine trokuta

Površina trokuta je 60 cm^2 , a duljina jedne stranice je 15 cm . Kolika je duljina pripadne visine?

Rješenje:

Zadanu stranicu označimo s a , visina koju tražimo je v_a .

$$P = 60 \text{ cm}^2$$

$$a = 15 \text{ cm}$$

$$v_a = ?$$

Formula za površinu trokuta je $P = \frac{a \cdot v_a}{2}$.

Uvrstimo u nju zadane podatke. $60 = \frac{15 \cdot v_a}{2}$

Koristeći vezu između množenja i dijeljenja

možemo je zapisati i ovako: $60 \cdot 2 = 15 \cdot v_a$.

Izračunamo umnožak $60 \cdot 2$, pa dobivamo:

$$120 = 15 \cdot v_a$$

Da bismo dobili veličinu v_a , moramo još 120 podijeliti s 15 : $v_a = 120 : 15 = 8 \text{ cm}$.

Duljina visine na stranicu a je 8 cm .

Na isti način računamo ako je zadana duljina visine, a traži se duljina pripadne stranice trokuta.

Zadaci

10. Izračunaj duljinu pripadne visine.

a) $P = 125 \text{ cm}^2$, $a = 25 \text{ cm}$;

b) $P = 275 \text{ dm}^2$, $b = 50 \text{ dm}$;

c) $P = 64 \text{ m}^2$, $c = 10 \text{ m}$;

d) $P = 16 \text{ cm}^2$, $a = 2.5 \text{ cm}$;

e) $P = 53.58 \text{ dm}^2$, $b = 5.7 \text{ dm}$;

f) $P = 34.65 \text{ m}^2$, $c = 63 \text{ dm}$.

11. Izračunaj duljinu pripadne stranice.

a) $P = 500 \text{ cm}^2$, $v_a = 25 \text{ cm}$;

b) $P = 726 \text{ dm}^2$, $v_b = 33 \text{ dm}$;

c) $P = 56 \text{ m}^2$, $v_c = 8 \text{ m}$;

d) $P = 25.08 \text{ cm}^2$, $v_a = 5.7 \text{ cm}$;

e) $P = 31.35 \text{ dm}^2$, $v_b = 3.3 \text{ dm}$;

f) $P = 81 \text{ dm}^2$, $v_c = 81 \text{ cm}$.

12. U pravokutnom trokutu zadane su duljine kateta $a = 3 \text{ m}$, $b = 4 \text{ m}$ i duljina visine na hipotenuzu $v_c = 2.4 \text{ m}$. Kolika je duljina hipotenuze?

13. U trokutu je $a = 7 \text{ dm}$, $b = 3.5 \text{ dm}$. Duljina visine iz vrha B je $v_b = 4.4 \text{ dm}$. Kolika je duljina visine v_a ?

14. U pravokutnom trokutu zadane su duljine kateta $a = 6 \text{ m}$, $b = 8 \text{ m}$ i duljina visine na hipotenuzu $v_c = 2.8 \text{ m}$. Kolika je duljina hipotenuze?

15. U trokutu je $a = 19 \text{ cm}$, $b = 14 \text{ cm}$ i $c = 12 \text{ cm}$. Duljina visine iz vrha A je $v_a = 9 \text{ cm}$. Kolike su visine na preostale stranice tog trokuta?

Vježbalica

- Konstruiraj trokut i jednu njegovu visinu.
 - $a = 5.4$ cm, $b = 6.8$ cm i $c = 7.5$ cm i visinu v_a ;
 - $a = 6.5$ cm, $\beta = 40^\circ$ i $\gamma = 65^\circ$ i visinu v_b ;
 - $b = 7.5$ cm, $c = 5.4$ cm i $\alpha = 60^\circ$ i visinu v_c ;
 - jednakostraničan trokut, $a = 3.8$ cm i visinu v_a ;
 - jednakokračan trokut, osnovica $a = 3$ cm, krakovi $b = 6.2$ cm i visinu v_a ;
 - jednakokračan trokut, osnovica $a = 5$ cm, krakovi $b = 6$ cm i visinu v_b .
- Konstruiraj tupokutan trokut i jednu njegovu visinu.
 - $a = 3.5$ cm, $b = 5.2$ cm, i $c = 9$ cm i v_c ;
 - $c = 2.5$ cm, $\alpha = 60^\circ$ i $\beta = 120^\circ$ i v_a ;
 - $a = 5.4$ cm, $b = 4.6$ cm i $\gamma = 110^\circ$ i v_b .
- Konstruiraj pravokutan trokut i jednu njegovu visinu v_c .
 - $a = 4.5$ cm, $b = 6$ cm, i $c = 7.5$ cm;
 - $c = 5$ cm, $\alpha = 30^\circ$ i $\beta = 60^\circ$;
 - $a = 5$ cm, $b = 4.5$ cm i $\gamma = 90^\circ$.
- Nacrtaj trokut ABC i sve tri njegove visine, te označi ortocentar O ako je trokut:
 - raznostraničan šiljastokutan;
 - jednakokračan šiljastokutan;
 - pravokutan jednakokračan;
 - raznostraničan tupokutan;
 - jednakostraničan.
- Izračunaj površinu pravokutnog trokuta kojemu su zadane duljine kateta.
 - $a = 2.6$ cm i $b = 5.8$ cm;
 - $a = 4.4$ dm i $b = 1.2$ dm;
 - $a = 6$ cm i $b = 5$ cm;
 - $a = 2\frac{2}{3}$ cm i $b = 5\frac{3}{4}$ cm.
- Izračunaj površinu trokuta kojemu su zadane duljina jedne stranice i pripadne visine.
 - $a = 2.4$ cm i $v_a = 5.2$ cm;
 - $b = 1.4$ dm i $v_b = 1.2$ dm;
 - $c = 5$ m i $v_c = 8$ m;
 - $a = 3.6$ cm i $v_a = 7.6$ cm.
- Izračunaj površinu trokuta kojemu su zadane duljina jedne stranice i pripadne visine.
 - $a = 4$ cm i $v_a = 0.5$ dm;
 - $b = 14$ cm i $v_b = 1$ dm;
 - $c = 53$ mm i $v_c = 7.5$ cm;
 - $a = 0.65$ m i $v_a = 4.4$ dm.
- Izračunaj duljinu druge katete pravokutnog trokuta.
 - $P = 2.4$ cm², $a = 1.6$ cm;
 - $P = 15$ dm², $b = 5$ dm;
 - $P = 3.24$ m², $a = 2.4$ m;
 - $P = 12.025$ dm², $b = 6.5$ dm;
 - $P = 6.3$ m², $a = 35$ dm;
 - $P = 14.07$ dm², $b = 67$ cm.
- Izračunaj duljinu pripadne visine.
 - $P = 450$ cm², $a = 36$ cm;
 - $P = 31.92$ dm², $b = 7.6$ dm;
 - $P = 7.35$ m², $c = 3.5$ m;
 - $P = 18.56$ cm², $a = 5.8$ cm;
 - $P = 0.0903$ dm², $b = 4.3$ cm;
 - $P = 5.67$ m², $c = 27$ dm.
- Izračunaj duljinu pripadne stranice.
 - $P = 9$ cm², $v_a = 3.6$ cm;
 - $P = 4.5$ dm², $v_b = 2.5$ dm;
 - $P = 20$ m², $v_c = 8$ m;
 - $P = 7.4$ cm², $v_a = 4$ cm;
 - $P = 10.065$ m², $v_b = 61$ dm;
 - $P = 12.6$ dm², $v_c = 45$ cm.
- U pravokutnom trokutu zadane su duljine kateta $a = 7.5$ cm, $b = 10$ cm i duljina visine na hipotenuzu $v_c = 6$ cm. Kolika je duljina hipotenuze?
- U trokutu je $a = 8$ dm, $b = 4$ dm. Duljina visine iz vrha B je $v_b = 6$ dm. Kolika je duljina visine v_a ?
- U pravokutnom trokutu zadane su duljine kateta $a = 9$ m, $b = 12$ m i duljina visine na hipotenuzu $v_c = 7.2$ m. Kolika je duljina hipotenuze?
- U trokutu je $a = 14$ cm, $b = 16$ cm i $c = 20$ cm. Duljina visine iz vrha A je $v_a = 8$ cm. Kolike su visine na preostale stranice tog trokuta?

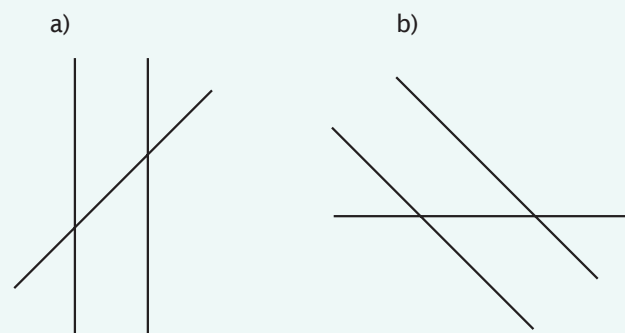
2.12. Ponavljanje

Pitanja za ponavljanje:

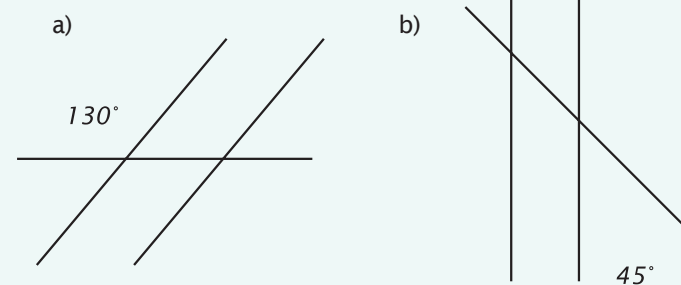
- Kakvi su to vršni kutovi? Nacrtaj ih.
- Kakvi su to susjedni kutovi? Nacrtaj ih.
- Što je presječna? Nacrtaj je.
- Koje pravilo vrijedi za kutove uz presječnicu?
- Koje pravilo vrijedi za kutove s usporednim kracima?
- Koje pravilo vrijedi za kutove s okomitim kracima?
- Nacrtaj trokut i označi njegove osnovne elemente.
- Nabroji vrste trokuta i opiši ih:
 - prema duljini stranica;
 - prema veličini kutova.
- Što je opseg? Kako računamo opseg trokuta:
 - raznostraničnog;
 - jednakostraničnog;
 - jednakokrtačnog?
- Kako se zovu stranice pravokutnog trokuta?
- Kako se zovu stranice jednakokrtačnog trokuta?
- Koliki je zbroj unutarnjih kutova trokuta?
- Kakvi su kutovi u jednakostraničnom trokutu?
- Kakvi su kutovi u jednakokrtačnom trokutu?
- Kakvi su kutovi u pravokutnom trokutu?
- Kakva veza postoji između duljina stranica i veličina kutova trokuta?
- Kakva veza postoji između duljina stranica trokuta?
- Navedi tri duljine (u cm) s kojima ne možemo složiti trokut.
- Što je simetrala dužine? Nacrtaj neku dužinu i njenu simetralu.
- Što je simetrala kuta? Nacrtaj neki kut i njegovu simetralu.
- Kakvi su to sukladni likovi?
- Kakve su to sukladne dužine?
- Kakvi su to sukladni kutovi?
- Napiši tri poučka o sukladnosti trokuta.
- Koliko elemenata trokuta treba biti poznato da bismo ga mogli konstruirati?
- Nabroji tri osnovne konstrukcije trokuta.
- Što je visina trokuta?
- Opiši smještaj visina s obzirom na vrste trokuta.
- Kako računamo površinu pravokutnika?
- Kako računamo površinu:
 - pravokutnog trokuta
 - raznostraničnog trokuta?

Zadaci za ponavljanje

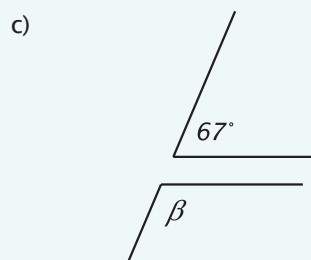
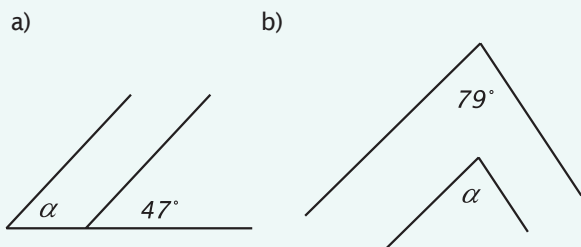
1. Pobojaj jednake kutove istom bojom.



2. Izračunaj ostale kutove uz presječnicu.



3. Odredi veličine svih kutova na slici.

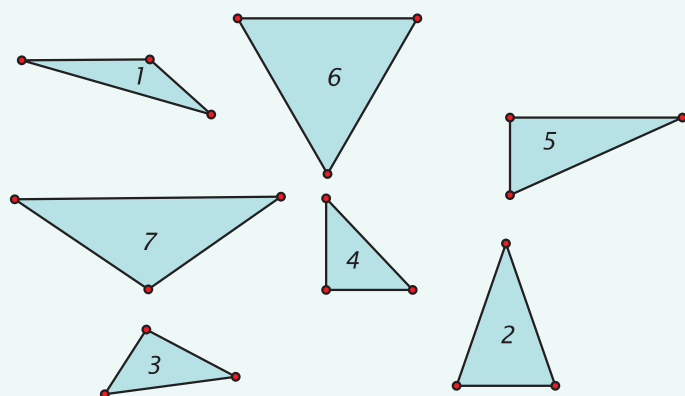


4. Izračunaj opseg trokuta s duljinama stranica:
 $a = 5 \text{ cm}$, $b = 9 \text{ cm}$, $c = 6 \text{ cm}$.

5. Izračunaj opseg jednakostraničnog trokuta.
 a) $a = 5 \text{ cm}$; b) $a = 6 \text{ dm}$.

6. Izračunaj opseg jednakokračnog trokuta.
 a) $a = 5 \text{ cm}$ b) $a = 6 \text{ dm}$
 $b = 9 \text{ cm}$; $b = 53 \text{ cm}$.

7. Razvrstaj brojeve trokuta u tablicu.



	Raznostraničan	Jednakokračan	Jednakostraničan
Šiljastokutan			
Pravokutan			
Tupokutan			

8. Izračunaj kut trokuta koji nedostaje.

α	β	γ
25°	123°	
	48°	81°
67°		$101^\circ 54'$

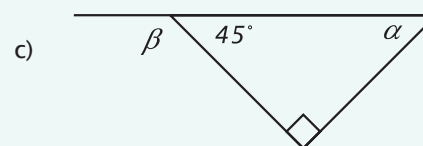
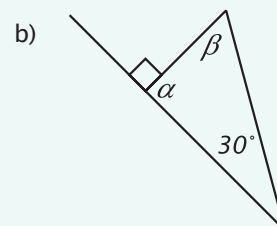
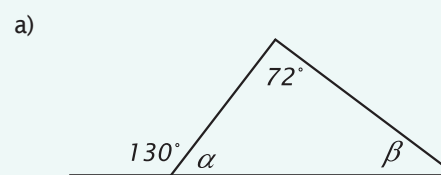
9. Izračunaj kut pravokutnog trokuta.

α	β	γ
25°		90°
	$48^\circ 22'$	90°

10. Izračunaj kut jednakokračnog trokuta, β je kut na osnovici, α je kut nasuprot osnovici.

α	25°	30°	$52^\circ 26'$
β		45°	$40^\circ 17'$

11. Izračunaj kutove.



12. Nacrtaj kutove zadanih veličina kutomjerom pa konstruiraj njihove simetrale.

a) $\alpha = 50^\circ$; b) $\beta = 90^\circ$; c) $\gamma = 150^\circ$.

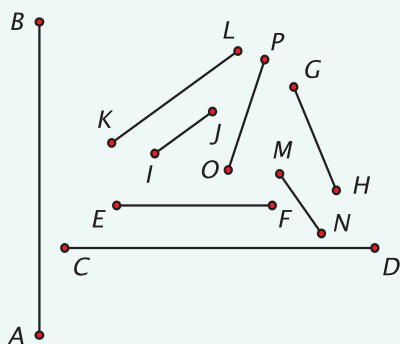
13. Konstruiraj kut od

a) 30° b) 45° c) 60° d) 90° .

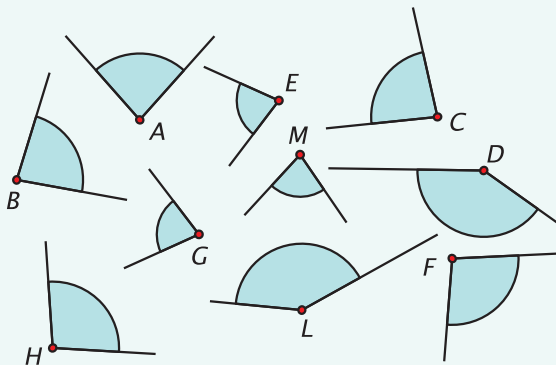
14. Spoji parove sukladnih likova.



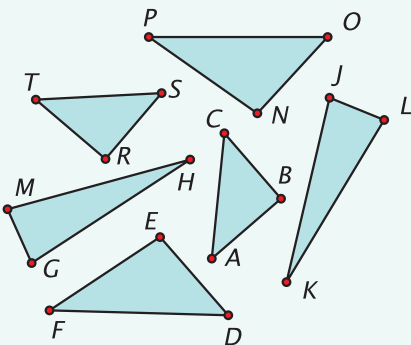
15. Napiši parove sukladnih dužina koje se nalaze na slici.



16. Napiši parove sukladnih kutova koji se nalaze na slici.



17. Napiši parove sukladnih trokuta koji se nalaze na slici.



18. Konstruiraj trokut.

- a) $a = 3 \text{ cm}$, $b = 4 \text{ cm}$, $c = 5 \text{ cm}$;
- b) $a = 6 \text{ cm}$, $c = 4 \text{ cm}$, $\beta = 45^\circ$;
- c) $a = 3 \text{ cm}$, $\beta = 45^\circ$, $\gamma = 60^\circ$;
- d) jednakostraničan, $a = 3.5 \text{ cm}$.

19. Konstruiraj jednakokrtačan trokut (a - osnovica, b - krak, α kut nasuprot osnovici, β kut na osnovici).

- a) $a = 6 \text{ cm}$, $\alpha = 120^\circ$;
- b) $a = 5 \text{ cm}$, $\beta = 30^\circ$;
- c) $b = 6 \text{ cm}$, $\alpha = 120^\circ$;
- d) $a = 4 \text{ cm}$, $b = 5 \text{ cm}$.

20. Konstruiraj pravokutan trokut.

- a) $a = 3 \text{ cm}$, $b = 5 \text{ cm}$;
- b) $c = 8 \text{ cm}$, $\alpha = 45^\circ$;
- c) $c = 7.5 \text{ cm}$, $\beta = 60^\circ$.

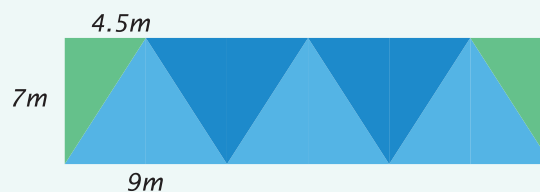
21. Konstruiraj trokut i sve tri njegove visine.

- a) $a = 5 \text{ cm}$, $b = 6 \text{ cm}$ i $c = 7 \text{ cm}$;
- b) $b = 7 \text{ cm}$, $c = 5 \text{ cm}$ i $\alpha = 70^\circ$;
- c) Jednakostraničan trokut $a = 4.5 \text{ cm}$;
- d) Jednakokrtačan trokut, osnovica $a = 4 \text{ cm}$, krakovi $b = 6 \text{ cm}$;
- e) $c = 3 \text{ cm}$, $\alpha = 40^\circ$ i $\beta = 120^\circ$;
- f) $c = 7 \text{ cm}$, $\alpha = 40^\circ$ i $\beta = 50^\circ$.

22. Izračunaj površinu trokuta kojemu su zadane duljina jedne stranice i pripadne visine.

- a) $b = 16 \text{ dm}$ i $v_b = 12 \text{ dm}$;
- b) $c = 6 \text{ m}$ i $v_c = 95 \text{ cm}$;
- c) $a = 9.5 \text{ m}$ i $v_a = 64 \text{ dm}$.

23. Maja je odabrala boje i uzorak za novu vrtnu ogradu. Pomozi joj izračunati potrebnu količinu boje. Koliko je potrebno litara zelene, plave, a koliko ljubičaste boje, ako je za 1 m^2 potrebno 2 dl boje?



Koliko će stajati bojanje tog zida, ako se plava boja prodaje po 25 kn za 1 l, a zelena i ljubičasta po 30 kn za 1 l?

24. Izračunaj nepoznatu veličinu pravokutnog trokuta.

a	b	c	v_c	P
3 cm	4 cm	5 cm		
	24 dm	25 dm		84 dm ²
12 m		20 m	9.6 m	

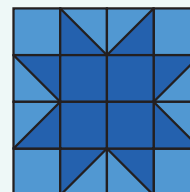
25. Izračunaj nepoznatu veličinu trokuta.

stranica	visina	površina
$a = 25 \text{ cm}$		$P = 125 \text{ cm}^2$
	$v_b = 33 \text{ dm}$	$P = 726 \text{ dm}^2$
$b = 50 \text{ dm}$		$P = 275 \text{ dm}^2$
	$v_c = 8 \text{ m}$	$P = 56 \text{ m}^2$

26. Dvije stranice trokuta su $a = 14 \text{ cm}$, $c = 7 \text{ cm}$. Duljina visine iz vrha A je $v_a = 6.8 \text{ cm}$. Kolika je duljina visine iz vrha C?

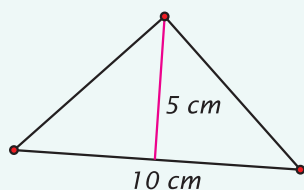
27. Lukin tata želi izraditi podni mozaik kao na slici. Za mozaik su mu potrebne pločice u dvije boje. Izračunaj površinu

- svijetlo plavog dijela mozaika;
- tamno plavog dijela mozaika;
- cijelog mozaika.



Primjerak oglednog testa:

1. Izračunaj površinu trokuta sa slike.



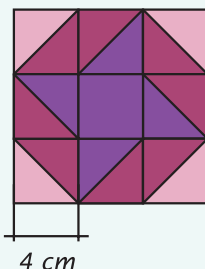
- Konstruiraj kut od 60° i njegovu simetralu.
- Izračunaj kut uz osnovicu jednakokrakog trokuta kojemu je kut nasuprot osnovici $\alpha = 110$.
- Konstruiraj pravokutan trokut s duljinama kateta 6 cm i 3 cm . Izračunaj njegovu površinu.
- Konstruiraj trokut, $b = 7 \text{ cm}$, $c = 5 \text{ cm}$ i $\alpha = 45^\circ$.
- Izračunaj nepoznate veličine trokuta.

$a = 45 \text{ cm}$		$P = 900 \text{ cm}^2$
	$v_b = 39 \text{ dm}$	$P = 429 \text{ dm}^2$
$c = 4 \text{ m}$	$v_c = 3.9 \text{ m}$	

- Konstruiraj trokut i sve tri njegove visine, $c = 2.8 \text{ cm}$, $\alpha = 45^\circ$ i $\beta = 120^\circ$. Izračunaj veličinu trećeg kuta tog trokuta.
- Pravokutan trokut ima stranice 6 dm , 12 dm i 5 dm . Kolika je duljina visine na hipotenuzu? Izračunaj opseg tog trokuta.

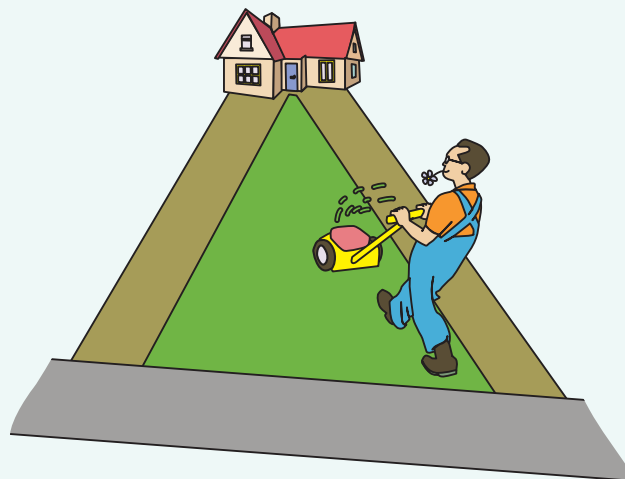
9. Izračunaj površinu dijelova mozaika:

- tamnojubičastog dijela na slici;
- ljubičastog dijela na slici;
- svjetloljubičastog;
- cijelog lika.



10. Autobus koji vozi djecu u školu trebao bi se svaki čas pojaviti na cesti. Matija se još nalazi u kući. Kojim putem mora potrčati do ceste da bi stigao na autobus?

- Nacrtaj najkraći put od kućnih vrata do ceste.
- Izmjeri potrebne veličine na slici i izračunaj površinu travnjaka u obliku trokuta. (Jedan centimetar na slici je jedan metar u stvarnosti).
- Matijin tata svaku subotu kosi travnjak. Da pokosi 1 m^2 travnjaka potrebno mu je 5 minuta. Za koliko vremena pokosi cijeli travnjak?



Igre:

1. Memorija

Karte s likovima su na CD-u

- za uvježbavanje sukladnosti likova.
- Pobjednik je onaj koji skupi više parova.

2. Igra kartama

Karte s trokutima su na CD-u.

Moguće inačice igre:

- spojiti parove sukladnih trokuta,
- spojiti parove po vrsti trokuta,
- spojiti parove trokuta s jednakim površinama (treba najprije izmjeriti potrebne veličine).
- Pobjednik je onaj koji skupi više parova.

3. Igra kartama

Karte s duljinama stranica i veličinama kutova su na CD-u.

Igra je pogodna za grupni rad.
Izvlače se tri karte.

Moguće inačice igre:

- potrebno je odlučiti može li se konstruirati trokut sa zadanim elementima,
- ako može treba ga konstruirati,
- konstruirati mu visine,
- izmjeriti potrebne veličine i izračunati površinu.

4. Tangram

Tangram je slagalica izumljena u drevnoj Kini. Sastoji se od pet trokuta, kvadrata i paralelograma. Pomoću tih dijelova treba složiti razne zagonetne likove.

Na CD-u se nalazi računalna inačica te igre, a po želji možete dijelove ispisati na papir pa igrati s papirnatim modelima.

5. Igre sukladnosti

Igra se sa slikama iz raznih dječjih časopisa - treba otkriti jesu li slike sukladne ili ne (slike s traženjem različitih detalja) ili treba između nekoliko ponuđenih odabrati onu koja je sukladna prvoj (razne sjene i okrenuti likovi).

3. cijeli brojevi

Važni pojmovi

pozitivni i negativni cijeli brojevi

skup cijelih brojeva Z

suprotni brojevi

apsolutna vrijednost

uspoređivanje cijelih brojeva

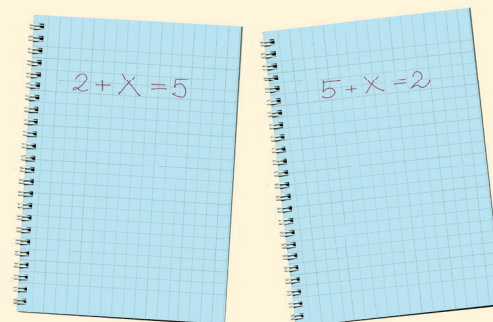
zbrajanje i oduzimanje cijelih brojeva

množenje i dijeljenje cijelih brojeva

Skup N_0 sastoji od svih prirodnih brojeva i 0.

$$N_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Jesu li svi brojevi u tablici prirodni brojevi?



Dnevni hidrološki izvještaj 10. listopada 2009. Rijeka SAVA								
Jesenice	Zagreb	Crnac	Jasenovac	Mačkovac	Davor	Slavonski Brod	Slavonski Šamac	Županja
-196	-276	-199	- 97	89	74	-32	-223	-66



Brojevi koji imaju znak "minus" ispred sebe zovu se **negativni brojevi**. U 16. stoljeću matematičari negativne brojeve zovu numeri falsi ili ficti (lažni brojevi). No oni su ih unatoč tome upotrebljavali!

Zašto nam trebaju negativni brojevi?

Da bismo znali, primjerice:

- pročitati temperaturu na termometru

Ljeti je toplo. Temperature na termometru mogu iznositi i preko 40 °C.

Suprotno ljetnoj temperaturi, zimi je hladno i temperatura se spusti ispod nule.

Primjerice u Zagrebu se temperatura zna spustiti i 18 stupnjeva ispod nule. Kažemo, temperatura je minus osamnaest stupnjeva Celzijevih, i pišemo -18 °C .

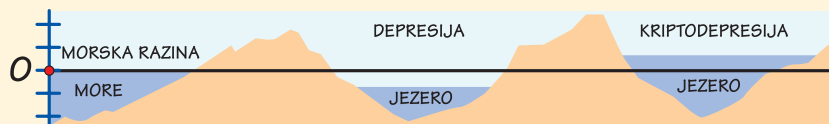
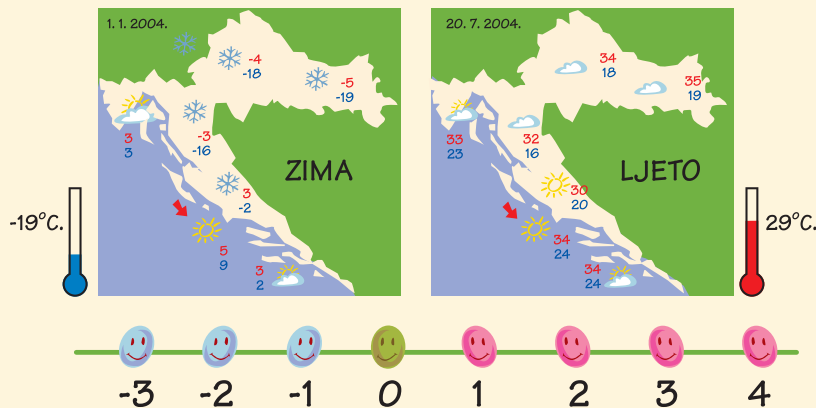
- na kojoj su nadmorskoj visini mjesta ispod razine mora

Ukoliko se i dno i površina jezera nađu ispod razine mora govorimo o depresiji: nadmorska visina Mrtvog mora je -400 m .

Pogledaj sliku i reci što bi bila kriptodepresija?

- koliko nam je stanje na računu u banci

Ako na računu u banci imamo 100 kuna, onda smo u "plusu". Ali ako potrošimo sav novac i još 50 kuna, onda smo u "minusu". Tada nam na računu piše -50 kuna.





Kratki zadaci za ponavljanje

1. Kako označavamo skup prirodnih brojeva?
2. Koja je razlika između skupa N i skupa N_0 ?
3. Koji je najmanji prirodni broj? Koji je najveći prirodni broj?
4. Pročitaj ove znakove: $>$, $<$, $=$.
5. Napiši jedan primjer zbrajanja u N . Kako zovemo brojeve pri zbrajanju?
6. Napiši jedan primjer oduzimanja u N . Kako zovemo brojeve pri oduzimanju?
7. Napiši jedan primjer množenja u N . Kako zovemo brojeve pri množenju?
8. Napiši jedan primjer dijeljenja u N . Kako zovemo brojeve pri dijeljenju?
9. Koliko je:
a) $6 - 0$; b) $6 \cdot 0$; c) $0 : 6$; d) $6 : 0$?
10. Izračunaj:
a) $7 \cdot 620$; b) $48 : 24$.
11. Koliko je: $2 : 3$?
12. Izračunaj: $3\,276 + 578$.
13. Koja svojstva zbrajanja poznaješ?
14. Izračunaj: $216 - 72$.
15. Koliko je: $72 - 216$?
16. Vrijedi li svojstvo komutativnosti za oduzimanje prirodnih brojeva?

3.1. Pozitivni i negativni cijeli brojevi

Sladoled

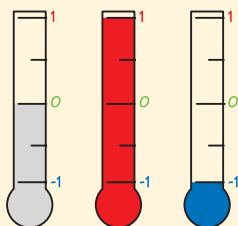
Marko je kupio pakovanje od 550 grama sladoleda. Sutra će počastiti prijatelje. Na kutiji je pisalo: Čuvati na temperaturi od $-18\text{ }^\circ\text{C}$. Razmišljao je da li ga staviti u hladnjak ili zamrzivač? Ako ga stavi u hladnjak, hoće li se sladoled otopiti?



Primjer 1.

Temperatura na termometru

Temperatura na termometru iznosi $0\text{ }^\circ\text{C}$. Kolika će biti temperatura ako se promijeni za $1\text{ }^\circ\text{C}$?



Rješenje:

Ako temperatura na termometru iznosi $0\text{ }^\circ\text{C}$, a zatim se *podigne* za $1\text{ }^\circ\text{C}$, kažemo da je temperatura $1\text{ }^\circ\text{C}$. Međutim, mogla se temperatura *spustiti* za $1\text{ }^\circ\text{C}$. Tada kažemo da je temperatura $-1\text{ }^\circ\text{C}$. Crtica ispred broja 1 čita se "minus" i znači da je temperatura ispod nule.

Primjer 2. Negativni cijeli brojevi

U Dubrovniku je prosječna mjesečna temperatura u prosincu 2001. godine iznosila 4°C iznad nule, a u prosincu 2002. godine 2°C ispod nule.

Kojim ćemo brojevima zapisati ove temperature? Kada je bilo toplije, a kada hladnije?



Rješenje:

Temperaturu 4 °C **iznad nule** zapisujemo brojem: 4 °C.

Temperaturu 2 °C **ispod nule** zapisujemo brojem: -2 °C.

Toplije je bilo u prosincu 2001. kada je temperatura iznosila 4 °C **iznad nule**.

Hladnije je bilo u prosincu 2002. kada je temperatura bila 2 °C **ispod nule**.



Primjer 3.

Dobro pogledaj kartu vremenske prognoze i brojeve koji označavaju temperaturu u pojedinim gradovima.

- Kako ćemo se obući, ako putujemo u Moskvu? Kako ćemo se obući, ako putujemo u Lisabon?
- U kojem gradu je bilo najtoplije? U kojem najhladnije?

Rješenje:

- U Moskvi je hladno, temperatura je ispod nule. Moramo obući deblju odjeću: kaput, kapu, čizme... Međutim, u Lisabonu je toplije, temperatura je iznad nule. Obući ćemo tanju odjeću: tanku majicu, laganu jaknu, niske cipele...



- Najtoplije je bilo u Barceloni (18 °C), a najhladnije u Moskvi (-11 °C).

Podijelimo gradove u tri grupe prema temperaturi:

Gradovi s temperaturom ispod nule (°C)	Gradovi s temperaturom iznad nule (°C)	Gradovi s temperaturom 0 °C
Oslo -2	Barcelona 18	Pariz 0
Stockholm -3	Lisabon 15	
Helsinki -9	London 11	
Moskva -11	Edinburgh 9	
Beč -3	Amsterdam 7	
Sarajevo -1	Zagreb 5	

Temperature iznad nule (topli gradovi) zapisali smo **pozitivnim** cijelim brojevima. Pozitivni cijeli brojevi su: 1, 2, 3, 4, ...
Pozitivni cijeli brojevi su prirodni brojevi.

Temperature ispod nule (hladni gradovi) zapisali smo brojevima ispred kojih se nalazi znak "minus": -1, -2, -3, ...
Ove brojeve nazivamo **negativnim** cijelim brojevima.

Negativnim brojevima opisujemo suprotne vrijednosti od onih opisanih pozitivnim brojevima. Zbog toga ponekad ispred pozitivnih brojeva stavimo znak "plus": +1, +2, +3, ...
U Parizu je temperatura 0 °C.

Pozitivni cijeli brojevi

Negativni cijeli brojevi

Nula nije ni pozitivna ni negativna.

Gdje još susrećemo pozitivne i negativne cijele brojeve?

U životu često kažemo:

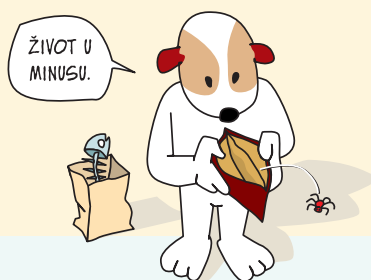
- za vodostaj ispod normalne razine - negativni vodostaj;
- za nadmorsku visinu ispod razine mora - negativna nadmorska visina;
- za dugovanje - negativno poslovanje.

Preko radija možemo čuti izvješće o vodostajima rijeka.

DRAVA	Donji Miholjac		165 cm
	Terezino Polje		-101 cm

Pozitivni broj **165** cm označava da je visina rijeke **165** cm **iznad** normalne razine. Negativni broj **-101** cm označava da je visina rijeke **101** cm **ispod** normalne razine.

Najviši planinski vrh u Hrvatskoj je Dinara, nadmorske visine **1 831** m. Točke na Zemlji koje se nalaze **ispod** morske razine imaju **negativnu** nadmorsku visinu. Primjerice, Kaspijsko jezero (Kazahstan) ima nadmorsku visinu **-67** m.



Ako netko **ima** **400** kuna, onda to možemo zapisati pozitivnim brojem **400** kuna. Ako je pak **dužan** **400** kuna, onda to možemo zapisati negativnim brojem **-400** kuna.



Zadaci

1. Izreci i zapiši u bilježnicu pomoću pozitivnih i negativnih brojeva:
 - a) temperatura 17 stupnjeva iznad nule;
 - b) temperatura 3 stupnja ispod nule;
 - c) dugovanje od 300 kn.
2. a) Kojim brojevima označavamo mjesta iznad morske razine?
b) Kojim brojevima označavamo mjesta ispod morske razine?
3. Što znači vodostaj? Što znači pozitivan vodostaj, a što negativan vodostaj?
4. Kojim brojem bismo zapisali vodostaj rijeke Save u Zagrebu, ako je on 210 cm ispod normalne razine? A Save u Mačkovcu, ako je on 199 cm iznad normalne razine?

Važno

Skup svih cijelih brojeva označava se slovom **Z** i sastoji se od negativnih cijelih brojeva, nule i prirodnih brojeva. Zapisuje se ovako:
 $Z = \{ \dots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots \}$

Za opisivanje i proučavanje veličina kao što su temperatura, nadmorska visina, vodostaj rijeka ili poslovanje s novcem nisu nam dovoljni prirodni brojevi. Trebalo je uvesti broj 0 i negativne cijele brojeve. Svi ovi brojevi zajedno zovu se cijeli brojevi.

Skup cijelih brojeva

$$Z = \{ \dots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots \}$$

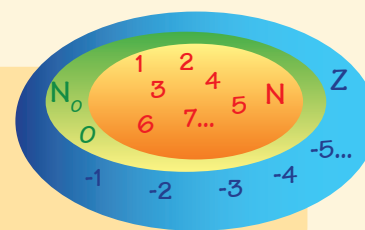
Tri točkice na početku označavaju da niz nije počeo brojem -5, već da se prije njega nalaze brojevi -6, -7, -8 itd.



Primijetimo da je skup N dio ili podskup skupa N_0 , a N_0 podskup skupa Z .

To u matematici možemo zapisati ovako: $N \subset N_0 \subset Z$.

Z je to prvo slovo njemačke riječi *Zahl* (brojka, broj).

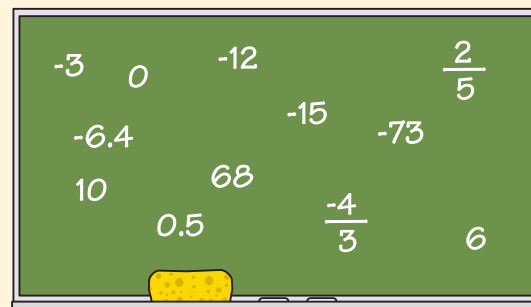


Primjer 4.

Otkrij cijele brojeve

Pogledaj brojeve na ploči pa pronađi:

- a) cijele brojeve;
- b) prirodne brojeve;
- c) negativne cijele brojeve;
- d) brojeve koji nisu cijeli brojevi.



Rješenje:

a) Cijeli brojevi su: 68, 10, 6, 0, -3, -12, -15 i -73;

b) Prirodni brojevi su: 68, 10 i 6;

c) Negativni cijeli brojevi su: -3, -12, -15 i -73;

d) Brojevi 0.5 , $\frac{2}{5}$, $-\frac{4}{3}$ i -6.4 nisu cijeli brojevi.

Zadaci

- 5. Zapiši nekoliko cijelih brojeva koji nisu negativni.
- 6. Zapiši nekoliko negativnih cijelih brojeva.
- 7. Apsolutna nula je najniža temperatura i iznosi $273\text{ }^\circ\text{C}$ ispod nule. Zapiši ovu temperaturu cijelim brojem!
- 8. Temperatura zraka jutros u 8 sati:
 - a) Gdje je najtoplije? Gdje je najhladnije?

- b) Jesu li sve ove temperature zapisane prirodnim brojevima? Koje nisu?
- c) U kojim je gradovima temperatura iznad , a u kojima ispod nule?
- d) Za koliko se stupnjeva razlikuju temperature u Rijeci i Dubrovniku?
- e) Za koliko se stupnjeva razlikuju temperature u Rijeci i Varaždinu?
- f) Pogledaj termometar i prebroji za koliko je stupnjeva toplije u Dubrovniku nego u Varaždinu?

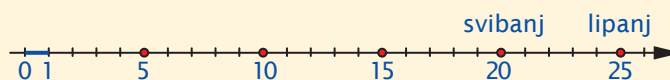
Varždin	Zagreb	Rijeka	Split	Korčula	Dubrovnik
-6 °C	-2 °C	0 °C	4 °C	5 °C	6 °C

3.2. Cijeli brojevi na brojevnom pravcu

Prosječne temperature

Luka crta brojevni pravac i na njemu bilježi prosječne mjesečne temperature za svoj grad. Za mjesec svibanj je označio prosječnu temperaturu $20\text{ }^{\circ}\text{C}$, a za lipanj $25\text{ }^{\circ}\text{C}$.

Prosječna temperatura	
Mjeseci	$^{\circ}\text{C}$
ožujak	7
travanj	15
svibanj	20
lipanj	25



Pomozi mu na brojevnom pravcu označiti prosječnu temperaturu za ostale mjesece! Podaci se nalaze u tablici.

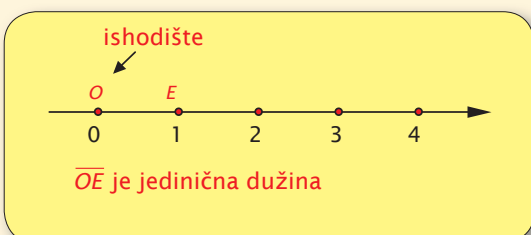


toplije znači
viša temperatura

hladnije znači
niža temperatura

Primjer 1. Prikazivanje negativnih brojeva na pravcu

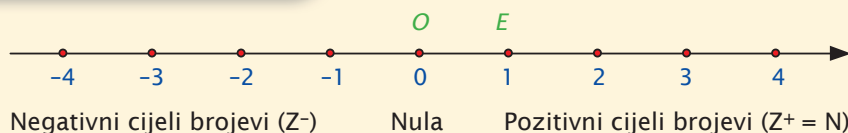
Luka je vratio olovku u ishodište. Sada treba na pravac smjestiti prosječne temperature hladnijih mjeseci iz tablice. Razmišljao je gdje smjestiti temperature s negativnim brojevima.



Rješenje:

Desno od ishodišta nalaze se točke koje je pridružio pozitivnim cijelim brojevima. Taj se smjer u matematici zove **pozitivni smjer**.

Počeo je lijevo od ishodišta naznačivati točke udaljene jednu od druge za duljinu jedinične dužine \overline{OE} i pridruživati ih redom brojevima: $-1, -2, -3, -4, -5$. Najhladniji mjesec u njegovu gradu bio je siječanj, kad je temperatura iznosila $-5\text{ }^{\circ}\text{C}$.



Važno

Na brojevnom pravcu, desno od nule smještamo pozitivne cijele brojeve, a lijevo do nule negativne cijele brojeve.

Svaka dva susjedna cijela broja udaljena su točno za jednu jediničnu duljinu.

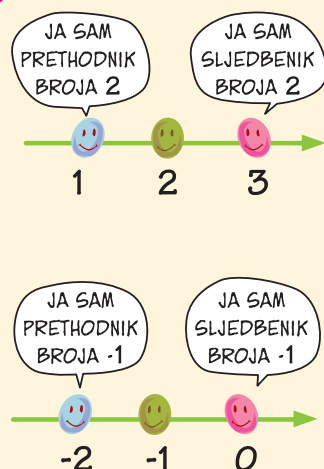


Zadaci

1. Na brojevnom pravcu jedinične duljine $|OE| = 1$ cm, naznači točke pridružene brojevima: -1, -2, -3 i -4.

2. Odaberi po želji duljinu jedinične dužine i nacrtaj takav brojevni pravac da na njemu možeš predočiti brojeve: 5, 4, 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3, -4 i -5.

Primjer 2. Prethodnik i sljedbenik

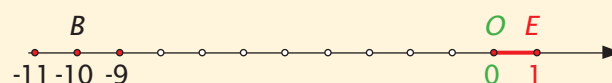


Nacrtaj brojevni pravac kojemu je duljina jedinične dužine $|OE| = 0.5$ cm i istakni točku B

pridruženu -10.

Zatim istakni točku pridruženu neposrednom prethodniku broja -10 i točku pridruženu neposrednom sljedbeniku broja -10.

Rješenje:



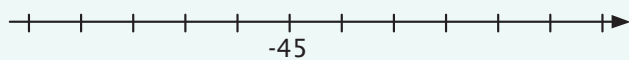
Neposredni **prethodnik** broja -10 je broj koji se nalazi **lijevo** od njega na brojevnom pravcu. To je broj -11.

Neposredni **sljedbenik** broja -10 je broj koji se nalazi **desno** od njega. To je broj -9.

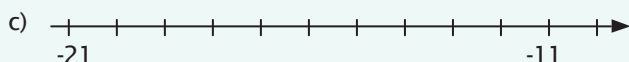
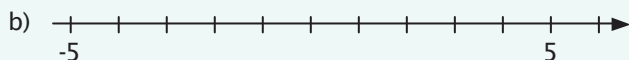
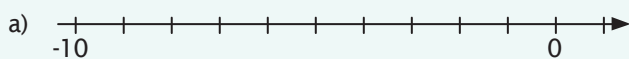
Zadaci

3. Navedi neposredni prethodnik i neposredni sljedbenik svakog od brojeva:
a) 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3 i -4;
b) 20, 345, -45, -100 i -356.

4. Na brojevnom pravcu prikazana je točka pridružena broju -45. Naznači točke pridružene četirima cijelim brojevima lijevo od broja -45 pa desno od broja -45. Koji su to brojevi?



5. Koji se cijeli brojevi nalaze između istaknutih brojeva na brojevnim pravcima sa slike?



6. Koji se cijeli brojevi nalaze između:
a) -1 i 4; b) 3 i -2; c) 0 i -5; d) 3 i -6;
e) -8 i -2; f) -15 i -25; g) -7 i 7.

7. Odredi "položaj" ishodišta O na brojevnom pravcu na kojem su istaknuti brojevi -3 i 3.



8. Na pravcu p točka M pridružena je broju -2, a točka N broju 4. Mjerenjem i računanjem odredi duljinu jedinične dužine u milimetrima. Zatim odredi "položaj" ishodišta O na tom brojevnom pravcu.

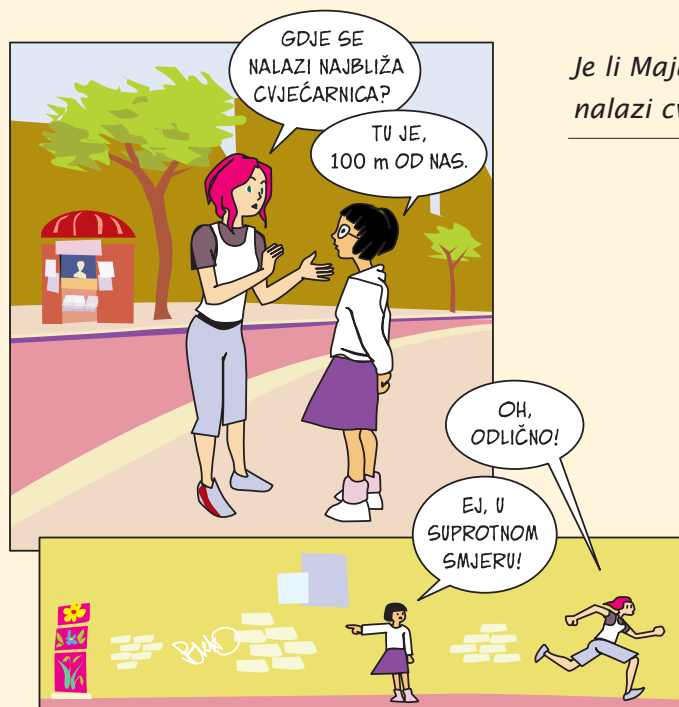


9. Nacrtaj brojevni pravac i na njemu prikaži cijele brojeve:

- a) od -32 do -40; b) od 50 do 57;
c) od -99 do -105; d) od -4 do 4.

3.3. Suprotni brojevi.

Apsolutna vrijednost cijelog broja



Je li Maja dobro objasnila Ani gdje se nalazi cvjećarnica?

Točke pridružene brojevima 1 i -1 jednako su udaljene od ishodišta, ali se nalaze na suprotnim stranama od ishodišta. Oni čine **par suprotnih brojeva**.

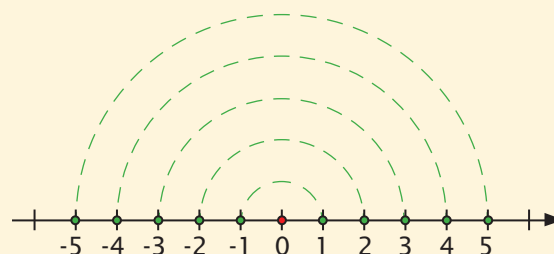
Suprotan broj broja 1 je -1, a suprotan broj broja -1 je 1.

Evo još nekoliko parova suprotnih brojeva: 2 i -2; 3 i -3; 4 i -4; 5 i -5; ...

Važno

Suprotan broj broja 1 je -1, a suprotan broj broja -1 je 1.

Na brojevnom pravcu parovi suprotnih brojeva smješteni su simetrično u odnosu na 0.



Primjer 1.

Suprotni brojevi

- Koji je broj suprotan broju 7?
- Koji je broj suprotan broju -7?
- Zadanim brojevima pridruži suprotne brojeve: -55, 55, 12, -12, 136, -74 i -37.

Rješenje:

- Broj suprotan broju 7 je -7.
- Broj suprotan broju -7 je 7.
- 55 → 55; 55 → -55; 12 → -12; -12 → 12; 136 → -136; -74 → 74; -37 → 37

Za svaki cijeli broj z vrijedi:
suprotan broj broju z je $-z$;
suprotan broj broju $-z$ je z .

Zadaci

1. Odredi suprotan broj zadanom broju:
a) 12; b) -3; c) -28; d) 45.
2. Navedi suprotne brojeve brojevima:
-7, 7, 15, -15, 82, -82, -100, 100.
3. U Varaždinu je jutros temperatura zraka iznosila -6°C . Kolika je jutros temperatura zraka u Dubrovniku, ako se zna da je taj broj suprotan broju -6 ?
4. Koji brojevi su od svojih suprotnih brojeva udaljeni: a) 6; b) 34; c) 100 jediničnih dužina?
5. Nacrtaj pravac i na njega, na proizvoljnoj udaljenosti, smjesti par suprotnih brojeva -123 i 123 .
a) Koji je od njih lijevo, a koji desno na brojevnom pravcu?
b) Odredi ishodište O ovog brojevnog pravca.

Primjer 2.

Suprotno od suprotnog

Koji cijeli broj prikazuje zapis $-(-4)$?

Rješenje:

Zapis: -4 možemo čitati: "suprotan broj broja 4".

Isto tako $-(-4)$ možemo čitati: "suprotan broj broja -4 ".

Kako je to broj $+4$, onda je: $-(-4) = +4$ ili jednostavnije $-(-4) = 4$.

suprotan broj od 5 je -5

$$-(5) = -5$$

suprotan broj od -9 je 9

$$-(-9) = 9$$

neću ne učiti = hoću učiti

Znak "+" se ispred broja može izostaviti radi kraćeg zapisa:

$$+5 = 5; \quad +(-5) = -5; \quad -(+5) = -5$$

$$\begin{aligned} -(-4) &= 4 \\ -(-9) &= 9 \\ +(-7) &= -7 \\ -(+3) &= -3 \end{aligned}$$



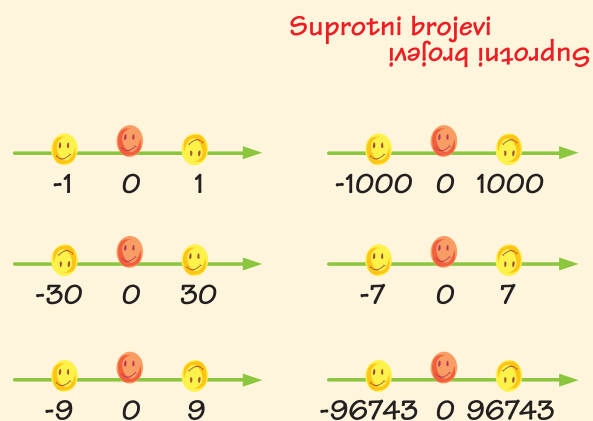
Zadaci

6. Stavi odgovarajući predznak u okvirić:
a) $-(-3) = \square 3$;
b) $+(-17) = \square 17$;
c) $-(+15) = \square 15$;
d) $-(-7) = \square 7$;
e) $-(+5) = \square 5$;
f) $+(-29) = \square 29$.

Primjer 3.

Apsolutna vrijednost

Pročitaj parove suprotnih brojeva sa slike!



- Što je različito paru suprotnih brojeva?
- Što im je jednako?

Važno

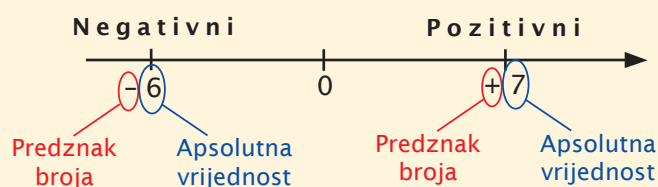
Udaljenost broja od nule na brojevnom pravcu je apsolutna vrijednost broja. Znak | z | čita se: "apsolutna vrijednost broja z" ili "udaljenost broja z od nule". Apsolutna vrijednost svakog broja je pozitivan broj ili nula.

Rješenje:

- Dva broja koja čine par suprotnih brojeva razlikuju se po predznaku.

predznak

Jedan od njih je pozitivan te ispred njega stoji znak plus "+", koji najčešće izostavljamo, a drugi je negativan, te ispred njega stavljamo znak minus "-".



- Par suprotnih brojeva jednako je udaljen od ishodišta na brojevnom pravcu. Za brojeve 9 i -9 ta udaljenost iznosi 9 jedinica; za brojeve -30 i 30 ta udaljenost iznosi 30 jedinica itd.

Apsolutna
vrijednost
broja

$$\begin{array}{l} |9| = 9 \\ \text{Apsolutna vrijednost} \quad \text{je } 9 \\ \text{broja } 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} |-9| = 9 \\ \text{Apsolutna vrijednost} \quad \text{je } 9 \\ \text{broja } 9 \end{array}$$

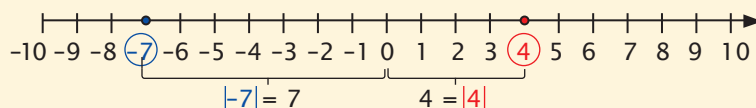
Primjer 4.

Odredi apsolutnu vrijednost

- Odredi: $|-4|$, $|4|$, $|-456|$, $|78|$, $|+79|$, $|0|$.
- Koji brojevi imaju apsolutnu vrijednost: 7, 345, -6?

Rješenje:

Predznak broja nam kazuje je li on lijevo "-7" ili desno "+4" od nule, a apsolutna vrijednost koliko je jedinica udaljen od nule na brojevnom pravcu.



- $|-4| = 4$, $|4| = 4$, $|-456| = 456$, $|78| = 78$, $|+79| = 79$, $|0| = 0$.
- Apsolutnu vrijednost 7 imaju dva cijela broja: 7 i -7. Apsolutnu vrijednost 345 imaju dva cijela broja: 345 i -345. Apsolutnu vrijednost -6 nema nijedan cijeli broj.

Važno

Apsolutna vrijednost svakog broja je pozitivan broj.

Zadaci

- Odredi: $|-59|$, $|59|$, $|-79|$, $|234|$, $|-43|$.
- Koji brojevi imaju apsolutnu vrijednost:
 - 24;
 - 576?
- Nacrtaj brojevni pravac s proizvoljnom jediničnom dužinom. Prvo označi točke kojima su pridruženi brojevi: 6, -8, 2 i -3, a zatim šestarom označi točke kojima su pridruženi njima suprotni brojevi.
- Služeći se znakom za apsolutnu vrijednost $||$ zapiši kolike su apsolutne vrijednosti svih brojeva koje si prikazao na brojevnom pravcu u prethodnom zadatku.
- Brojevima 3, -5, -10, 34, -18, -21, 98, 75 i -13 pridruži suprotne brojeve, na primjer: $3 \rightarrow -3$
- Kolika je udaljenost na brojevnom pravcu između suprotnih brojeva:
 - 45 i -45;
 - 1 256 i 1 256.

13. Popuni tabelu:

zadatak	a)	b)	c)	d)	e)	f)
broj z	7	-7				
Suprotan broj od z			3			
Neposredni prethodnik od z				-3		
Neposredni sljedbenik od z					-4	
Apsolutna vrijednost od z						4

3.4. Uspoređivanje cijelih brojeva



Pročitaj temperature na karti i zaokruži temperaturu mjesta gdje je najhladnije i temperaturu mjesta gdje je najtoplije.

Prepiši rečenicu u bilježnicu i dopuni je: Najtoplije je ondje gdje je temperatura _____, a najhladnije gdje je temperatura _____.

U životu često trebamo odrediti gdje je toplije, a gdje hladnije; gdje je manja nadmorska visina, a gdje viša; gdje je niži vodostaj rijeke, a gdje viši itd. Ovim i još mnogim drugim veličinama vrijednosti su iskazane cijelim brojevima. U takvim situacijama moramo

$a > b$ "a je veći od b"

$a < b$ "a je manji od b"

$a = b$ "a je jednak broju b"

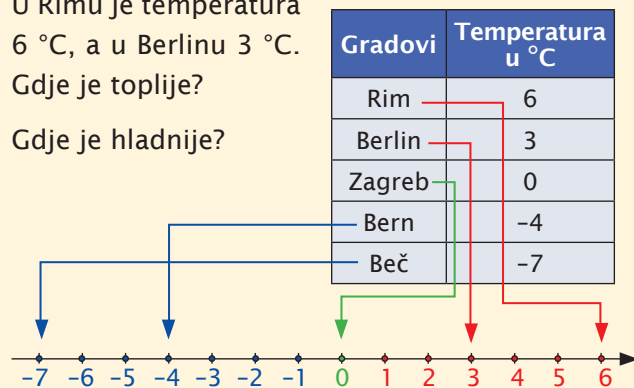
uspoređivati cijele brojeve.

Sve odgovore vezane uz uspoređivanje cijelih brojeva potražiti ćemo na primjeru temperatura gradova iz tablice i termometru.

Primjer 1. Uspoređivanje pozitivnih cijelih brojeva

U Rimu je temperatura $6\text{ }^{\circ}\text{C}$, a u Berlinu $3\text{ }^{\circ}\text{C}$.
Gdje je toplije?

Gdje je hladnije?



Rješenje:

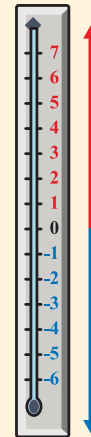
Potražimo odgovor na termometru.

Toplije je ondje gdje je temperatura viša. Hladnije je ondje gdje je temperatura niža.

Kako je u Rimu temperatura viša, možemo zapisati: $6 > 3$.

U Beču je niža temperatura: $3 < 6$.

Brojevi 6 i 3 su pozitivni cijeli brojevi. Pogledajmo iste ove brojeve na brojevnom pravcu.



Od dva pozitivna cijela broja veći je onaj koji se nalazi desno odnosno manji je onaj pozitivni cijeli broj koji se nalazi lijevo na brojevnom pravcu.

Vrijedi li ovo pravilo za sve cijele brojeve? Provjerimo.

Primjer 2. Uspoređivanje s nulom

- a) U Zagrebu je temperatura $0\text{ }^{\circ}\text{C}$, a u Berlinu $3\text{ }^{\circ}\text{C}$. Gdje je niža temperatura?
- b) Na termometru usporedimo temperature u Zagrebu $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ i Bernu $-4\text{ }^{\circ}\text{C}$. Gdje je niža temperatura?

- b) Niža je temperatura u Bernu. Stoga možemo zapisati: $-4 < 0$. Temperature koje su niže od nule zapisane su negativnim brojevima. Svi su oni na brojevnom pravcu smješteni lijevo od nule. Provjeri!

Važno

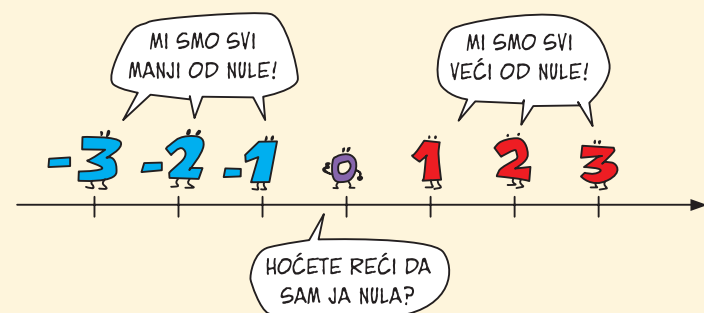
Svaki negativni cijeli broj manji je od nule.

Rješenje:

- a) Niža je temperatura u Zagrebu.
Dakle: $0 < 3$.
Pogledajmo nulu na brojevnom pravcu. Smještena je lijevo od svakog pozitivnog broja.

Važno

Svaki pozitivan cijeli broj je veći od nule.



Primjer 3. Uspoređivanje negativnih cijelih brojeva

U Bernu je $-4\text{ }^{\circ}\text{C}$, a u Beču $-7\text{ }^{\circ}\text{C}$. Gdje niža temperatura (odnosno gdje je hladnije)?

Rješenje:

Niža temperatura je u Beču. To možemo zapisati ovako: $-7 < -4$.

Pogledajmo ove iste brojeve na brojevnom pravcu. Manji broj se nalazi lijevo od većeg.

Od dva negativna cijela broja **veći** je onaj koji se nalazi **desno** odnosno **manji** je onaj koji se nalazi **lijevo** na brojevnom pravcu.

Primjer 4. Pozitivni i negativni cijeli brojevi

Je li niža temperatura u Bernu ($-4\text{ }^{\circ}\text{C}$) ili u Berlinu ($3\text{ }^{\circ}\text{C}$)?

Rješenje:

U Bernu je niža temperatura. To možemo zapisati kao: $-4 < 3$.

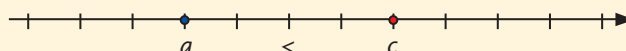
Isto tako, u Bernu je niža temperatura nego u Rimu gdje je $6\text{ }^{\circ}\text{C}$. Dakle $-4 < 6$. Provjeri jesu li brojevi 3 i 6 smješteni desno od broja -4 na brojevnom pravcu!

Svaki je pozitivni broj veći od svakog negativnog broja.

Iz ovih razmatranja možemo zaključiti:

Važno

Od dva cijela broja **veći** je onaj koji se nalazi **desno** odnosno **manji** je onaj cijeli broj koji se nalazi **lijevo** na brojevnom pravcu.



Primjer 6. Najveći i najmanji cijeli broj

- Zapiši sve cijele brojeve manje od 2. Koliko takvih brojeva ima?
- Zapiši sve cijele brojeve veće od -2 . Koliko ovakvih brojeva ima?
- Postoji li najveći cijeli broj? A najmanji?

Rješenje:

- Cijeli brojevi manji od 2 su: 1, 0, -1 , -2 , -3 , -4 , Tri točkice čitamo itd. u beskonačnost, što znači da ovakvih brojeva ima beskonačno mnogo.
- Cijeli brojevi veći od -2 su: -1 , 0, 1, 2, 3, 4, ... I ovaj niz brojeva je beskonačan. Dakle, ima ih beskonačno mnogo.
- Iz prethodnih odgovora zaključujemo da **ne postoji ni najveći ni najmanji cijeli broj**.

Pamti!
Veći - desno
Manji - lijevo



Zadaci

8. veljače u Čakovcu je izmjerena temperatura od $-23\text{ }^{\circ}\text{C}$, a u Dubrovniku $2\text{ }^{\circ}\text{C}$. U kojem je gradu bila niža temperatura?
- Prema hidrološkom izvještaju 20. 7. 2004. vodostaj rijeke Drave u Donjem Miholjcu bio je 105 cm, u Terezinu Polju -101 cm . Gdje je rijeka Drava imala viši vodostaj?
- Tektonskim poremećajima nastaju uleknuća tla. Ta područja na Zemlji imaju nadmorsku visinu nižu od morske razine (0 m). Jezero Turfan (Kina) ima nadmorsku visinu -154 m , a Mrtvo more (Izrael, Jordan) -400 m . Koje jezero ima manju nadmorsku visinu?
- Stavi znak uspoređivanja ($<$, $>$ ili $=$):
a) $12 \square 45$; b) $12 \square -45$; c) $-12 \square -45$
d) $127 \square 107$; e) $-65 \square 0$; f) $76 \square -65$.
- Poredaj podatke u rastućem nizu:
 $-11\text{ }^{\circ}\text{C}$, $17\text{ }^{\circ}\text{C}$, $-12\text{ }^{\circ}\text{C}$, $0\text{ }^{\circ}\text{C}$, $29\text{ }^{\circ}\text{C}$, $-29\text{ }^{\circ}\text{C}$.
- Stavi znak uspoređivanja:
 $0 \square 1 \square 2 \square 3 \square 4 \square 5 \square 6 \dots$
- $0 \square -1 \square -2 \square -3 \square -4 \square -5 \square -6 \dots$
- Napiši sve cijele brojeve veće od -25 i manje od -15 .
- Na brojevnom pravcu istakni cijele brojeve x tako da je: $-4 < x < 7$.
- U tablici su prosječne mjesečne temperature.

Mjesec	Temperature
Prosinac	$-5\text{ }^{\circ}\text{C}$
Siječanj	$-6\text{ }^{\circ}\text{C}$
Veljača	$-7\text{ }^{\circ}\text{C}$
Ožujak	$8\text{ }^{\circ}\text{C}$

Pridruži zadane temperature točkama brojevnog pravca.

- Zatim nabroji temperature, počevši od najniže.
 - Koliko stupnjeva iznosi razlika između najniže i najviše temperature u tablici?
11. Poredaj po visini navedene vodostaje rijeke Save tako da počneš s najnižim.

Dnevni hidrološki izvještaj 10. 9. 2009. Rijeka SAVA								
Jasenice	Zagreb	Crnac	Jasenovac	Mačkovac	Davor	Slavonski Brod	Slavonski Šamas	Županja
-196	-276	-199	-97	89	74	-32	-223	-66

Pomoću vremenske crte probaj riješiti ove zadatke:

- 12.a) Smatra se da su prve Olimpijske igre održane u Grčkoj 776. godine prije Krista. Prije koliko godina je to bilo?
b) 753. godine prije Krista osnovan je Rim, prijestolnica kasnije velikoga Rimskog Carstva.
c) Prije koliko godina je to bilo?
d) Što se dogodilo prije: prve Olimpijske igre ili osnivanje Rima?
- 13.a) Velike piramide u Egiptu počele su se graditi prije otprilike 4 800 godina. Koje je to godine (otprilike) bilo?
b) Gradnja Kineskog zida počela je prije otprilike 2 200 godina. Kad je to bilo?
c) Jesu li starije piramide u Egiptu ili Kineski zid? Za koliko godina?
d) Hijeroglifi (egipatsko pismo) nastalo je oko 900 godina prije nego što su se počele graditi piramide. Kad je to bilo?
14. Usporedi i obrazloži:
a) 8 i 1; b) -3 i 4;
c) -1 i -3; d) 7 i -2;
e) -9 i 0; f) 5 i 9;
g) 7 i 0; h) -8 i 0;
i) -7 i -12; j) 6 i -3;
k) -12 i 4; l) 0 i -6.
15. Usporedi i obrazloži:
a) 6 i 12; b) 3 i -4;
c) -11 i -3; d) -7 i -2;
e) 0 i 3; f) 15 i 6;
g) 4 i 0; h) -18 i -19;
i) 0 i -12; j) 3 i -3;
k) 2 i -4; l) -3 i -6.

Vježbalica

1. Pripada li broj skupu brojeva:

broj	prirodni	cijeli	cijeli pozitivni	cijeli negativni	nije cijeli
3					
-5					
0					
2.5					
-4					
8					
125					
0.6					
-19					
14					
-2.7					
$\frac{3}{4}$					
-12					
$\frac{12}{4}$					
-3					

2. Ako znakom "+" označimo zaradu, a znakom "-" potrošnju, koliko će novaca tko imati?

Ime	zarada u kunama	potrošnja	ima novaca u kunama
Ana	+ 70	-0	
Maja	+ 90	-100	
Luka	+ 120	-60	
Marko	+ 430	-40	
Petar	+ 160	-200	
Ante	+10	-50	
Lucija	+240	-380	

3. Temperatura zraka jutros u 8 sati:

Varaždin	-10 °C
Zagreb	-8 °C
Rijeka	-1 °C
Split	2 °C
Korčula	6 °C
Dubrovnik	10 °C

a) Gdje je najtoplije? Gdje je najhladnije?

b) Jesu li sve ove temperature zapisane prirodnim brojevima? Koje nisu?

c) Pronađi na termometru temperature navedene u tablici i uoči u kojim gradovima su temperature iznad nule, a u kojim ispod nule.

d) Za koliko se stupnjeva razlikuju temperature u Rijeci i Dubrovniku?

e) Za koliko se stupnjeva razlikuju temperature u Rijeci i Varaždinu?

f) Pogledaj termometar i prebroji za koliko je stupnjeva toplije u Dubrovniku nego u Varaždinu?

4. Odaberi po želji duljinu jedinične dužine i nacrtaj takav brojevni pravac da na njemu možeš predočiti brojeve: 8, -4, 6, 0, -2, 7, -5.

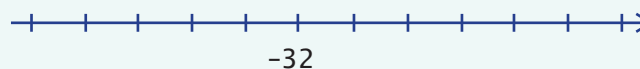
5. Popuni tablicu

neposredni prethodnik	broj	neposredni sljedbenik
	-3	
		4
-5		
		0
	2	
-8		
	12	
		-11
-15		

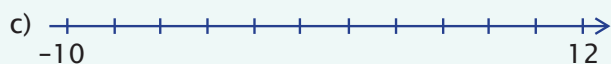
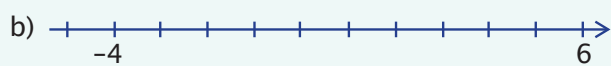
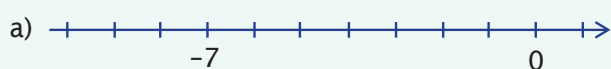
6. Popuni tablicu

neposredni prethodnik	broj	neposredni sljedbenik
	-17	
		34
-25		
		50
	42	
-28		
	-28	
		-19
-105		

7. Na brojevnom pravcu prikazana je točka pridružena broju -32. Naznači točke pridružene četirima cijelim brojevima lijevo od broja -32 pa desno od broja -32. Koji su to brojevi?



8. Koji se cijeli brojevi nalaze između istaknutih brojeva na brojevnim pravcima sa slike?



9. Koji se cijeli brojevi nalaze između:

- a) -3 i 7; b) -4 i 8; c) 0 i 5; d) -3 i 10.

10. Ispiši sve cijele brojeve x za koje vrijedi:

- a) $-3 < x < 5$; b) $-8 \leq x < -2$;
 c) $x > -5$; d) $x < -7$;
 e) $-18 < x < -12$; f) $-35 \leq x \leq -25$;
 g) $x > -3$.

11. Odredi suprotan broj zadanom broju:

- a) 76; b) -4; c) -146; d) 0.

12. Koji brojevi su od svojih suprotnih brojeva udaljeni:

- a) 8; b) 10; c) 40 jediničnih dužina?

13. Stavi odgovarajući predznak u okvirčić:

- a) $-(-(-6)) = \in \ 6$;
 b) $-(+(-17)) = \in \ 17$;
 c) $-(-(+16)) = \in \ 16$;
 d) $-(+(-74)) = \in \ 74$;
 e) $- (+ 55) = \in \ 55$;
 f) $-(+(-26)) = \in \ 26$.

14. Odredi:

- a) $|-509|$; b) $|57|$; c) $|-9|$; d) $|34|$; e) $|-3|$.

15. Koji brojevi imaju apsolutnu vrijednost:

- a) 2; b) 56?

16. Popuni tablicu:

z	Suprotan broj od z	Neposredni prethodnik od z	Neposredni sljedbenik od z	Apsolutna vrijednost od z
-4				
8				
	-5			
		-11		
			-25	
				16
		34		
	26			
				25
			-33	

17. Popuni tablicu:

z	Suprotan broj od z	Neposredni prethodnik od z	Neposredni sljedbenik od z	Apsolutna vrijednost od z
-8				
		-34		
12				
	-7			
		-18		
			-56	
				9
		20		
	6			
				16

18. Usporedi cijele brojeve:

- a) -4 i 5 ;
 b) -23 i -67;
 c) 0 i -34;
 d) -99 i -55;
 e) -45 i -54;
 f) -56 i 44;
 g) -44 i -56.

19. Poredaj brojeve po veličini počevši od najmanjeg:

- a) 3, -45, -6, 2, -33, -42, -7, 0;
 b) -76, -56, 45, -34, 34, -1, -23, 2.

20. Poredaj brojeve po veličini počevši od najvećeg

- a) 4, -8, -9, -11, -12, 6, 0, -6;
 b) -8, -34, -31, -2, 5, -9, 11, 0.

3.5. Zbrajanje cijelih brojeva

1	uplata	isplata	stanje
2			-4.000kn
3	4.500 kn		
4			

Izvod bankovnog računa

Stanje na računu Lukinog tate je - 4000 kn. Koliko će biti stanje na računu nakon uplate od 4500 kn?

U svakodnevnom životu vrlo često trebamo jednoj veličini pribrojiti drugu. Primjećuješ li da su, u ovom primjeru, pribrojnici pozitivni cijeli brojevi, a njih

$$\begin{array}{r}
 \text{pribrojnici} \quad \text{zbroj} \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 234 + 32 = 266
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 234 \\
 + 32 \\
 \hline
 266
 \end{array}$$

znaš zbrajati.

Zbroj dvaju pozitivnih cijelih brojeva pozitivan cijeli broj.

No jesu li uvijek veličine koje zbrajamo izražene pozitivnim cijelim brojevima? Pogledajmo kako ćemo zbrajati ako nisu.

Primjer 1.

Anino dugovanje

Ana je dužna Maji 30 kuna. Ako posudi od nje još 6 kuna, koliki će biti njen ukupni dug?

Rješenje:

Zadatak je jednostavan. Zbrojimo 30 kn i 6 kn. Dakle dužna je 36 kn.

Međutim, u ovakvom računanju morali bismo uvijek uz navedeni iznos zapisivati je li to "dug" ili "zarada".

Dug od 30 kn možemo prikazati kao broj -30 i dug od 6 kn kao broj -6.

Zbrojimo ova dugovanja: $-30 + (-6) = -36$

Rješenje je broj -36 jer je Ana dužna 36 kn.

Zbroj dvaju negativnih cijelih brojeva je negativan cijeli broj.



Primjer 2.**Zbrajanje na brojevnom pravcu**

Odredi prvo predznak rezultata, pa izračunaj:

a) $2 + 3 = \underline{\quad}$

b) $-2 + (-3) = \underline{\quad}$

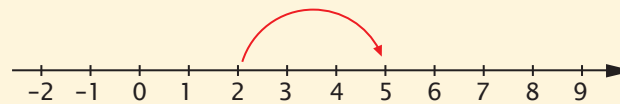
Rješenje:

a) Pozitivnom broju pribrajamo pozitivan broj.

Zbroj će imati pozitivan predznak: $2 + 3 = 5$
Iskoristimo ovo zbrajanje i pokažimo kako se do rješenja može doći uz pomoć brojevnog pravca. Uvijek krećemo od prvog pribrojnika, a onda postavimo sebi pitanje: pribrajamo li mu

pozitivan ili negativan cijeli broj?

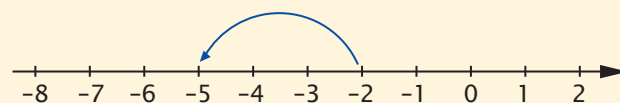
Pribrajamo **pozitivni broj**, pa se pomičemo **udesno**.



b) Negativnom broju pribrajamo negativan broj. Zbroj će imati negativan predznak:

$$-2 + (-3) = -5$$

Pribrajamo **negativni broj**, pa se na brojevnom pravcu pomičemo **ulijevo**.



Zbrajanje pozitivnih brojeva	
pribrojnici	zbroj
$2+9 =$	11
$17+5 =$	22
$29+16 =$	45

Zbrajanje negativnih brojeva	
pribrojnici	zbroj
$-2+(-9) =$	-11
$-5+(-8) =$	-13
$-13+(-7) =$	-20

Negativni broj stavlja se u zagradu da bi se odvojio od znaka računске operacije (+, -, · ili :)

Pokušajte iz gornjih primjera izvesti pravilo za zbrajanje cijelih brojeva jednakih predznaka.

Važno

Cijele brojeve **jednakih predznaka** zbrajamo tako da:

- apsolutne vrijednosti **zbrojimo**,
- rezultatu prepisemo zajednički predznak pribrojnika.

Zadaci

1. Prepiši tablicu u bilježnicu i popuni je dokraja.

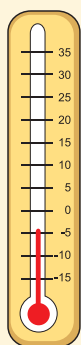
pribrojnici	zbroj	jednakost
4	6	$4 + 6 = 10$
-4	-6	$-4 + (-6) = -10$
3	2	$3 + 2 = 5$
-3	-2	$-3 + (-2) = -5$
2	5	
-2	-5	
-5	-10	
4	15	
-4	-15	
-25	0	
25	0	

2. Izračunaj napamet:

- | | |
|-------------------|-------------------|
| a) $7 + 6;$ | b) $-7 + (-6);$ |
| c) $3 + 15;$ | d) $-3 + (-15);$ |
| e) $-5 + (-7);$ | f) $-18 + (3);$ |
| g) $-11 + (-12);$ | h) $-8 + 0;$ |
| i) $0 + (-6);$ | j) $-12 + (-12);$ |
| k) $-17 + (-17);$ | l) $-31 + (-5);$ |
| m) $-9 + (-7);$ | n) $-15 + (-2);$ |
| o) $-41 + (-2).$ | |

3. Ronilac je bio na dubini od -8 m. Na kojoj dubini će biti ako se:

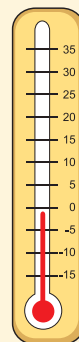
- spusti još 5m;
- spusti još 7 m?



Kod zbrajanja cijelih brojeva pribrojnici mogu imati različite predznake.

$$3 + (-4) = ?$$

$$-3 + 2 = ?$$



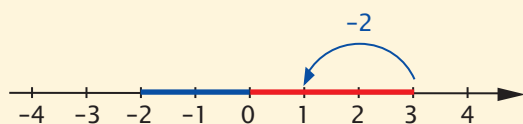
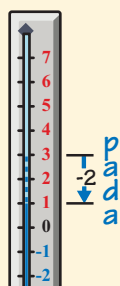
Primjer 3. Zahlađenje - temperatura opada

Temperatura na termometru u podne iznosi 3 °C. Kolika će biti temperatura navečer ako tijekom popodneva zahladi i temperatura se spusti za:

- a) 2 °C; b) 3 °C; c) 4 °C?

Rješenje:

a) Ako se temperatura od 3 °C spusti za 2 stupnja ona će i dalje ostati iznad nule.

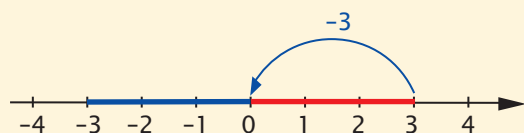
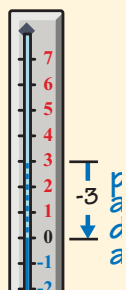


Pozitivnom broju dodajemo **negativni broj** koji je **manje** udaljen od nule.

Rezultat će ostati **pozitivan broj**.

$$3 + (-2) = 1.$$

b) Ako se temperatura od 3 °C spusti za 3 stupnja temperatura više neće biti iznad nule. Neće biti ni ispod nule!



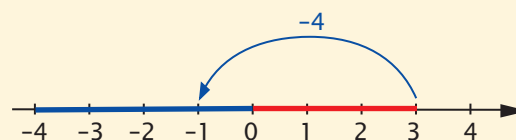
Pozitivnom broju dodajemo **negativni broj**. Oba broja su **jednako** udaljena od nule, ali svaki sa jedne strane brojevnog pravca. Rezultat će biti **nula**.

$$3 + (-3) = 0.$$

Zbroj suprotnih brojeva je nula.

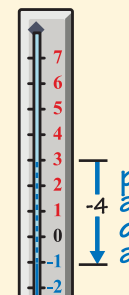
c) Ako se temperatura od 3 °C spusti za 4 stupnja temperaturu će tada biti ispod nule.

Pozitivnom broju dodajemo **negativni broj** koji je **više** udaljen od nule.



Rezultat će ostati **negativni broj**.

$$3 + (-4) = -1.$$

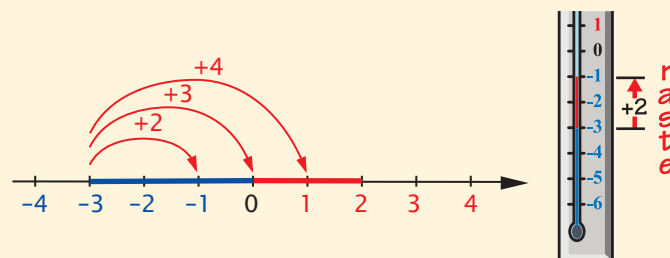


Ako pozitivnom broju dodajemo negativan broj, rezultat će ostati pozitivan broj, sve dok mu ne dodamo suprotan broj ili takav negativan broj koji je udaljeniji od nule nego on.

Primjer 4.**Zatopljenje - temperatura raste**

Temperatura ujutro iznosi $-3\text{ }^{\circ}\text{C}$. Kolika će biti temperatura ako se do podne podigne za:

- a) $2\text{ }^{\circ}\text{C}$; b) $3\text{ }^{\circ}\text{C}$; c) $4\text{ }^{\circ}\text{C}$?

**Rješenje:**

Negativnom broju dodajemo **pozitivan broj**

$$-3 + 2 = -1.$$

$$-3 + 3 = 0.$$

$$-3 + 4 = 1.$$

Ako negativnom broju dodajemo pozitivan broj, rezultat će ostati negativan broj sve dok mu ne dodamo suprotan broj ili takav pozitivan broj koji je udaljeniji od nule nego on.

Primjer 5. Zbrajanje cijelih brojeva različitih predznaka

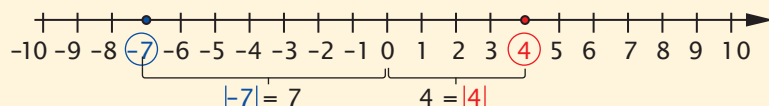
Izračunaj:

a) $-7 + 4 = ?$

b) $5 + (-9) = ?$

c) $-7 + 11 = ?$

d) $12 + (-6) = ?$



$$-7 + 4 = -3$$

predznak negativan
jer je $|-7| > |4|$

apsolutna vrijednost
jer je $7 - 4 = 3$

$$5 + (-9) = -4$$

predznak negativan
jer je $|-9| > |5|$

apsolutna vrijednost
jer je $9 - 5 = 4$

$$-7 + 11 = 4$$

predznak pozitivan
jer je $|11| > |-7|$

apsolutna vrijednost
jer je $11 - 7 = 4$

$$12 + (-6) = 6$$

predznak pozitivan
jer je $|12| > |-6|$

apsolutna vrijednost
jer je $12 - 6 = 6$

Rješenje:

Kako ćemo doći do rezultata? Prvo mu odredimo predznak, a onda apsolutnu vrijednost.

Pogledaj!

Važno

Cijele brojeve **različitih predznaka** zbrajamo tako da:

1. od veće apsolutne vrijednosti **oduzmemo** manju.
2. rezultatu prepisemo **predznak** pribrojnika **veće** apsolutne vrijednosti.

Zadaci

4.

Zbroj	Usporedi apsolutne vrijednosti	Predznak zbroja je:	zbroj
$-3 + 4$			
$1 + (-3)$			
$7 + (-2)$			
$-9 + 0$			
$-8 + 1$			
$7 + (-4)$			

5. Najprije odluči je li rezultat pozitivan ili negativan, a zatim izračunaj.

- a) $25 + (-20)$; b) $-16 + 15$;
 c) $-7 + (-10)$; d) $-4 + 4$;
 e) $-10 + 26$; f) $-56 + 18$;
 g) $-34 + (-66)$; h) $75 + (-25)$;
 i) $20 + (-20)$; j) $66 + (-77)$;
 k) $32 + 100$; l) $-560 + (-40)$.

Primjer 7. Stanje na računu

Majina mama ima tekući račun u banci. Na taj račun dobiva plaću, i pomoću kartice može s njega podići novac na bankomatu ili plaćati u trgovini. Banka dozvoljava Majinoj mami da podigne 1 000 kuna više nego što trenutno ima na računu. Ako Majina mama potroši više novaca nego što ima na računu, ona duguje banci, pa kaže da je u minusu.

Majina mama na računu ima 470 kuna.

- a) Kakvo će joj biti stanje na računu nakon što podigne 400 kuna? Hoće li ući u minus?
 b) Kakvo će joj biti stanje na računu, ako podigne 500 kuna? Hoće li ući u minus?
 c) Koliko najviše novaca smije Majina mama podići, a da ne uđe u minus?

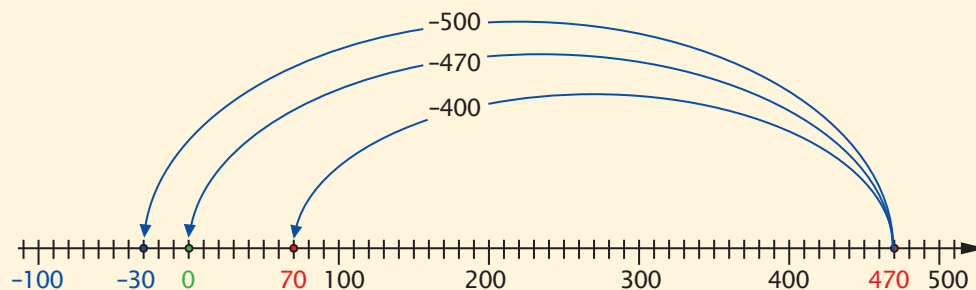
Rješenje:

Majina mama ima na računu 470 kn.

- a) Ako podigne 400 kn, stanje na njenom računu će biti 70 kn. Neće ući u minus, jer je digla s računa manje novaca nego što ima na računu: $470 + (-400) = 70$.
 b) Ako pak podigne 500 kn, onda je podigla više nego što ima na računu, te će ući u minus. Stanje na računu će joj biti -30 kn: $470 + (-500) = -30$.
 c) Jasno, smije najviše podići onoliko kuna koliko ima na računu, a da ne uđe u minus: Dakle, 470 kn: $470 + (-470) = 0$.

Rješenja ovog zadatka možemo potražiti i na brojevnom pravcu.

Ne zaboravi!
 Jednaki predznaci - zbroji.
 Različiti predznaci - oduzmi.
 Predznak prepisi od pribrojnika veće apsolutne vrijednosti.



Zadaci

6. Izračunaj:
 a) $-7 + (-9)$; b) $7 + 9$; c) $7 + (-9)$; d) $-7 + 9$;
 e) $-4 + (-2)$; f) $71 + 9$; g) $1 + (-8)$; h) $-3 + 9$;
 i) $-5 + (-20)$; j) $0 + 4$; k) $0 + (-9)$; l) $-21 + 9$.
7. Izračunaj:
 a) $-27 + (-3)$; b) $19 + 19$; c) $98 + (-8)$;
 d) $-30 + 9$; e) $-70 + (-90)$; f) $-8 + 9$;
 g) $-8 + (-72)$; h) $-72 + 9$; i) $-5 + (-35)$;
 j) $7 + 0$; k) $0 + (-9)$; l) $-7 + 0$.
8. Izračunaj:
 a) $-39 + (-9)$; b) $170 + 9$; c) $82 + (-2)$;
 d) $-2 + 29$; e) $-71 + (-9)$; f) $-64 + 9$;
 g) $23 + (-12)$; h) $-14 + 9$; i) $-55 + (-5)$;
 j) $-77 + 9$; k) $44 + (-9)$; l) $-44 + 9$;
 m) $-37 + (-41)$; n) $132 + 5$; o) $54 + (-5)$;
 p) $-37 + 27$.
9. Lukin tata imao je stanje na tekućem računu - 120 kuna. Stigla mu je uplata plaće 3 200 kuna. Koliko mu je stanje na računu nakon uplate plaće? Koliko će mu biti stanje, ako podigne još 700 kuna?
10. Lukin tata imao je na tekućem računu stanje 276 kuna. Podigao je 500 kuna. Hoće li biti u minusu? Koliko će mu točno biti stanje? Koliko će mu biti stanje, ako nakon toga podigne još 200 kuna?
11. Majina mama na tekućem računu ima stanje 487 kuna.
 a) U trgovini je karticom platila cipele 395 kuna. Je li joj na računu ostalo više ili manje od 100 kuna? Prvo procijeni, pa točno izračunaj!
- b) Nakon toga je karticom platila i kućne potrepštine 527 kuna. Koliko joj je stanje na računu nakon toga? Prvo procijeni, pa točno izračunaj!
12. Anin tata ima na tekućem računu stanje 168 kuna. Hoće li biti u minusu, ako na bankomatu podigne 200 kuna? Hoće li mu stanje biti manje ili više od - 100 kuna. Prvo procijeni, pa točno izračunaj!
12. Temperatura u 15 sati bila je $10\text{ }^{\circ}\text{C}$ a dva sata kasnije promijenila se za 5 stupnjeva. Kolika je tada bila temperatura? Koliko zadatak ima rješenja? Zašto?
13. Stanje na računu bilo je - 1000 kn, nakon prve uplate bilo je - 700 kn. Kolika je bila uplata? Koliko je još potrebno uplatiti da bi stanje bilo 1100 kn?
14. Temperatura je bila $-5\text{ }^{\circ}\text{C}$ pa je zatopljilo za $8\text{ }^{\circ}\text{C}$. Kolika je sad temperatura?
15. Temperatura je bila $-5\text{ }^{\circ}\text{C}$ pa je zahladilo za $8\text{ }^{\circ}\text{C}$. Kolika je sad temperatura?
16. Izračunaj:
 a) $-9 + (-129)$; b) $70 + 93$;
 c) $812 + (-223)$; d) $-200 + 69$;
 e) $-701 + (-99)$; f) $-4 + 79$;
 g) $253 + (-512)$; h) $-149 + 926$;
 i) $-505 + (-50)$; j) $-727 + 922$;
 k) $414 + (-900)$; l) $-448 + 229$;
 m) $-371 + (-41)$; n) $12 + 55$;
 o) $514 + (-500)$;

Primjer 8. Svojstva zbrajanja

Prisjeti koja svojstva zbrajanja znaš.

Izračunaj i usporedi rezultate.

- a) $-3 + (-4) =$
 $-4 + (-3) =$
 b) $4 + (-14 + 12) =$
 $(4 + (-14)) + 12 =$

Rješenje:

- a) $-3 + (-4) = -7$
 $-4 + (-3) = -7$

Ako pribrojnicima zamijenimo mjesta, zbroj se neće promijeniti.

Važno

Komutativnost vrijedi za zbrajanje bilo kojih dvaju cijelih brojeva a i b .
 $a + b = b + a$.

- b) $4 + (-14 + 12) = 4 + (-2) = 2$
 $(4 + (-14)) + 12 = -10 + 12 = 2$

Ako iste pribrojnike združimo na različite načine, zbroj će uvijek biti jednak.

Važno

Asocijativnost vrijedi za zbrajanje bilo kojih triju cijelih brojeva a , b i c .
 $a + (b + c) = (a + b) + c$.

Primjer 9. Posebni brojevi

Izračunaj:

a) $7 + 0 =$ $0 + (-7) =$

b) $17 + (-17) =$ $-20 + 20 =$

Rješenje:

a) $7 + 0 = 7$ $0 + (-7) = -7$

b) $17 + (-17) = 0$ $-20 + 20 = 0$

Važno

Ako nulu pribrojimo nekom cijelom broju, rezultat će biti isti taj broj.

$a + 0 = a$ i $0 + a = a$.

Brojevi 17 i -17 te -20 i 20 su parovi suprotnih brojeva. Njihov zbroj je uvijek nula.

Okvir Važno - Zbroj suprotnih brojeva...

Važno

Zbroj suprotnih brojeva jednak je nuli.

$-z + z = 0$ i $z + (-z) = 0$.

Primjer 5.**Primjena svojstva**

Primijenimo sva svojstva zbrajanja cijelih brojeva u idućem zadatku:

$-7 + (-10) + 7 = ?$

Rješenje:

$-7 + (-10) + 7 = (-7 + 7) + (-10) = 0 + (-10) = -10$

Redom smo primjenjivali:

- komutativnost i asocijativnost
- zbroj suprotnih brojeva
- zbrajanje s nulom.

Kad god primijetiš u nekom zbrajanju par suprotnih brojeva, prekriži ih. Kažemo da smo ih "poništili". Zašto?

Njihov zbroj jednak je nuli, a nulu ne moraš pisati jer ne utječe na rezultat zbrajanja.

Stoga je kraći zapis ovog zadatka:

~~-7~~ + (-10) + ~~7~~ = -10 .

Kod zbrajanja -

poništi suprotne brojeve

~~-7~~ + (-10) + ~~7~~ = -10

**Z a d a c i**

1. U ovim zadacima najprije poništi suprotne pribrojnike pa napamet izreci rješenje:

- $8 + (-8) + 12$;
- $-9 + 14 + 9$;
- $28 + (-300) + 300$;
- $-59 + 23 + 59$.

2. Izračunaj:

- $11 + 22 + 35 + 14 + (-22) + (-35)$;
- $-15 + 17 + 15 + (-3) + (-17) + 3$.

3. Lucija je u lonac, u kojem je temperatura bila 0°C , dodala 5 hladnih žetona, 4 topli i na kraju još 5 toplih žetona. Prvo napiši brojevni izraz pa izračunaj krajnju temperatura u loncu?

Primjer 6.

Izračunaj:

$$-86 + 689 + 97 + (-75) + 86 + 39 + (-689) + (-42) = ?$$

Rješenje:

Svojstva komutativnosti i asocijativnosti omogućavaju nam da cijele brojeve zbrajamo bilo kojim redoslijedom.

U ovom primjeru, kao i prije, prvo ćemo poništiti suprotne brojeve:

$$\cancel{-86} + \cancel{689} + 97 + (-75) + \cancel{86} + 39 + \cancel{(-689)} + (-42) = \\ = 97 + (-75) + 39 + (-42) =$$

Ovaj dio zadatka možemo riješiti na dva načina:

I. način - zbrajamo postupno, tj. redom slijeva nadesno:

$$97 + (-75) + 39 + (-42) = 22 + 39 + (-42) = 61 + (-42) = 19$$

II. način - združujemo pozitivne brojeve u jednu zagradu, a negativne u drugu:

$$97 + (-75) + 39 + (-42) = \\ (97 + 39) + ((-75) + (-42)) = 136 + (-117) = 19$$

Drugi način je brži ukoliko imamo veći broj pribrojnika.



Primijenite svojstva zbrajanja da bi lakše izračunali:

- poništi suprotne brojeve
- združi pozitivne pribrojnike u jednu zagradu, a negativne u drugu zagradu

Zadaci

4. Izračunaj:

- a) $-16 + 14 + (-24) + 6$;
- b) $7 + (-12) + (-3) + 9$;
- c) $-3 + (-9) + (-7) + 4 + (-9) + (-6)$;
- d) $8 + (-6) + 9 + (-7) + 6$;
- e) $6 + 9 + (-7) + (-9) + (-4)$;
- f) $6 + (-7) + (-5) + (-7) + 6$.

5. Lukin tata pažljivo bilježi promet na svom tekućem računu. Pomozi mu i izračunaj konačno stanje na njegovu računu:

- a) Popuni stupac Stanje i izračunaj koliko kuna na računu ima Lukin tata 20. 04.

Datum:	Opis:	Uplata:	Isplata:	Stanje:
03. 04.	Trenutno stanje	-	-	- 135
05. 04.	Kućne potrepštine	-	227	
07. 04.	Uplata plaće	4 128	-	
11. 04.	Bankomat (za režije)	-	1 300	
15. 04.	Rata za osiguranje auta	-	438	
18. 04.	Bankomat	-	500	
20. 04.	Trenutno stanje	-	-	

- b) Lukin tata zna da će mu na naplatu doći još i rata kredita u iznosu od 1 370 kuna. Koliko kuna smije još potrošiti, ako ne želi ući u minus?

3.6. Oduzimanje cijelih brojeva

Hlađenje mora

Oduzimanje se svodi na zbrajanje

Petar mjeri temperaturu mora. Ljetos je bila $23\text{ }^{\circ}\text{C}$, a sada se spustila na svega $14\text{ }^{\circ}\text{C}$. Kolika je razlika između ljetne i zimske temperature? Kako se promijenila temperatura?

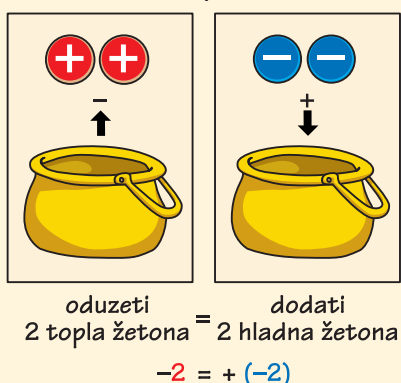
Primjer 1.

Oduzimamo pozitivan broj

Početna temperatura u loncu je $5\text{ }^{\circ}\text{C}$. Želimo je sniziti za $2\text{ }^{\circ}\text{C}$. Kako ćemo to napraviti?

Rješenje:

Snižavanje temperature za $2\text{ }^{\circ}\text{C}$, možemo to napraviti na dva načina:



$5 + (-2) = 3!$
DAKLE UOPĆE NISMO
TREBALI PLUS ZA TU
OPERACIJU. MOGLI SMO
ODMAH JEDNOSTAVNO
RAČUNATI $5 - 2$. HA!

$$5 - 2 = 5 + (-2)$$

Primjer 2.

U loncu je temperatura $-7\text{ }^{\circ}\text{C}$. Treba je sniziti za $3\text{ }^{\circ}\text{C}$. Kako?

Rješenje:

Luka je dodao 3 hladna žetona.
 $-7 + (-3) = -10$. Bit će $-10\text{ }^{\circ}\text{C}$.
Maja je oduzela 3 topla žetona.

U loncu će biti hladnije za $3\text{ }^{\circ}\text{C}$ i temperatura će iznositi $-10\text{ }^{\circ}\text{C}$:

Dakle, $-7 - 3 = -10$.

Zaključujemo da je $-7 + (-3) = -7 - 3$

Recept za pojednostavljivanje zapisa $+ (-)$!

Da se izrazim matematički: kad su plus i minus jedan uz drugi, pišem samo minus.



Zadaci

1. Pojednostavni pa izračunaj:

- | | |
|--------------------|----------------------|
| a) $9 + (-3)$; | b) $2 + (-5)$; |
| c) $-8 + (-9)$; | d) $-20 + (-15)$; |
| e) $45 + (-18)$; | f) $67 + (-100)$; |
| g) $-50 + (-30)$; | h) $-7 + 7 + (-3)$. |

2. Izračunaj:

a)	b)	c)	d)
$16 - 9 =$	$7 - 9 =$	$-1 - 3 =$	$-8 + (-4) =$
$30 - 18 =$	$6 - 7 =$	$-2 - 6 =$	$-10 + (-8) =$
$70 - 20 =$	$23 - 30 =$	$-9 - 8 =$	$-20 - 15 =$
$23 - 14 =$	$45 - 55 =$	$-17 - 4 =$	$10 - 13 =$
$85 - 30 =$	$6 - 60 =$	$-25 - 40 =$	$40 + (-10) =$

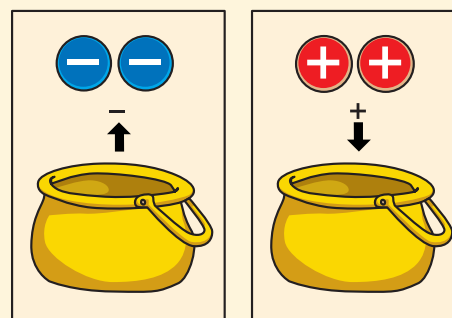
Primjer 3.**Oduzimamo negativan broj**

Početna temperatura u loncu je 5 °C. Želimo je povećati za 2 °C. Kako to možemo napraviti?

Rješenje:

Želimo li je povećati za 2 °C, to možemo napraviti na dva načina:

$$5 - (-2) = 5 + 2$$



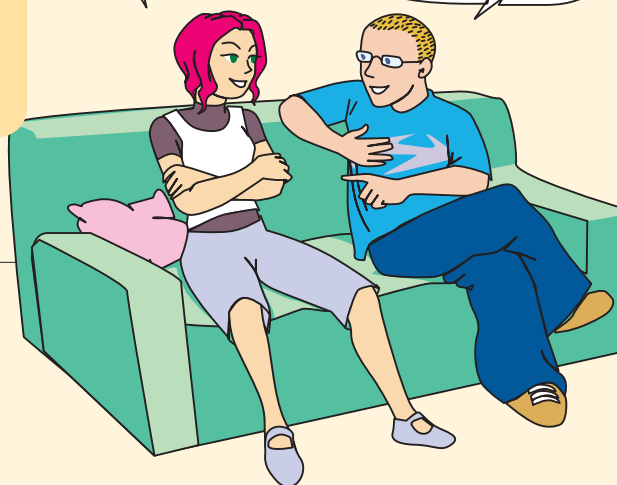
oduzeti 2 hladna žetona = dodati 2 topla žetona
 $-(-2) = +2$



Recept za pojednostavljanje zapisa $-(-)$!
 Kad su minusi jedan uz drugoga, pišem plus!
 $-(-\text{😊}) = +\text{😊}$

NIKAKO MI NIJE JASNO ZAŠTO SU DVA MINUSA JEDNAKA PLUS.

SVE SE SVODI NA "NEČU NE IZAĆI", T.J. "IZAĆI ČU"



Pojednostavni zapis pa izračunaj

- 1) $-1 - (-7) = -1 + 7 = 6$
- 2) $5 - (-6) = 5 + 6 = 11$
- 1) $-6 - (-2) - (-4) - (-6) = -6 + 2 + 4 + 6 = 6$

Zadaci

4. Pogledaj ove riješene primjere pa riješi ostale zadatke.

- a) $38 - (-25) = 38 + 25 = 63$;
- b) $-24 - (-30) = -24 + 30 = 6$;
- c) $-11 - (-4) = -11 + 4 = -7$;
- d) $-35 - (-5) = -35 + 5 = -30$;
- e) $8 - (-3) =$
- f) $1 - (-2) =$ g) $-1 - (-2) =$
- h) $-18 - (-12) =$
- i) $12 - (-7) =$ j) $-34 - (-17) =$

5. Izračunaj.

- a) $7 - 19$; b) $-5 - 6$; c) $8 - 12$; d) $7 - (-4)$;
- e) $102 - (-99)$; f) $25 - (-2)$; g) $-35 - (-2)$;
- h) $60 - 70$; i) $-4 - 78$; j) $-98 - (-(-2))$.

6. Izračunaj

- a) $7 + 19$; b) $-5 + 6$; c) $8 + 12$;
- d) $6 - (-4)$; e) $5 + (-2)$; f) $-5 + (-2)$;
- g) $60 + 70$; h) $-40 - 78$.

7. Izračunaj

- a) $-17 + (-19)$; b) $-17 + 19$; c) $0 + (-6)$;
- d) $-5 - 12$; e) $8 - 7$; f) $-98 + 2$;
- g) $25 + (-2)$; h) $-12 + 0$; i) $-13 - 6$;
- j) $8 - 9$.

8. Izračunaj

- a) $-23 + 20$; b) $-17 - 4$;
- c) $4 - 7$; d) $-50 + 70$;
- e) $40 - 60$; f) $16 - 8$;
- g) $17 - 9$; h) $0 - 7$;
- i) $-220 + 20$; j) $-43 - 23$.

$$\begin{aligned} -(-4) &= 4 \\ -(-9) &= 9 \\ +(-7) &= -7 \\ -(+3) &= -3 \end{aligned}$$

Primjer 6.**Visoke planine i duboka mora**

- a) Koliko je metara vrh Mt. Everesta (8 863 m) viši od vrha Mt. McKinleyja (6 194 m)?
- b) Najviši vrh svijeta Mt. Everest visok je 8 863 m, a najveća depresija na svijetu je Mrtvo more i iznosi -400 m. Kolika je visinska razlika među njima?

Rješenje:

- a) Jasno da ćemo rezultat dobiti oduzimanjem manje vrijednosti od veće:
 $8\ 863 - 6\ 194 = 2\ 669$.
 Mt Everest je viši za 2 669 m.
- b) I ovdje ćemo od veće vrijednosti oduzeti manju: $8\ 863 - (-400)$.
 Kako je oduzimanje zbrajanje sa suprotnim brojem, onda je:
 $8\ 863 - (-400) = 8\ 863 + 400 = 9\ 263$.
 Razlika između najvišeg vrha i najniže depresije na Zemlji iznosi 9 263 m.

Z a d a c i

9. Najviši vrh u Sjevernoj Americi Mt. McKinley visok je 6 194 m, a najveća depresija u Americi je Dolina smrti i iznosi -86 m. Kolika je razlika među njima?
10. Najviša zabilježena temperatura na Zemlji je 58 °C, a najniža -89 °C. Prvo procijeni napamet kolika je razlika između najviše i najniže temperature na Zemlji, a onda izračunaj oduzimanjem manje vrijednosti od veće. (Pazi: $-89 < 58$)
11. U tablici su dane temperature na planetima Sunčeva sustava. Na nekim planetima postoje velike razlike u temperaturi, pa su dane najniža i najviša temperatura, a na nekim planetima te razlike nisu tako velike, pa je dana samo jedna vrijednost za temperaturu.
- | Planet | temperatura (°C) |
|---------|---------------------|
| Merkur | -180 °C do + 430 °C |
| Venera | 500 °C |
| Zemlja | -70 °C do + 55 °C |
| Mars | -120 °C do + 35 °C |
| Jupiter | -150 °C |
| Saturn | -180 °C |
| Uran | -214 °C |
| Neptun | -220 °C |
| Pluton | -230 °C |
- a) Procijeni na kojem planetu je najveća razlika između najniže i najviše temperature?
- b) Koliko stupnjeva iznosi razlika između najniže i najviše temperature na Merkuru?
- c) Koliko stupnjeva iznosi razlika između najniže i najviše temperature na Zemlji?
- d) Koliko stupnjeva iznosi razlika između najniže i najviše temperature na Marsu?
12. Rimska civilizacija nastala je 509. godine prije Krista i traje sve do 476. godine nakon Krista. Koliko dugo je trajala rimska civilizacija?
13. Vodostaj Save u Zagrebu je -183 cm, a u Slavonskom Brodu 160 cm. Prvo procijeni je li Sava narasla od Zagreba do Slavenskog Broda više ili manje od 2 metra pa izračunaj točan iznos.
14. Stavi znak uspoređivanja (<, > ili =)
- a) $3 - 14$ ____ -12 ;
 b) $-27 + 1$ ____ -27 ;
 c) -12 ____ $13 - 25$;
 d) $18 - 19$ ____ $19 - 18$;
 e) $137 - 258$ ____ $237 - 114$.
15. Usporedi:
- a) $131 + 124$ ____ $131 - 124$;
 b) $131 + 209$ ____ $131 - 209$;
 c) $-128 + 124$ ____ $-128 - 124$;
 d) $-128 + 209$ ____ $-128 - 209$.

Primjer 7. Kraći zapis zbrajanja

Kako bismo riješili ovakve zadatke:

a) $-7 - 8 - 3 - 4 = ?$

b) $-5 - 4 - 6 - 5 = ?$

Rješenje:

a) Zbrajamo brojeve -7 , -8 , -3 i -4 jer je:

$$-7 - 8 - 3 - 4 = -7 + (-8) + (-3) + (-4);$$

Svi su pribrojnici negativni brojevi, pa je zbroj negativan broj.

Stoga je:

$$-7 - 8 - 3 - 4 = -(7 + 8 + 3 + 4) = -22.$$

b) $-5 - 4 - 6 - 5 = -(5 + 4 + 6 + 5) = -20;$

Budući smo u ovim zadacima zbrajali, redoslijed zbrajanja možemo i mijenjati.

Zapis $-3 - 2 = -5$

čitamo: " -3 i -2 je -5 "

Zapis $-4 - 5 - 1$

čitamo: " -4 i -5 i -1 je -10 "

Primjer 8.

Koliko je $-7 + 8 - 9 + 5 - 6 - 5 + 5 = ?$

Rješenje:

Zbrajamo brojeve: -7 , 8 , -9 , 5 , -6 , -5 i 5 .

Prvo uočimo suprotne brojeve -5 i 5 ! Nakon što ih poništimo, dobit ćemo:

$$-7 + 8 - 9 + 5 - 6 =$$

Ovaj dio zadatka možemo izračunati na dva načina:

I. način - zbrajamo pribrojnike po redu:

$$\underline{-7 + 8} - 9 + 5 - 6 = \underline{1 - 9} + 5 - 6 =$$

$$\underline{-8 + 5} - 6 = \underline{-3 - 6} = -9$$

II. način - združimo pozitivne članove u jednu zagradu, a negativne u drugu:

$$-7 + 8 - 9 + 5 - 6 = (8 + 5) - (7 + 9 + 6) =$$

$$13 - 22 = -9$$

Primjer 9.

Pojednostavni izraz i riješi:

$$-3 - 5 + 7 + 3 - 8 + (-9) + (-4) + 7 - (-11) = ?$$

Rješenje:

Pojednostavnimo izraz, tj. svedimo ga na kraći zapis bez dvostrukih znakova:

$$= -3 - 5 + 7 + 3 - 8 - 9 - 4 + 7 + 11 =$$

Poništimo suprotne brojeve:

$$= -3 - 5 + 7 + 3 - 8 - 9 - 4 + 7 + 11 =$$

Radi bržeg računanja združimo pozitivne članove u jednu, a negativne u drugu zagradu:

$$= -5 + 7 - 8 - 9 - 4 + 7 + 11 =$$

$$= (7 + 7 + 11) - (5 + 8 + 9 + 4) =$$

i na kraju samo zbrojimo pribrojnike različitih predznaka:

$$= 25 - 26 = -1$$

Oslobodimo se dvostrukih znakova

$$\begin{aligned} \text{a) } & -9 + (-3) + (+6) + (-3) = \\ & = -9 - 3 + 6 - 3 = \\ & = -15 + 6 = -9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } & -7 - (-6) - (-4) - (+2) = \\ & = -7 + 6 + 4 - 2 = \\ & = -9 + 10 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} + (-\text{😊}) &= -\text{😊} \\ - (-\text{😊}) &= +\text{😊} \end{aligned}$$

Zadaci

16. Izračunaj: $-5 - 8 - 12 - 10$.

17. Izračunaj: $-11 + 12 - 13 + 15 - 21 - 12$.

18. Pojednostavni (tj. oslobodi se dvostrukih predznaka), pa riješi:

- a) $-7 - (-5) - 4 - (-2)$;
- b) $4 - 7 + (-3) - (-16)$;
- c) $-1 - 3 + (-4) - 7 + 6 - (-6) - 12 - (-4) + 4$;
- d) $-9 + 12 - (-40) + (-7) + (-12) + 3 - 8 + 20$.

19. Prvo pojednostavni zapis, pa izračunaj:

- a) $-6 + (-2) + (+4) - (-1) - (+3)$;
- b) $- (+2) + (-6) - (-3)$;
- c) $100 - (-25) - 35 + (-25) - (+35)$;
- d) $- (+8) + 45 - (+45) + 0 + (-12)$.

20. Izračunaj:



- a) $14 - 10 + 5 - 9 - 3 + 7$;
- b) $-4 - 20 - 10 + 2 + 5 + 8 - 1$;
- c) $8 - 12 - 17 + 1 + 6 - 11 + 20$;
- d) $7 - 9 - 4 + 3 - 11 + 8$;
- e) $7 - 9 - 6 + 51$;
- f) $7 - 9 + 6 - 6 + 2$;
- g) $-1 - 2 - 3 - 4 - 5$;
- h) $35 - 19 - 19 + 72 + 35 - 72$.

21. Ronilac je bio na dubini od 10 metara. Zatim se spustio 5 metara dublje, pa još 8 metara dublje. Na kojoj je sad dubini ronilac? Prvo napamet odgovori, a onda zapiši izraz pomoću oduzimanja cijelih brojeva te izračunaj.


Primjer 10.



Upotreba džepnog računala – unos negativnog broja

Na džepnom računalu razlikuju se tipke za znak oduzimanja i predznak minus.

Tipka za oduzimanje je , a tipka za predznak minus je .

Želimo napisati broj -25 .

1. Pritisnite tipku za predznak .

2. Utipkajte broj  .

U prvom retku zaslona će pisati -25 .

Primjer 11.

Upotreba džepnog računala – računanje sa cijelim brojevima





Pri računanju s negativnim brojevima na džepnom računalu nije potrebno koristiti zagrade za odvajanje predznaka.


Primjerice $-(-3)$ se može pisati kao $--3$.





Obzirom da su matematički zadaci najčešće napisani s tim zagradama možete te zagrade i


pisati ako želite. U ovom primjeru ćemo pisati sve zagrade.

Želimo izračunati $-115 - (-6)$.

1. Utipkajte prvi broj    .

2. Pritisnite tipku .

3. Utipkajte drugi broj    .

4. Pritisnite tipku .

Na zaslonu će biti napisan rezultat -109 .

Zadaci

22. Izračunaj koristeći džepno računalo:
- $-(-1) + (-1) - (+1) + (+1)$;
 - $-(-1\ 001) + (-1\ 100) - (-1\ 010) - (+1\ 000)$;
 - $-1\ 234 + 5\ 432 - 5\ 561 - 1$;
 - $12\ 345 - 13\ 345 + (-11\ 234) - (-324)$;
 - $50\ 505 + (-505) - 555 + 5\ 000$;
 - $-999 - 99 - (-9\ 999) + 999$.
23. Izračunaj koristeći džepno računalo:
- Od zbroja brojeva 5 43 i - 332 oduzmi njihovu razliku;
 - Razlici brojeva -342 i -111 dodaj njihov zbroj.
24. Izračunaj koristeći džepno računalo:
- Cijena namještaja za kuhinju bila je 3 245 kn, na sniženju je smanjena za 532 kn, a zatim još jednom smanjena za 231 kn. Kolika je sadašnja cijena namještaja?
- Prihodi Lukine majke bili su u travnju 4 231 kn, u svibnju su povećani za 532 kn, a u lipnju smanjeni za 101 kn u odnosu na svibanjske. Koliko je Lukina majka zaradila u svibnju, a koliko u lipnju? Koliko je zaradila za sva tri mjeseca zajedno?
 - Visinska razlika između dva mjesta je 1 546 m. Ako se jedno mjesto nalazi na nadmorskoj visini 533 m na kojim nadmorskim visinama se može nalaziti drugo mjesto?
25. Izračunaj koristeći džepno računalo: Ako je $a = 531\ 321$ i $b = -1\ 234\ 567$, koliko je:
- $a + b$;
 - $a - b$;
 - $a + 14\ 436 - 22\ 754$;
 - $201 \cdot a + 322 \cdot b$;
 - $a - 23\ 217 \cdot b$;
 - $2\ 443\ 621 - a + 2\ 125\ 433 + b - (-12\ 345)$.

Vježbalica

- Izračunaj :
 - $17 + 26$;
 - $-17 + (-26)$;
 - $32 + 15$;
 - $-13 + (-15)$;
 - $-15 + (-27)$;
 - $-18 + 3$;
 - $11 + (-12)$;
 - $-5 + 0$;
 - $0 + (-16)$.
- Izračunaj:
 - $15 + (-20)$;
 - $-6 + 25$;
 - $-17 + (-20)$;
 - $-14 + 2\ 4$;
 - $-16 + 32$;
 - $-57 + 28$;
 - $-24 + (-76)$;
 - $35 + (-25)$.
- Izračunaj.
 - $17 - 19$;
 - $26 - (-12)$;
 - $-25 - 16$;
 - $-15 - (-12)$;
 - $10 - 22$;
 - $60 - 75$;
 - $17 - (-14)$;
 - $-64 - 78$;
 - $12 - (-29)$;
 - $-18 - (-(-12))$.
- Izračunaj:
 - $72 - (-91)$;
 - $35 + (-27)$;
 - $-25 - 36$;
 - $-5 - (-12)$;
 - $28 - 15$;
 - $26 - (-7)$;
 - $37 - (-24)$;
 - $-34 - 58$;
 - $12 - (-19)$;
 - $-18 - (-(-22))$.
- Izračunaj:
 - $4 + 6 - 2 - 4 - 8 + 9 - 7 - 5$;
 - $11 + 32 + 24 - 64 - 5 + 43 - 22$;
 - $2 + 4 - 13 - 5 + 14 - 6 - 8 - 13$;
 - $23 + 43 - 54 - 22 + 13$.
- Izračunaj:
 - $33 - 45 + 56 - 21 - 43 + 23$;
 - $2 + 3 - 2 - 5 - 2 - 4$;
 - $43 - 34 - 23 + 32 - 54 + 34$;
 - $10 - 12 - 11 - 13 + 10 + 9 - 8$.
- Izračunaj:
 - $33 - 45 - 56 + 21 + 43 + 23$;
 - $102 - 103 + 102 + 105 - 102 - 104$;
 - $43 + 34 + 23 - 32 - 54 - 34$;
 - $10 - 12 - 11 + 13 - 10 - 9 + 8$.
- Izračunaj:
 - $33 + (-45) - (-56) - 21 + (-43) + (-23)$;
 - $-2 - (-(-3)) + 2 - (-5) - (+(-2)) + 4$;
 - $43 - (-34) + 23 - 32 + (-54) - 34$;
 - $10 - (-12) + 11 - 13 - (-10) + 9 - 8$.
- Izračunaj:
 - $15 + 42 + 25 + 24 + (-12) + (-25)$;
 - $-5 + 27 + 17 + (-13) + (-7) + 23$;
 - $13 + 46 + 5 + 22 + (-11) + (-27)$;
 - $-2 + 25 + 7 + (-16) + (-8) + 25$.
- Izračunaj:
 - $-(-12) + (-14) - (+15) + (+16)$;
 - $-(-101) + (-110) - (-101) - (+10)$;
 - $-14 + 32 - 61 - 1$;
 - $145 - 345 + (-234) - (-324)$;
 - $505 + (-50) - 55 + 5$;
 - $-9 - 99 - (-99) + 9$.

3.7. Računanje sa zagradama

Vrste zagrada:

$()$ - okrugla (obla) zagrada

$[]$ - uglata zagrada

$\{\}$ - vitičasta zagrada

Sjećaš li se zadataka u kojima su zagrade jedna u drugoj?

$\{ [()] \}$ Kako postupati sa zagradama?

Probaj izračunati: $222 - \{22 - [22 - (22 - 2 - 2) - 2] - 2\} - 2 = ?$

Primjer 1. Jedna zagrada

Koliko je: $5 - 2 - (2 - 5)$?

Rješenje:

Zadatak možemo riješiti na dva načina.

I. način

$$5 - 2 - (2 - 5) =$$

Najprije izračunamo vrijednost izraza u zagradi.

$$= 5 - 2 - (-3) =$$

Kad u zagradi ostane samo jedan broj uklonimo je. Pritom pazimo na "dvostruke predznake".

$$= 5 - 2 + 3 =$$

Zbrojimo posebno pozitivne, posebno negativne brojeve.

$$= 8 - 2 = 6$$

II. način

Ovaj način se često naziva "izostavljanje zagrada". Pritom moramo paziti koji je znak ispred zgrade.

Ako je ispred zgrade znak manje, pribrojnicima u zagradi mijenjaju stanje.

Ako je ispred zgrade znak više, zagrada se briše.

Ako je zagrada na početku, ona se briše u sljedećem retku.

$$5 - 2 - (2 - 5) =$$

Ispred zgrade je $-$, pa je uklonimo, a svim pribrojnicima iz zgrade mijenjamo predznak.

$$= 5 - 2 - 2 + 5 =$$

Zbrojimo posebno pozitivne, posebno negativne brojeve.

$$= 10 - 4 = 6.$$

Koji god način rješavanja zadatka odabereš, rješenje će biti jednako. Većinu zadataka sa zagradama je jednostavnije riješiti na I. način

Važno

Ako je ispred zgrade $+$, zagradu samo uklonimo.

Ako je ispred zgrade $-$, zagradu uklonimo, a svim pribrojnicima iz zgrade promijenimo predznak u suprotni.



Ako je ispred zgrade znak manje, pribrojnicima u zagradi mijenjaju stanje.

Ako je ispred zgrade znak više, zagrada se briše.

Ako je zagrada na početku, ona se briše u sljedećem retku.

Pravila za izostavljanje zagrada:

$$a + (-b) = a - b$$

$$a - (-b) = a + b$$

$$a + (b + c) = a + b + c$$

$$a + (b - c) = a + b - c$$

$$a - (b + c) = a - b - c$$

$$a - (b - c) = a - b + c$$

$$14 + (-7) = 14 - 7 = 7$$

$$14 - (-7) = 14 + 7 = 21$$

$$14 + (7 + 2) = 14 + 7 + 2 = 23$$

$$14 + (7 - 2) = 14 + 7 - 2 = 19$$

$$14 - (7 + 2) = 14 - 7 - 2 = 5$$

$$14 - (7 - 2) = 14 - 7 + 2 = 9$$

Primjer 2. Zagrada određuje redoslijed računanja

Izračunaj:

a) $2 + (-4 + 3) =$

b) $5 - (2 + 4 - 12) =$

c) $-(-40 + 23) - (-28 + 12) + (28 - 15) =$

Rješenje:

Prvo se izračunava izraz u zgradi.

a) $2 + (-4 + 3) = 2 + (-1) = 1;$

b) $5 - (2 + 4 - 12) =$
 $= 5 - (-6) = 5 + 6 = 11;$

c) $-(-40 + 23) - (-28 + 12) + (28 - 15) =$
 $= -(-17) - (-16) + 13 =$
 $= 17 + 16 + 13 = 30 + 16 = 46.$

Zadaci

Izračunaj:

1. a) $1 - (8 - 3);$ b) $6 + (-3 + 6);$ c) $-(2 + 8) - 10;$

d) $-(-6 - 7) + (-10);$ e) $-11 - (7 - 12);$

f) $30 + (13 - 20).$

2. a) $(-4 - 8) - (-9 + 6);$ b) $9 + (24 - 17 + 6 - 3);$

c) $-(-4 + 7) - (-1 + 3 - 6);$

d) $23 + (-4 + 7 + 8 - 11).$

3. a) $(-3 - 8) - (-9 + 6) + (7 - 5);$

b) $-(10 - 5) - (-4 + 6) + (7 - 10);$

c) $-6 + 3 - (-4 + 6) + (7 - (-5));$

d) $-(-12 - 8) - (-9 + 16) + (7 - 5);$

e) $20 - 13 - (-19 + 17) + (4 - 5);$

f) $(-3 - 8) - (-9 + 6) + (7 - 5).$

4. a) $-(-7 + 9) + (4 - 16) - (-7 + 10);$

b) $-8 + (-14 - 26) - (-3 - 11);$

c) $-(-3 + 6) + (-4 - 24) - (-7 + 10);$

d) $(4 - 9) + (-14 - 13) - (2 + 10).$

Primjer 3.

Više zagrada

Izračunaj: $-9 - [2 + (-1 + 3) - 4 + 1 - (+3)] =$

Rješenje

Ako imamo više zagrada jednu u drugoj { [()] }, onda ćemo prvo rješavati izraz u okruglim zgradama, zatim u uglatim i na kraju u

vitičastim zgradama.

Prvo računamo izraze u okruglim zgradama,

$$= -9 - [2 + (-1 + 3) - 4 + 1 - (+3)] =$$

$$= -9 - [2 + 2 - 4 + 1 - 3] =$$

a onda vrijedost izraza u uglatoj zgradi.

$$= -9 - [2 + 2 - 4 + 1 - 3] =$$

$$= -9 - [-2] =$$

$$= -9 + 2 = -7.$$

Primjer 4.

Nekoliko zagrada

Izračunaj: $2 + \{ [-5 - (9 - 6 - 11) + (-1)] + (-2) \} =$

Rješenje:

Najprije izračunamo vrijednost u okruglim zgradama.

$$= 2 + \{ [-5 - (9 - 6 - 11) + (-1)] + (-2) \} =$$

$$2 + \{ [-5 - (-8) - 1] - 2 \} =$$

Zatim izračunamo vrijednost u uglatoj zgradi.

$$2 + \{ [-5 + 8 - 1] - 2 \} =$$

Na kraju izračunamo vrijednost u vitičastoj zgradi.

$$= 2 + \{ 2 - 2 \} =$$

$$= 2 + 0 = 2.$$

Primjer 5.**Nekoliko okruglih zagrada**

No u zadatku sve zagrade mogu biti samo okrugle: (((()))).

Koliko je $50 + (25 - (4 + (6 - 16))) = ?$

Rješenje:

Pravilo je isto, tj. rješavamo od unutarnjih zagrada prema vanjskima.

$$\begin{aligned} & 50 + (25 - (4 + (6 - 16))) = \\ & = 50 + (25 - (4 + (-10))) = \\ & = 50 + (25 - (4 - 10)) = \\ & = 50 + (25 - (4 - 10)) = 50 + (25 - (-6)) = \\ & = 50 + (25 + 6) = 50 + 31 = 81. \end{aligned}$$

Z a d a c i

5. Izračunaj:

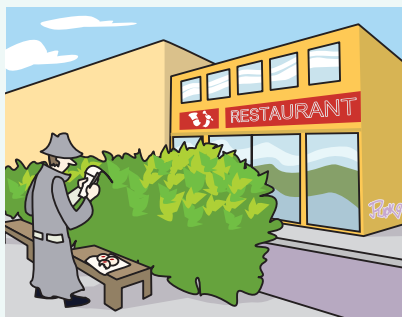
- a) $15 - (7 + 3)$;
b) $15 - (7 - 3)$;
c) $77 - (27 - (7 + 3))$.

6. a) $20 - (15 - (8 - 12))$;
b) $(2 - (-3)) - (56 - 61)$;
c) $21 + [34 - (28 + 38)]$;
d) $-11 + (34 - (28 + 38))$;
e) $33 - [12 - (7 - 15)]$;
f) $[5 - (-6)] - (79 - 81)$;
g) $18 + [45 - (18 + 50)]$;
h) $-17 - [(24 - 27) + (-3)]$;

7. Poredaj rezultate iz 5. zadatka po veličini.

8. Pročitaj ovaj izvještaj privatnog detektiva koji je od 8 sati ujutro do 8 sati navečer sakriven motrio restoran:

- 11.00 - ušlo 6 ljudi;
12.00 - ušlo još 7 ljudi;
13.00 - izašlo 9 ljudi;
14.00 - ušla grupa od 8 ljudi;
15.00 - izašlo 7 ljudi;
16.00 - ušlo 5 ljudi;
17.00 - izašlo 10 ljudi.



Koliko je ljudi ostalo u restoranu nakon 20 sati?

Što iz dobivenog rješenja možeš zaključiti?

9. Izračunaj: $-1 - (-1 - (-1 - (-1 - 1)))$.

U zadacima od 10. do 13. prvo napiši cijeli izraz, pa ga riješi.

10. Razlici brojeva -4 i 3 dodaj njihov zbroj.
11. Broj 16 uvećaj za razliku brojeva 7 i -19 .
Najprije napiši cijeli izraz, pa ga riješi.
12. Broju 32 oduzmi razliku brojeva 15 i 17 .
13. Broju -234 dodaj razliku brojeva 245 i -300 .
Tako dobivenom zbroju oduzmi zbroj brojeva 34 i -100 .

14. Izračunaj:

- a) $4 - \{-1 + [-5 + 4 - (-3 - 1) + 2] - 1\} + (-2 + 3)$;
b) $17 - \{(2 - 17) - [5 - 9 + (10 - 11) + 12] - 10\} - (-4 - 43)$;
c) $-6 + (-11 - (-3 + 4) - 5) + (-13 - 15) + (12 - 3)$;
d) $15 + (-3 - 4 - (5 + 5) + 1) - (2 - 9)$;
e) $-2 - (-2 + (-2 - 2 + 2 + 2) - (2 + 2 - 2))$;
f) $-1 - \{-1 - [-1 - (-1 - 1) + 1] + 1\} + 1$.

15. Izračunaj upotrebom džepnog računala; za sve vrste zagrada upotrijebi okrugle () :

- a) $4\ 432 - \{-1\ 019 + [-5 + 4\ 325 - (-301 - 12) + 5\ 432] - 1\} + (-2\ 222 + 333)$;
b) $1\ 017 - \{(102 - 1\ 457) - [5\ 017 - 923 + (10\ 000\ 000 - 100\ 001) + 1\ 072] - 10\} - (-44\ 444 - 3)$;
c) $-6\ 019 + (-211 - (-53 + 114) - 517) + (-1\ 223 - 1\ 514) + (1\ 222 - 300\ 000)$;
d) $1\ 235 + (-3\ 001 - 4\ 004 - (5\ 000\ 005 + 55) + 10) - (213 - 92)$;
e) $-2\ 124 - (-2\ 325 + (-2\ 124 - 22\ 325 + 22\ 325 + 2\ 124) - (2\ 009 + 2\ 009 - 2\ 009))$;
f) $-10\ 000 - \{-10\ 000 - [-1\ 000 - (-100\ 000 - 1\ 000) + 10\ 000] + 100\} + 100\ 000$.

Vježbalica

1. Od razlike brojeva -45 i -13 oduzmi broj -3 .

2. Od zbroja brojeva 65 i -26 oduzmi broj -89 .

3. Broju -56 dodaj razliku brojeva 16 i -33 .

4. Broju 12 dodaj razliku brojeva -34 i 32 .

5. Broju 19 dodaj zbroj brojeva -35 i 25 .

6. Razlici brojeva 34 i -22 dodaj broj -55 .

7. Zbroju brojeva 23 i 33 dodaj razliku brojeva 65 i -11 .

8. Razlici brojeva 24 i -22 dodaj razliku brojeva 25 i -9 .

9. Razlici brojeva -16 i 3 dodaj zbroj brojeva 48 i -48 .

10. Zbroju brojeva 46 i 59 dodaj zbroj brojeva -45 i -10 .

11. Razlici brojeva 48 i -28 dodaj razliku brojeva -14 i 16 .

12. Od razlike brojeva 65 i -55 oduzmi zbroj brojeva -33 i 11 .

13. Od zbroja brojeva 44 i -23 oduzmi zbroj brojeva -2 i 45 .

14. Od razlike brojeva 97 i -3 oduzmi razliku brojeva 16 i -11 .

15. Od zbroja brojeva 44 i -99 oduzmi razliku brojeva 11 i -50 .

16. Izračunaj:

a) $-9 + [3 - (-3 - 3)] - 3$;

b) $2 - [-9 - (6 - 7)] - 6$,

c) $[51 - (19 - 11) - 18] - 76$,

d) $-98 - [51 - (50 - 1) + 43] + 3$,

17. Izračunaj:

a) $22 - [45 - (33 - 86)]$,

b) $[48 - 65 + 7 - (30 - 63)] - 17$,

c) $13 + [76 - (12 - 11)] - 41$,

d) $[32 - 0 + (40 + 13)] - (-45 - 6)$,

18. Izračunaj:

a) $56 - [(36 - 22) + 11] - 7 + (39 - 17)$,

b) $(85 - 96) - [81 + (24 - 23) + 27] - 14 - (38 + 49)$,

c) $[5 - (7 - 3) + 1] + 4 - (6 - 2)$

19. Izračunaj:

a) $43 + \{32 + [21 - (34 - 11 - 19) + 11] - 2\} - 37$,

b) $(49 - 48) + 39 - \{22 - [32 - (45 - 33 - 1) - 21] + 13 - (12 - 9) - 21\} + 13\} - (12 - 9)$,

c) $51 - [32 + (21 - 17)] - 16 + \quad - \quad - \quad + \quad - \quad - \quad + \quad -$
 $+ \{13 - [66 - (18 + 15 - 4) - 6] + 17\} - (0 + 9)$

20. Ako je $a = -30$, $b = -15$ i $c = 5$ koliko je

a) $a - b - c$; b) $-a - b$;

c) $-a - (b - c)$; d) $-b + c$;

e) $-a + (-8) - c$.

21. Ako je $a = -48$, $b = 32$ i $c = -15$ koliko je

a) $a - b - c$;

b) $-a - b$;

c) $-a - (b - c)$;

d) $-b + c$;

e) $-a + (-5) - c$.

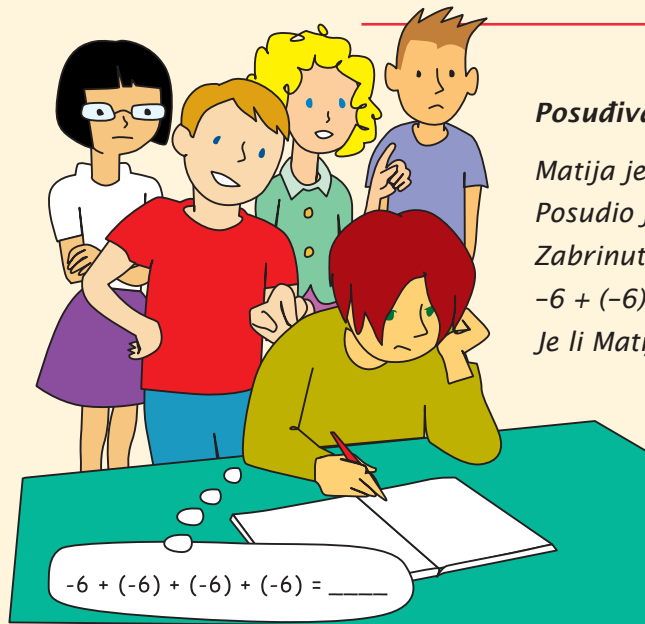
22. Ako je $a = 36$, $b = -45$ i $c = -25$ koliko je

a) $a - b - c$; b) $-a - b$;

c) $-a - (b + c)$; d) $-b + c$;

e) $-a + (-7) - c$.

3.8. Množenje cijelih brojeva



Posuđivanje

Matija je želio kupiti knjigu ... Nažalost, nije imao dovoljno novaca.

Posudio je po 6 kuna od Ane, Maje, Luke i Petra.

Zabrinuto je počeo zbrajati svoj dug:

$$-6 + (-6) + (-6) + (-6) = \underline{\hspace{2cm}}$$

Je li Matija ovo zbrajanje mogao zapisati na kraći način? Kako?

$$26 + 26 + 26 = 3 \cdot 26$$

$$3 \cdot 26 = 78$$

faktori umnožak
ili produkt

ZNAČI

$$-8 \cdot (-5) = 8 \cdot 5 = 40$$

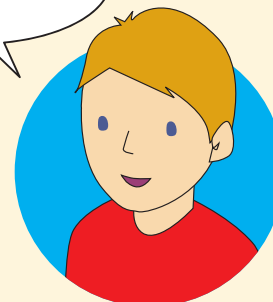
Rješenje:

Što je Luka zaključio?

Na isti način vrijede i ovi računi:

$$3 \cdot 5 = 15, \quad -3 \cdot (-5) = 15$$

$$4 \cdot 5 = 20, \quad -4 \cdot (-5) = 20.$$



Primjer 1.

Povećanje za 6 °C

Luka sada može višestruko dodavati ili oduzimati žetone kako bi postigao željenu temperaturu. Proučite i vi upute kako se to radi.

Želimo li povećati temperaturu za 6 °C

Umjesto da dodamo 6 toplih žetona odjedanput, možemo

dodati 2 puta po 3 topli žetona
 $+2 \cdot (3) = 6$

ili

oduzeti 2 puta po 3 hladna žetona
 $-2 \cdot (-3) = 6$

$$2 \cdot 3 = -2 \cdot (-3) = 6$$

Važno

Umnožak dvaju cijelih brojeva jednakih predznaka je pozitivan broj koji dobijemo množenjem njihovih apsolutnih vrijednosti.

Zadaci

1. Izračunaj:

- a) $-8 \cdot (-7)$; b) $-6 \cdot (-9)$; c) $-6 \cdot (-7)$;
 d) $9 \cdot 9$; e) $-20 \cdot (-3)$; f) $(-70) \cdot (-5)$;
 g) $250 \cdot 4$; h) $-200 \cdot (-3)$; i) $-30 \cdot (-2)$;
 j) $40 \cdot 4$; k) $2 \cdot 50$.

2. Početna temperatura u loncu je 0 °C.

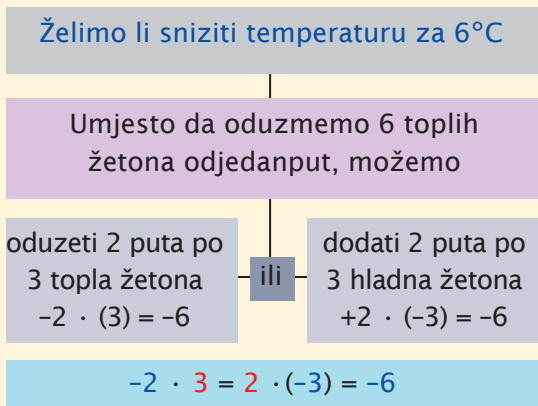
Hoće li temperatura u loncu biti ispod ili iznad nule, ako se oduzme 7 puta po 6 hladnih žetona? Koliko će točno iznositi temperatura u loncu?

$$- \cdot - = +$$

$$+ \cdot + = +$$

Primjer 2. Smanjenje za 6 °C

Koliko je $2 \cdot (-3)$?



Rješenje:

Prvo uočimo da su to brojevi različitih predznaka, pa će umnožak biti negativan broj.

Zatim, pomnožimo $2 \cdot 3 = 6$.

Dakle, $2 \cdot (-3) = -6$.

Na primjer:

$$-3 \cdot 5 = -15, \quad 3 \cdot (-5) = -15;$$

$$7 \cdot (-7) = -49, \quad -8 \cdot 9 = -72;$$

$$10 \cdot (-10) = -100, \quad -15 \cdot 2 = -30.$$

-- + = -
+ · - = -

Važno

Umnožak dvaju cijelih brojeva različitih predznaka je negativan broj. Apsolutna vrijednost mu je jednaka umnošku apsolutnih vrijednosti brojeva koji se množe.

Zadaci

- Izračunaj:
 - $4 \cdot (-5)$; b) $7 \cdot (-7)$; c) $-7 \cdot 8$;
 - $-4 \cdot 9$; e) $3 \cdot (-7)$; f) $-4 \cdot 0$;
 - $11 \cdot (-3)$; h) $(-5) \cdot 9$; i) $10 \cdot (-3)$;
 - $(-1) \cdot 1$; k) $5 \cdot (-5)$; l) $7 \cdot (-9)$.
- Zapiši u obliku umnoška i izračunaj:
 - $5 + 5 + 5 + 5$;
 - $-2 + (-2) + (-2) + (-2) + (-2)$;
 - $(-3) + (-3) + (-3) + (-3) + (-3) + (-3)$.
- Izračunaj:
 - $-6 \cdot 9$; b) $-8 \cdot (-7)$; c) $-7 \cdot 7$;
 - $-5 \cdot 7$; e) $9 \cdot (-9)$; f) $-9 \cdot (-6)$;
 - $-8 \cdot (-9)$; h) $-9 \cdot (-7)$; i) $-7 \cdot (-4)$.
- Izračunaj:
 - $-7 \cdot (-2)$; b) $8 \cdot (-7)$; c) $7 \cdot (-9)$;
 - $-5 \cdot (-5)$; e) $0 \cdot (-8)$; f) $-6 \cdot 0$;
 - $(-8) \cdot (-5)$; h) $-7 \cdot 7$; i) $-5 \cdot (-1)$;
 - $9 \cdot (-9)$.
- Izračunaj:
 - $-6 \cdot (-3)$; b) $-4 \cdot (-2)$; c) $-3 \cdot 2$;
 - $-4 \cdot (-2)$; e) $1 \cdot (-3)$; f) $(-6) \cdot (-6)$;
 - $-8 \cdot (-7)$; h) $-5 \cdot 7$; i) $-5 \cdot 4$;
 - $9 \cdot (-0)$; k) $0 \cdot (-3)$; l) $-25 \cdot (-4)$.
- Napamet izračunaj:
 - $-5 \cdot 6$; b) $-5 \cdot 60$; c) $-60 \cdot (-5)$;
 - $-600 \cdot 5$; e) $3 \cdot (-7)$; f) $-3 \cdot (-70)$;
 - $30 \cdot (-7)$; h) $-300 \cdot 700$; i) $-8 \cdot (-9)$;
 - $8 \cdot (-900)$; k) $-80 \cdot 90$; l) $800 \cdot 9$.
- Na koliko načina i kako možeš prikazati broj 9 kao umnožak dvaju cjelobrojnih faktora?
 - Na koliko načina i kako možeš prikazati broj 6 kao umnožak dvaju cjelobrojnih faktora?
- Majina mama na tekućem računu ima stanje 120 kuna. U trgovini je karticom platila 4 para čarapa po 32 kune. Hoće li ući u minus? Koliko će joj točno biti stanje na tekućem računu?

Jednaki predznaci – pozitivan umnožak
Različiti predznaci – negativan umnožak



Primjer 3.**Primjena svojstva**

Koliko je $-4 \cdot 72 \cdot (-25) = ?$

Rješenje:

Zadatak $-4 \cdot 72 \cdot (-25)$ može se i napamet riješiti, ako prvo pomnožimo prvi i zadnji faktor: $-4 \cdot 72 \cdot (-25) = [-4 \cdot (-25)] \cdot 72 = 100 \cdot 72 = 7\,200$.

Primjer 4.

Koliko je $3 \cdot 0$?

$$3 \cdot (-12) \cdot 56 \cdot 4 \cdot 0 \cdot 72 = 0$$

Rješenje:

Naravno, 0.

Kako za množenje cijelih brojeva vrijedi svojstvo komutativnosti, onda je $0 \cdot (-3) = -3 \cdot 0 = 0$

Važno

Ako neki cijeli broj množimo s nulom, umnožak je uvijek jednak nuli.
 $z \cdot 0 = 0 \cdot z = 0$

**Primjer 5.**

Izračunaj:

a) $-28 \cdot 1$;

b) $-28 \cdot (-1)$;

Važno

Kažemo da je broj 1 neutralan element za množenje cijelih brojeva.

$$z \cdot 1 = 1 \cdot z = z.$$

Množenjem bilo kojeg cijelog broja s -1 dobije se suprotan broj.

$$z \cdot (-1) = -1 \cdot z = -z$$

Rješenje:

$$-1 \cdot 5 = -5$$

$$-1 \cdot (-5) = 5$$

a) $-28 \cdot 1 = -28$

b) $-28 \cdot (-1) = 28$

Primjer 6.**Predznak umnoška više faktora**

Prepišite ove zadatke u bilježnicu i izračunajte umnoške:

a) $-2 \cdot (-5)$;

b) $(-3) \cdot (-4)$;

c) $-2 \cdot (-5) \cdot (-3) \cdot (-4)$;

Možeš li obrazložiti zašto je rješenje trećeg zadatka pozitivan broj?

Ako množimo više cijelih brojeva, svaki će združeni par negativnih brojeva u tom množenju dati pozitivan broj:

$$c) [-2 \cdot (-5)] \cdot [(-3) \cdot (-4)] = 10 \cdot 12 = 120$$

Što će se dogoditi, ako je neparan broj negativnih faktora?

Jasno, jedan negativni faktor će se morati množiti s pozitivnim brojem i umnožak će biti negativan broj.

$$-2 \cdot (-5) \cdot (-3) \cdot 4 = [-2 \cdot (-5)] \cdot [(-3) \cdot 4] = 10 \cdot (-12) = -120$$

Rješenje:

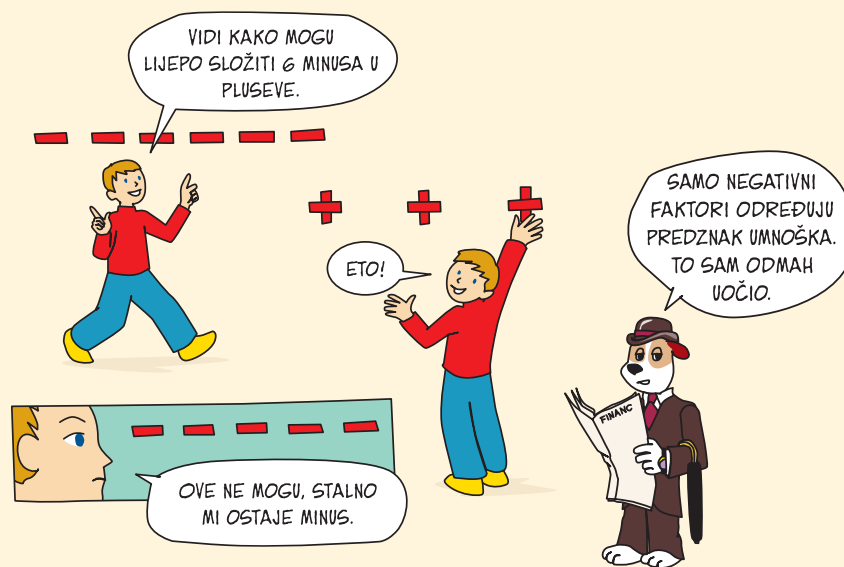
Znamo da je umnožak dvaju negativnih brojeva pozitivan broj. Stoga je rješenje prvog zadatka broj 10, a drugog 12.

Važno

Kada množiš više brojeva najprije prebroji koliko ima negativnih faktora.

Ako negativnih faktora ima paran broj, umnožak će biti pozitivan broj.

Ako negativnih faktora ima neparan broj, umnožak će biti negativan broj.



Zadaci



Najprije odredi predznak umnoška. Nakon toga faktore množi kao da su svi pozitivni brojevi

11. Napamet riješi:

a) $1 \cdot 2 \cdot (-3) \cdot 4$; b) $(-1) \cdot 2 \cdot (-3) \cdot 4$.

12. Napamet riješi:

a) $2 \cdot (-1) \cdot (-2) \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-8)$;
b) $-1 \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot 1 \cdot (-1)$.

13. Napamet riješi:

a) $-7 \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot 1 \cdot (-1) \cdot (-2)$;
b) $-5 \cdot (-2) \cdot (-1) \cdot 1 \cdot (-1)$.

14. Napamet izračunaj:

a) $-7 \cdot (-1) \cdot (-2) \cdot 6 \cdot (-1) \cdot 0 \cdot (-9) \cdot (-2)$;
b) $-1 \cdot (-1) \cdot (-3) \cdot (-2) \cdot 1 \cdot (-8)$;
c) $-3 \cdot (-2) \cdot (-1) \cdot 1 \cdot (-1) \cdot (-3) \cdot (-2) \cdot (-1) \cdot 1 \cdot (-1)$;
d) $32 \cdot (-24) \cdot (-100) \cdot 1 \cdot (-324) \cdot 0 \cdot (-12) \cdot 23 \cdot (-4)$.

15. Napiši umnožak s pet faktora tako da rezultat bude:

a) pozitivan broj; b) negativan broj.

16. Napamet riješi:

a) $66 \cdot (-5) \cdot (-20)$;
b) $(-50) \cdot (-45) \cdot (-2)$;
c) $-8 \cdot 44 \cdot (-2) \cdot 125$;
d) $-25 \cdot (-7) \cdot (-4) \cdot (-9)$.

$2 \cdot 5 = 10$
 $4 \cdot 25 = 100$
 $8 \cdot 125 = 1000$

17. Izračunaj:

a) $5 \cdot 10$; b) $-5 \cdot 10$;
c) $-5 \cdot (-10)$; d) $5 \cdot (-10)$;
e) $6 \cdot 7$; f) $-6 \cdot 7$;
g) $-6 \cdot (-7)$; h) $6 \cdot (-7)$;
i) $-4 \cdot 9$; j) $-4 \cdot (-9)$;
k) $4 \cdot (-9)$; l) $6 \cdot 9$.

18. Izračunaj:

a) $5 \cdot 10 \cdot (-1)$; b) $-5 \cdot 4 \cdot (-10)$;
c) $-2 \cdot (-5) \cdot (-10)$; d) $5 \cdot (-10) \cdot 3$;
e) $6 \cdot 7 \cdot 2$; f) $-6 \cdot 7 \cdot (-2)$;
g) $-6 \cdot (-7) \cdot (-5)$; h) $6 \cdot (-7) \cdot 10$;
i) $-4 \cdot 9 \cdot (-2) \cdot (-5)$; j) $-4 \cdot 5 \cdot 2 \cdot (-9)$;
k) $4 \cdot (-3) \cdot (-2) \cdot (-9)$; l) $-6 \cdot (-9) \cdot (-1) \cdot (-1)$.

19. Izračunaj:

a) $(-1) \cdot (-1)$; b) $(-1) \cdot (-1) \cdot (-1)$;
c) $(-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1)$;
d) $(-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1)$;
e) $(-2) \cdot (-2) \cdot (-2)$;
f) $(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2)$;
g) $(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2)$.

20. Primjeni svojstva množenja da bi lakše izračunao:

a) $-25 \cdot 25 \cdot 3 \cdot (-4) \cdot 4$;
b) $-8 \cdot 125 \cdot 9 \cdot (-40) \cdot (-5)$;
c) $250 \cdot 50 \cdot (-40) \cdot 20 \cdot (-1)$;
d) $-20 \cdot 3 \cdot 5 \cdot (-30)$;
e) $50 \cdot (-125) \cdot (-8) \cdot (-8)$.

3.9. Dijeljenje cijelih brojeva



U pustinji Gobi tijekom dana temperatura je narasla na $36\text{ }^{\circ}\text{C}$, a u tijeku sljedećih 18 sati spustila se na svega $0\text{ }^{\circ}\text{C}$. Kolika je bila prosječna promjena temperature tijekom jednog sata?

Primjer 1.

$$112 : 7 = 16$$

djeljenik : djelitelj = količnik
 djeljenik = količnik · djelitelj

U vrećici je 112 bombona koje Luka želi podijeliti sedmorici učenika tako da svaki učenik dobije jednak broj bombona.

Rješenje:

$$+ : + = +$$

Jasno je da će Luka koristiti računsku operaciju dijeljenja.
 $112 : 7 = 16$

Svaki učenik će dobiti 16 bombona jer je $16 \cdot 7 = 112$

Znamo od ranije da je dijeljenje računaska operacija suprotna množenju.

Kada 27 dijeliš s 3 sigurno pozivaš u pomoć množenje i tražiš broj koji pomnožen s 3 daje 27.

$$27 : 3 = 9 \text{ jer je } 3 \cdot 9 = 27$$

$$42 : 7 = 6 \text{ jer je } 7 \cdot 6 = 42$$

Primijetimo da smo ovdje dijelili pozitivne cijele brojeve, tj. prirodne brojeve.

Količnik dvaju pozitivnih brojeva je pozitivan broj.

Primjer 2.

Količnik negativnih brojeva

Koliko je:

a) $-27 : (-3)$;

b) $-42 : (-7)$;

Rješenje:

a) $-27 : (-3) = 9$ jer je $-3 \cdot 9 = -27$;

b) $-42 : (-7) = 6$ jer je $-7 \cdot 6 = -42$;

$$- : - = +$$



Količnik dvaju negativnih brojeva je pozitivan broj.

Primjer 3. Količnik cijelih brojeva različitog predznaka

Ako su petorica prijatelja odlučila dug od 100 kuna podijeliti ravnomjerno između sebe, koliko će svaki od njih biti dužan?

Rješenje:

Podijelimo **dug** od 100 kuna s brojem prijatelja, tj. s 5. Rješenje znamo i napamet. Svaki od prijatelja imat će **dug** od 20 kuna.

Kako se dug u matematici zapisuje negativnim brojem, ovo bi dijeljenje izgledalo ovako:

$$-100 : 5 = -20. \text{ Provjera: } -20 \cdot 5 = -100.$$

Uočimo da je količnik negativnog i pozitivnog broja negativan broj.

Pogledajmo:

$$-27 : 3 = -9 \quad \text{jer je } 3 \cdot (-9) = -27;$$

$$-42 : 7 = -6 \quad \text{jer je } 7 \cdot (-6) = -42;$$

$$-30 : 2 = -15 \quad \text{jer je } 2 \cdot (-15) = -30.$$

$$- : + = -$$

Količnik pozitivnog i negativnog broja je negativan broj.

$$27 : (-3) = -9 \quad \text{jer je } -3 \cdot (-9) = 27$$

$$42 : (-7) = -6 \quad \text{jer je } -7 \cdot (-6) = 42$$

$$30 : (-2) = -15 \quad \text{jer je } -2 \cdot (-15) = 30$$

$$+ : - = -$$

Važno

Količnik dvaju cijelih brojeva jednakih predznaka je pozitivan broj

Količnik dvaju cijelih brojeva različitih predznaka je negativan broj

Primjer 4. Dijeljenje s 1

Umnožak nekog cijelog broja i broja 1 uvijek je isti taj cijeli broj. Postoji li broj s takvim svojstvom za dijeljenje?

Rješenje:

Pogledajmo zadatak: $-56 : 1 = -56$.

Ako neki cijeli broj z podijelimo s jedan dobit ćemo isti taj cijeli broj z .

$$z : 1 = z$$

Primjer 5. Dijeljenje nule

Koliko je:

a) $0 : 5$; b) $0 : (-7)$; c) $-5 : 0$?

Rješenje:

Ako nulu podijelimo s bilo kojim cijelim brojem količnik je nula.

a) $0 : 5 = 0$ jer je $0 \cdot 5 = 0$;

b) $0 : (-7) = 0$ jer je $0 \cdot (-7) = 0$;

c) $-5 : 0$ je neodređeno, jednostavno jer ne postoji broj koji pomnožen s 0 daje broj -5 .

Pazi, s nulom ne dijelimo!



Zadaci

1. Odredi predznak količnika:

dijeljenje	pozitivan/negativan
$4 : 2$	
$-4 : (-2)$	
$-4 : 2$	
$4 : (-2)$	

2. Popuni tablicu:

dijeljenje	količnik
$24 : 12 =$	
$-24 : (-12) =$	
$-24 : 12 =$	
$24 : (-12) =$	

3. Izračunaj:

- | | |
|---------------------|---------------------|
| a) $-30 : (-5)$; | b) $-8 : (-4)$; |
| c) $100 : 10$; | d) $-100 : (-10)$; |
| e) $-56 : (-7)$; | f) $-35 : (-5)$; |
| g) $-24 : (-4)$; | h) $-40 : (-5)$; |
| i) $28 : (-4)$; | j) $64 : (-8)$; |
| k) $-81 : (-9)$; | l) $-49 : 7$; |
| m) $-56 : 7$; | n) $-36 : (-6)$; |
| o) $56 : 8$; | p) $490 : 70$; |
| r) $-490 : (-70)$; | s) $-64 : (-16)$. |

$$\begin{array}{ll} + : + = + & + : - = - \\ - : - = + & - : + = - \end{array}$$

4. Izračunaj:

- | | |
|---------------------|-------------------|
| a) $-24 : 3$; | b) $-70 : 10$; |
| c) $56 : (-8)$; | d) $32 : (-4)$; |
| e) $500 : (-100)$; | f) $-50 : 5$; |
| g) $32 : (-16)$; | h) $-45 : (-5)$; |
| i) $28 : (-14)$; | j) $-24 : (-8)$; |
| k) $-18 : (-9)$; | l) $-42 : 7$; |
| m) $-56 : 8$; | n) $-24 : (-6)$; |
| o) $48 : 8$; | p) $70 : 7$; |
| r) $-27 : (-9)$; | s) $-6 : (-6)$. |

5. Anin tata će 8 mjeseci otplaćivati kredit od 32000 kuna preko tekućeg računa. Koji iznos će svaki mjesec biti zapisan za isplatu kredita na njegovom tekućem računu?

6. Izračunaj:

- | | |
|--------------------|-------------------|
| a) $-27 : 1$; | b) $-27 : (-1)$; |
| c) $0 : (-56)$; | d) $0 : (-9)$; |
| e) $-15 : (-15)$; | f) $23 : 23$; |
| g) $-23 : 23$; | h) $67 : (-67)$. |

7. Izračunaj:

- | |
|------------------------------|
| a) $-32 : 16 : (-2)$; |
| b) $-32 : (16 : (-2))$; |
| c) $-32 : (16 \cdot (-2))$; |
| d) $-56 : (-7 \cdot (-2))$; |
| e) $16 : (32 : (-8))$; |
| f) $-3 \cdot (-24) : 6$. |

8. Koji zadaci imaju jednaka rješenja?

- | |
|-----------------------------|
| a) $64 : (-8) : (-2)$; |
| b) $64 : [-8 \cdot (-2)]$; |
| c) $64 : [-8 : (-2)]$. |

9. Količnik brojeva -24 i 6 pomnoži brojem 3 .

10.

- | |
|--|
| a) Napiši sve cijele brojeve s kojima je djeljiv broj 24 ; |
| b) Napiši sve cijele brojeve s kojima je djeljiv broj 12 ; |
| c) Napiši sve cijele brojeve s kojima je djeljiv broj 8 ; |
| d) Napiši sve cijele brojeve s kojima je djeljiv broj 15 . |

11. Izračunaj:

- | | |
|----------------------|----------------------|
| a) $95 : (-19)$; | b) $117 : (-13)$; |
| c) $-858 : (-66)$; | d) $-4802 : (-49)$; |
| e) $-2378 : (-58)$; | f) $156 : 12$; |
| g) $182 : (-14)$; | h) $-600 : (-25)$; |
| i) $-935 : (-11)$; | j) $-126 : 18$; |
| k) $96 : (-16)$; | l) $-105 : (-15)$. |

Vježbalica

- Izračunaj
 - $14 \cdot (-5)$;
 - $7 \cdot (-10)$;
 - $-27 \cdot 8$;
 - $-40 \cdot 9$;
 - $3 \cdot (-72)$;
 - $-124 \cdot 0$;
 - $(-11) \cdot (-3)$;
 - $15 \cdot 9$;
 - $10 \cdot (-32)$;
 - $(-12) \cdot (-14)$;
 - $15 \cdot (-25)$;
 - $71 \cdot (-9)$.
- Usporedi(<, > ili =):
 - $32 \cdot (-14)$ i $-32 \cdot (-14)$;
 - $-27 \cdot 1$ i -27 ;
 - $-15 \cdot 2$ i $-12 \cdot 5$;
 - $18 \cdot 9$ i $-19 \cdot (-8)$;
 - $-9 \cdot (-25)$ i $19 \cdot (-5)$.
- Izračunaj:
 - $-733 \cdot (-148) \cdot (-295) \cdot 526 \cdot (-341) \cdot 0 \cdot (-934) \cdot (-245)$;
 - $-125 \cdot (-1) \cdot (-3) \cdot (-2) \cdot 1 \cdot (-8)$;
 - $-30 \cdot (-2) \cdot (-1) \cdot 4 \cdot (-1) \cdot (-25) \cdot (-2) \cdot (-1) \cdot 1 \cdot (-1)$;
 - $25 \cdot (-24) \cdot (-100) \cdot 1 \cdot (-4) \cdot 8 \cdot (-125) \cdot 3 \cdot (-4)$.
- Izračunaj:
 - $60 \cdot (-5) \cdot (-40)$;
 - $(-20) \cdot (-55) \cdot (-25)$;
 - $-8 \cdot 46 \cdot (-2) \cdot 125$;
 - $-25 \cdot (-17) \cdot (-4) \cdot (-90)$.
- Izračunaj:
 - $-35 : (-5)$;
 - $-84 : (-4)$;
 - $120 : 10$;
 - $-170 : (-17)$;
 - $-490 : (-7)$;
 - $-405 : (-5)$;
 - $-204 : (-4)$;
 - $-45 : (-15)$;
 - $228 : (-4)$;
 - $864 : (-8)$;
 - $-3681 : (-9)$;
 - $-1449 : 7$.
- Napiši sve moguće parove cijelih brojeva čiji je umnožak 48.
- Napiši sve moguće parove cijelih brojeva čiji je umnožak 36.
- Napiši sve moguće parove cijelih brojeva čiji je umnožak 42.
- Napiši sve moguće parove cijelih brojeva čiji je umnožak 18.
- Napiši sve moguće parove cijelih brojeva čiji je umnožak 32.
- Napiši sve moguće parove cijelih brojeva čiji je umnožak 30.
- Izračunaj:
 - $-207 : 1$;
 - $-275 : (-1)$;
 - $0 : (-516)$;
 - $0 : (-91)$;
 - $-157 : (-157)$;
 - $223 : 223$;
 - $-203 : 203$.
- Izračunaj:
 - $-48 : 12 : (-2)$;
 - $-48 : (12 : (-2))$;
 - $-48 : (12 \cdot (-2))$;
 - $-32 : (-8 \cdot (-2))$;
 - $72 : (32 : (-8))$;
 - $-3 \cdot (-24 : 8)$.
- Izračunaj:
 - $-256 : 16 : (-2)$;
 - $-256 : (16 : (-2))$;
 - $-256 : (16 \cdot (-2))$;
 - $-252 : (-18 \cdot (-2))$;
 - $52 : (34 : (-17))$;
 - $-3 \cdot (-60 : 15)$.
- Izračunaj:
 - $-486 : 18 : (-3)$;
 - $-486 : (18 : (-3))$;
 - $-486 : (18 \cdot (-3))$;
 - $-315 : (-21 \cdot (-5))$;
 - $136 : (56 : (-7))$;
 - $-3 \cdot (-45 : 5)$.
- Izračunaj:
 - $-432 : 24 : (-3)$;
 - $-192 : (24 : (-3))$;
 - $-432 : (24 \cdot (-3))$;
 - $-784 : (-28 \cdot (-2))$;
 - $720 : (27 : (-9))$;
 - $-32 \cdot (-126 : 6)$.
- Ako je $a = -30$, $b = -15$ i $c = 5$ koliko je
 - $a \cdot b \cdot c$;
 - $2a : b$;
 - $a : (b : c)$;
 - $-b : c$;
 - $-a : (-6) \cdot c$.

3.10. Povezivanje računskih operacija

Pomogni Luki riješiti taj zadatak.
Koje računске operacije treba prije izračunati?

Primjer 1. Stanje na računu

Anina mama na tekućem računu ima 500 kuna.
U knjižari je karticom platila 10 bilježnica po 3 kn, 3 olovke po 2 kn i 7 knjiga po 70 kn. Koliko joj je stanje na računu nakon toga?

Rješenje:

Da bismo izračunali novo stanje na tekućem računu, moramo izračunati koliko je Anina mama potrošila u knjižari.

Evo kako izgleda brojevni izraz za ovakav zadatak!

$$500 - 10 \cdot 3 - 3 \cdot 2 - 7 \cdot 70 =$$

Najprije množimo kako bismo znali koje brojeve valja oduzeti od broja 500

$$= 500 - 30 - 6 - 490 = 500 - (30 + 6 + 490) =$$

$$= 500 - 526 = -26$$

Novo stanje na računu Anine mame je -26 kn.



Važno

Za cijele brojeve vrijedi, već poznato, pravilo redoslijeda računskih operacija: najprije računamo umnoške i količnike, a zatim zbrajamo i oduzimamo.

Primjer 2.

Koliko je:

a) $3 \cdot 7 - 4 - 9 : 3$;

b) $-7 \cdot (-8) : (-2) - 20 : (-5) + 11$.

Rješenje:

a) $3 \cdot 7 - 4 - 9 : 3 = 21 - 4 - 3 = 21 - 7 = 14$;

b) $-7 \cdot (-8) : (-2) - 20 : (-5) + 11 = -28 + 4 + 11 = -28 + 15 = -13$.

Zadaci

1. Izračunaj:

a) $3 - (-7) \cdot 3$;

b) $56 + 24 : (-6)$;

c) $-9 : 3 + (-14) : (-7)$;

d) $-96 - 65 : 5 + 8$;

e) $25 - (-8) \cdot (-3)$.

2. Izračunaj:

a) $17 + 3 \cdot (-5) - (-3)$;

b) $-23 - 64 : (-8) + (-12) \cdot 2$;

c) $-16 + (-7) \cdot (-4) - 28$;

d) $14 - 24 : (-3) - 3 \cdot (-5)$;

e) $-56 : (-8) - 15 \cdot (-1)$;

f) $45 + (-36) : 6 - 7$.

Zadaci

3. Izračunaj:

- a) $-4 \cdot (-5) + 28 : (-7)$;
 b) $-56 : (-8) - 6 \cdot 4$;
 c) $-20 : 4 - 50 : (-10)$;
 d) $17 - 12 : (-4) - 5 \cdot (-3)$;
 e) $-23 + 1 \cdot (-5) - 24 : 6$;
 f) $55 - 45 : (-5) - 14$.

4. Termometar pokazuje da je temperatura u loncu 24°C . Luka je igrao ovako: dodao je 5 hladnih žetona, oduzeo 3 puta po 7 toplih žetona i na kraju dodao 4 puta po 5 hladnih žetona. Napiši prvo brojevni izraz pa izračunaj kolika je na kraju bila temperatura u loncu?

5. U zadatku $12 - 7 \cdot (-4) \cdot (-2)$ zbrajamo brojeve 12 i $-7 \cdot (-4) \cdot (-2)$. Pazi, $-7 \cdot (-4) \cdot (-2) = -56$, jer imamo neparan broj negativnih faktora:
 $12 - 7 \cdot (-4) \cdot (-2) = 12 - 56 = -44$.

Izračunaj:

- a) $10 - 4 : (-4) - 4 \cdot (-3) : (-6)$;
 b) $2 \cdot (-3) \cdot (-4) \cdot 5 - 28 : (-7) \cdot 2$.

6. Izračunaj:

- a) $24 : (-6) - 15 : 3 - 20 : (-5)$;
 b) $8 - 2 \cdot 15 : (-3) - 24 : (-3) - 16 : (-4) + 44 : (-11)$;
 c) $56 + 17 \cdot (-2) - 34 : (-2) - 18 \cdot (-1) - 100$;
 d) $17 - 3 \cdot (-3) \cdot (-2) - 24 : 3 + 84 : (-3)$.

7. Spoji zadatak s njegovim rješenjem

11	$(-5) \cdot 3 + 6$
7	$-15 + 7$
0	$(-2) \cdot (-4) + 2 \cdot 4$
2	$(-24) : 4 - 6$
-12	$(-28) : (-7) + 3$
-8	$-22 + 8 : (-2)$
-9	$-6 + (-7) + 15$
-26	$20 + 3 \cdot (-3)$
16	$(-4) \cdot 5 + 4 \cdot 5$

8. Četverokratnik razlike brojeva 17 i 22 podijeli s 5 i tome dodaj broj -25.
 (Napomena: Napiši brojevni izraz, pa izračunaj!)

Primjer 3. Računanje u zagradi

Koliko je:

- a) $-14 - 3 \cdot (12 - 20)$;
 b) $(-14 - 3) \cdot 12 - 20$;
 c) $23 - (-150 + 30) : 40 + (7 - 3 \cdot 5)$;
 d) $(18 - 24) : (7 - 5) + 5 \cdot (-9 + 7)$.

Zagrada ima prednost!



Rješenje:

Ako u zadatku postoje zagrade, najprije izračunavamo izraz u njima:

a) $-14 - 3 \cdot (12 - 20) =$

Najprije računamo razliku u zagradi.

$= -14 - 3 \cdot (-8) =$

Zatim je na redu umnožak,

$= -14 - 3 \cdot (-8) =$

a na kraju još zbrojimo što je preostalo

$= -14 + 24 = 10;$

b) $(-14 - 3) \cdot 12 - 20 =$

Najprije računamo izraz u zagradi.

$= (-14 - 3) \cdot 12 - 20 =$

Zatim je na redu umnožak,

$= -17 \cdot 12 - 20 =$

a na kraju još zbrojimo što je preostalo

$= -204 - 20 = -224;$

c) $23 - (-150 + 30) : 40 + (7 - 3 \cdot 5) =$

Najprije računamo izraze u zagradi.

$= 23 - (-150 + 30) : 40 + (7 - 3 \cdot 5) =$

$= 23 - (-120) : 40 + (7 - 15) =$

Ne zaboravimo prvo podijeliti

$= 23 + 120 : 40 + (-8) =$

$= 23 + 3 - 8 =$

$= 26 - 8 = 18;$

d) $(18 - 24) : (7 - 5) + 5 \cdot (-9 + 7) =$

$= -6 : 2 + 5 \cdot (-2) =$

$= -3 - 10 = -13.$

Zadaci

9. Izračunaj:

- a) $1 - (-7-8) : 3$;
- b) $-(-7 \cdot 6 - 9 \cdot 5) : (-87) - (-1)$;
- c) $15 + (22 : (-11) + 3 \cdot (-5) - 7)$;
- d) $(-12) : 3 \cdot 8$;
- e) $12 \cdot (-6) : (-2) : 2$;
- f) $-14 : (-7) \cdot (-6)$;
- g) $64 : (-2) : (-2) : (-2) : (-2)$;
- h) $-4 - 3 \cdot (2 - 10) =$
- j) $3 - (-50 + 10) : 40 + (6 - 3 \cdot (-5)) =$
- k) $(8 - 2) : (-7 + 5) + 3 \cdot (-19 + 17) =$

10. Jutros u 8 sati termometar je pokazivao temperaturu 15°C . Do 12 sati temperatura se podigla za petinu jutrošnje temperature, a do navečer se ponovno spustila za trećinu jutrošnje temperature.

- a) Procijeni hoće li temperatura navečer biti viša ili niža od jutrošnje?
- b) Napiši brojevni izraz i izračunaj koliko je točno stupnjeva iznosila temperatura navečer?

Primjer 5. Više zagrada

Koliko je: $\{-12 \cdot [12 - 14 \cdot (3 \cdot 5 - 7 \cdot 4) + 4]\} : (-9)$.

Rješenje:

Najprije unutarnje zagrade,
a onda vanjske.
I poštuju redoslijed!



$$\{-12 \cdot [12 - 14 \cdot (3 \cdot 5 - 7 \cdot 4) + 4]\} : (-9) =$$

Najprije računamo umnoške unutar okrugle zagrade.

$$\{-12 \cdot [12 - 14 \cdot (3 \cdot 5 - 7 \cdot 4) + 4]\} : (-9) =$$
$$= \{-12 \cdot [12 - 14 \cdot (15 - 28) + 4]\} : (-9) =$$

Zatim zbroj u okrugloj zagradi.

$$= \{-12 \cdot [12 - 14 \cdot (15 - 28) + 4]\} : (-9) =$$
$$= \{-12 \cdot [12 - 14 \cdot (-13) + 4]\} : (-9) =$$

Slijedi množenje u uglatoj zagradi.

$$= \{-12 \cdot [12 - 14 \cdot (-13) + 4]\} : (-9) =$$
$$= \{-12 \cdot [12 + 182 + 4]\} : (-9) =$$

Zbrajamo u uglatoj zagradi.

$$= \{-12 \cdot [12 + 182 + 4]\} : (-9) =$$
$$= \{-12 \cdot 198\} : (-9) =$$

Računamo umnožak u vitičastoj zagradi.

$$= \{-12 \cdot 198\} : (-9) = -2\,376 : (-9) = 264$$

I još posljednje dijeljenje.

$$= -2\,376 : (-9) = 264.$$

Zadaci

11. Izračunaj:

- a) $9 - 5 - [8 + (-3) + 2 \cdot (-7 - 4 + 2)]$;
- b) $3 + [-4 - (-2 + 7) \cdot (-3)] \cdot (-2)$;
- c) $-[-64 : (-16 + 8) - 20]$.
- e) $-4 \cdot (5 + 6 \cdot 2) - 3 \cdot (12 - 20) =$
- f) $(-14 - 3) \cdot (15 - 24) =$
- g) $23 - [-150 + (30 - 8 \cdot 2)] : (-2) + 17 - 3 \cdot 10 =$
- h) $-24 : (7 - 5 \cdot 2) + 5 \cdot [(-9 + 7) : (-2)] =$

12. Izračunaj:

- a) $-15 + 3 \cdot \{25 - 14 : [16 - 3 \cdot (-9 + 12)]\} =$
- b) $[(-12) \cdot 13 - 144 : 18] : (-2) =$
- c) $-65 + 384 \cdot (-11) - 6 \cdot 22 + 444 =$
- d) $[(14 - 21) : (-7) - (-6)] \cdot (-2) + 100 =$
- e) $(12 - 40) : (-8 + 4) + [6 \cdot (4 - 11)] =$
- f) $25 \cdot [4 - 3 \cdot (2 - 1)] =$
- g) $25 \cdot 4 - 3 \cdot (2 - 1) =$
- h) $25 \cdot 4 - 3 \cdot 2 - 1 =$

Primjer 6.

Distributivnost



Rješenje:

Ana je pomnožila zbroj brojeva -240 i 200 s 12 :
 $(-240 + 200) \cdot 12 = -40 \cdot 12 = -480$.

Mama nije sigurna je li to točno, pa svaki Anin pribrojnik iz zgrade množi s 12 , ovako:
 $-240 \cdot 12 + 200 \cdot 12 = 2\ 880 - 2\ 400 = -480$

Obje su dobile isti rezultat: Ana je za godinu dana potrošila 480 kuna više nego je predviđeno.

Budući su dobile jednake rezultate možemo zaključiti da je:

$$(-240 + 200) \cdot 12 = -240 \cdot 12 + 200 \cdot 12$$

Kako se zove ovo svojstvo množenja prema zbrajanju?

Važno

Za svaka tri cijela broja a , b i c vrijedi distributivnost množenja prema zbrajanju i oduzimanju.

$$(b + c) \cdot a = a \cdot b + a \cdot c$$

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

$$(b - c) \cdot a = a \cdot b - a \cdot c$$

$$a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$$

Primjer 7.

Izračunajmo na dva načina:

a) $6 \cdot (-5 + 2)$;

b) $-7 \cdot (-4 + 6)$;

c) $10 \cdot (-4 - 8)$.

U većini zadataka s cijelim brojevima je 2. način jednostavniji. No na koji god način se rješava, rezultat će na kraju biti jednak.

	1. način
a)	$6 \cdot (-5 + 2) = 6 \cdot (-5) + 6 \cdot 2 = -30 + 12 = -18$
b)	$-7 \cdot (-6 + 4) = -7 \cdot (-6) - 7 \cdot 4 = 42 - 28 = 14$
c)	$10 \cdot (-4 - 8) = 10 \cdot (-4) - 10 \cdot 8 = -40 - 80 = -120$
	2. način
a)	$6 \cdot (-5 + 2) = 6 \cdot (-3) = -18$
b)	$-7 \cdot (-6 + 4) = -7 \cdot (-2) = 14$
c)	$10 \cdot (-4 - 8) = 10 \cdot (-12) = -120$

Zadaci

13. Izračunaj tako da prvo pomnožiš:

- a) $5 \cdot (-9 + 12)$;
 b) $-7 \cdot (90 + 5)$;
 c) $8 \cdot (-50 - 6)$.

Primjer 8.

Kako za cijele brojeve vrijedi distributivnost množenja prema zbrajanju, vrijedi i jednakost:

$a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$. Kažemo da smo **izlučili zajednički faktor a** ispred zagrada.

Izlučivanje zajedničkog faktora ubrzava računanje. Uvjerimo se u to rješavajući iduće zadatke:

- a) $54 \cdot (-7) + 54 \cdot (-3)$;
 b) $6 \cdot 28 - 28 \cdot 4$;
 c) $-24 \cdot 15 - 24 \cdot 5 + 24 \cdot 20$.

Rješenje

a) Primijetimo da se broj 54 pojavljuje kao zajednički faktor, te ga izlučimo ispred zgrade:

14. Izračunaj na oba

načina: $-12 \cdot (7 - 10)$.

$$54 \cdot (-7) + 54 \cdot (-3) = \\ = 54 \cdot (-7 - 3) = 54 \cdot (-10) = -540;$$

Izlučivanje zajedničkog faktora

$$a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$$

$$n \cdot a - n \cdot b + n \cdot c - n \cdot d = n \cdot (a - b + c - d)$$

b) Zajednički faktor je 28.

$$6 \cdot 28 - 28 \cdot 4 = 28 \cdot (6 - 4) = 28 \cdot 2 = 56;$$

c) Zajednički faktor je 24.

$$-24 \cdot 15 - 24 \cdot 5 + 24 \cdot 20 = \\ = 24 \cdot (-15 - 5 + 20) = 24 \cdot 0 = 0.$$

Budući da smo ispred zgrade izlučili pozitivan broj 24, umnožak $-24 \cdot 15$ shvatili smo kao umnožak $24 \cdot (-15)$, jer su ta dva umnoška jednaka. Iz istog razloga umnožak $-24 \cdot 5$ shvatili smo kao $24 \cdot (-5)$.

Zadaci

15. Izluči zajednički faktor, pa izračunaj:

- a) $7 \cdot (-234) + 7 \cdot (-66)$; b) $12 \cdot 15 - 12 \cdot 35$;
 c) $-3 \cdot 9 + 3 \cdot 109$.

16. Luka je igrao igru "Topli i hladni žetoni". Prvo je dodavao šest puta po 4 hladna žetona, zatim je dodavao šest puta po 8 hladnih žetona i na kraju je još dodavao šest puta po 9 toplih žetona. Za koliko je stupnjeva promijenio početnu temperaturu u loncu?

17. Od trokratnika broja 8 oduzmi trokratnik broja 18.

18. Spretno podijeli:

- a) $77 : 11 - 110 : 11$;
 b) $-350 : 70 - 140 : 70 - 210 : 70$;
 c) $250 : 25 - 100 : 25 - 50 : (-25)$.

19. Izračunaj:

- a) $-1 + 2 \cdot (-3) + 4 : (-2)$;
 b) $(1 + 2) \cdot (-3) + (-4) : 2$;
 c) $1 - 2 \cdot (3 - 4) : 2$;
 d) $1 + (2 \cdot (-3) + 4) : (-2)$;
 e) $(1 - 2) \cdot (3 + 4) \cdot 2$.

20. Izračunaj:

- a) $-7 + 7 \cdot 7 - 7 : 7$;
 b) $7 + 7 \cdot (7 - 7) : 7$;
 c) $(-7 + 7) \cdot 7 - 7 : (-7)$;
 d) $(7 + 7) \cdot (-7 - 7) : (-7)$;
 e) $-7 + (-7 \cdot 7 - 7) : 7$;
 f) $7 - 7 \cdot (7 - 7 : 7)$;
 g) $(-7 + 7 \cdot (-7) - 7) : (-7)$.

Zadaci

21. Luka je za zadaću prepisao zadatak s ploče:
 $(-45 + 45 : 3 - 9 =$
 Ali, zaboravio je zatvoriti zagradu! Zatvori zagradu na različitim mjestima i nađi koja sve rješenja možeš dobiti.

22. Izračunaj:
 $-1409 + (-40 - 8 \cdot (-19 - 1934 - 166)) : 8.$

23. Zbroju brojeva 14 i -122 dodaj -13.

24. Od zbroja brojeva 12 i -10 oduzmi -6.

25. Zbroj brojeva -15 i -25 podijeli sa -4.

26. Izračunaj:

a) $-5 + [4 \cdot (-2 + 8 : (-4)) - 1];$

b) $[12 : (-11 - 20 : 2) - 7] + 9 \cdot (-3);=$

c) $7 \cdot (-4) + [-4 - (36 : 6 + 14) - 81 : 9] : (-1);=$

d) $-204 - [64 \cdot (-4 + 2 \cdot 2) - 6] + 255 : 5.=$

27. Izračunaj upotrebom džepnog računala:

a) $\{2 + [-4 \cdot (-36 - 4 \cdot 8) + 1] : (-3)\} - 7;=$

b) $6 + \{-5 \cdot [-10 - (1 + 2 \cdot 3)]\} : (-5);=$

c) $-50 - \{100 : [-(25 - 1) : 8 + 7] + 14 + 4 \cdot (-4)\}.$

28. Izračunaj upotrebom džepnog računala.

Majin tata imao je 1. travnja na svom tekućem računu 3250 kuna.

Tijekom travnja na naplatu će mu doći sljedeći troškovi:

* Struja 312 kn

* Voda 150 kn

* TV pretplata 60 kn

* Rata za kredit 378 kn

* Majine cipele 379 kn

S bankomata je dizao dva puta po 367 kn i 5 puta po 560 kn.

a) Procijeni, hoće li Majin tata biti 30. travnja "u minusu"?

b) Pomozi mu i izračunaj točno stanje na njegovu računu.

29. Izračunaj stanje računa za posljednji datum u tablici, upotrijebi džepno računalo:

a)

vrsta	datum	uplata/isplata	stanje
			2 401
izvod	12.06.	-3	
plaća	13.06.	3 226	
ček	24.06.	-1 340	
račun	30.06.	-526	
izvod	1.07.	-350	
plaća	23.07.	3 002	
ček	24.07.	-527	
račun	30.07.	-1 235	

b)

vrsta	datum	uplata/isplata	stanje
			-121
dodatak	12.07.	250	
plaća	13.07.	3 201	
ček	24.07.	-542	
račun	30.07.	-2 373	
izvod	1.08.	-19	
plaća	23.08.	3 457	
ček	24.08.	-549	
račun	30.08.	-541	

30. Izluči zajednički faktor pa pojednostavi:

a) $5a - 6a + 12a =$

b) $10x - 25x - 4x + 7x =$

c) $4x + 5 - 2x + 16 =$

d) $24 + 14x - 10x - 2x + 7 =$

e) $2a + 3b - 15a - 5a + 12b =$

f) $25a + 16 - 4x - 22 - 3x - 11a + 1 =$

31. U parku prirode Biokovo nalazi se jama Amfora. Njen ulaz je na nadmorskoj visini 1590 m, a dubina - 788 m. Na kojoj nadmorskoj visini se nalazi dno jame? Potraži podatke o duljini te jame te njenim istraživačima.

32. Bajkalsko jezero nalazi se na nadmorskoj visini 455 m, a njegova najveća dubina je - 1637 m. Na kojoj nadmorskoj visini se nalazi dno jezera? Kako se to geografski naziva?

33. Površina Mrtvog mora nalazi se na nadmorskoj visini -417 m. Kolika je dubina jezera ako se njegovo dno nalazi na nadmorskoj visini -794 m?

Vježbalica

1. Izračunaj:

- a) $-17 + 3 \cdot 12$; b) $115 - (-132) : (-3)$;
 c) $2316 : (-4) + 28$;
 c) $120 - 4 \cdot (-5) - 16 + (-2) \cdot 1$;
 d) $-14 + 0 \cdot 8 - 13 - 39 : 13 + 62 + (-125) : 5$.

2. Izračunaj:

- a) $-1 + 2 \cdot (-13) + 24 : 2$;
 b) $(-1 + 2) \cdot (-13) + 24 : 2$;
 c) $-1 + 2 \cdot (-13 + 24) : 2$;
 d) $-1 + (2 \cdot (-13) + 24) : 2$;
 e) $(-1 + 2) \cdot (-13 + 24) : (-11)$.

3. Izračunaj:

- a) $17 + (-3 \cdot 5) - (-27) : 9$;
 b) $27 + (-5) \cdot (50 - 36) : 7$;
 c) $(34 + 75) \cdot (-7) - 17 : (-17)$;
 d) $-(47 + 7) \cdot (8 - 8) : (-7)$;
 e) $-32 + (15 \cdot 7 - 7) : 7$;
 f) $85 + (-11) \cdot (15 - 9 : 9)$;
 g) $(-10 + 10 \cdot 11 - 11) : 89$.

4. Izračunaj:

- a) $18 \cdot 4 + (-7) - 12 - (-16) \cdot 2 - 0 + 318 : 6$;
 b) $-7 \cdot 7 - 47 + 22 - 120 : (-10)$;
 c) $112 + 1863 : (-9) + 81 - 0 : 9 + (-12) + 12 : 4$;
 d) $0 \cdot 5 - 10 - 90 : 9 + 10 - 16 : 8 + 12 - 27 : 9 + 9$;
 e) $0 - 12 : 2 + (-11) - 15 : 3 - 18 : 2 + 111 - (-45) + 19 : 19$.

5. Izračunaj:

- a) $-125 + 13 \cdot 3 - 121 : 11 + 6 \cdot 45 - 267 : 3 + 16 \cdot 5$;
 b) $12 \cdot 85 - 900 - 45 : 9 - 3 + (-200 : 4) - 15 \cdot 47 - 145 : 5 - 28$;
 c) $40 + (-1160 : 145) - (-24 : 6) + (-4056 : 6) + 11 + 16 : 4$;
 d) $-35 \cdot 8 - 58 \cdot 3 - 144 : 12 - 5 \cdot 13 - 18 \cdot 7 - 600 : 12$.

6. Izračunaj:

- a) $(35426 + 25687) : (-39) - (1345 - 1344) \cdot (703 : (-19) + 530) + (3 \cdot 456 - 368) : 8$;
 b) $(-288 + 9758 : 34) \cdot 13 + (-584 - 8000) : (-29) - (352 + 5 \cdot 16) : 48$.

7. Zbroju brojeva 21 i -22 dodaj 13.

8. Od zbroja brojeva 28 i 120 oduzmi -6.

9. Zbroj brojeva 450 i 42 podijeli sa -4.

10. Količniku brojeva -615 i 15 dodaj količnik brojeva 216 i -4.

11. Od umnoška brojeva 207 i -9 oduzmi njihov kvocijent.

12. Umnožak dvije sedmice pribroji količniku brojeva 171 i -9.

13. Kolika je razlika između umnoška brojeva 115 i -5 i umnoška brojeva -114 i 4?

14. Koliki je umnožak razlike brojeva 35 i -12 i razlike brojeva 25 i -13?

15. Izračunaj:

- a) $25 - [14 \cdot (23 - 28 : 4) - 11]$;
 b) $[-112 : (111 - 220 : 2) - 27] + 19 \cdot 3$;
 c) $-17 \cdot 4 + [(-336 : 6 + 14) - 81 : 9] : 61 + 1$;
 d) $-224 - [-174 : (14 + 22 \cdot 2) - 36] + (-25) : 5 - 1$.

16. Izračunaj:

- a) $-75 + [-44 \cdot (22 - 88 : 4) - 11]$;
 b) $[-132 : (101 - 200 : 2) - 37] + 69 \cdot 3 - 4$;
 c) $-7 \cdot 14 - [(6 : 6 + 114) + (-801) : 9] : 13$;
 d) $1231 - [1580 : (-14 - 12 \cdot 12) - 10] + 2155 : 5$.

17. Izračunaj:

- a) $-50 + [-40 \cdot (20 - 80 : 5) - 10]$;
 b) $[806 : (116 - 648 : 12) - 7] - 17 \cdot 3$;
 c) $-37 \cdot 4 + [(-656 : (-16) - 14) - 441 : 9] : 11 + 1$;
 d) $524 - [-984 : (64 + 22 \cdot 12) - 1] - 154 : 7$.

18. Izračunaj:

- a) $\{12 - [4 \cdot (306 - 4 \cdot 18) - 12 \cdot 3] : 3\} - 7$;
 b) $60 - \{50 \cdot [80 - (11 + 20 \cdot 3)]\} : 5$;
 c) $35 - \{116 : [(205 - 1) : 4 + 7] - 14 + 4 \cdot 4\}$.

19. Izračunaj:

- a) $\{21 + [-8 \cdot (765 - 94 \cdot 8) + 2] : 3\} - 7 \cdot 5$;
 b) $17 + \{15 \cdot [170 - (11 + 12 \cdot 13)]\} : (-15)$;
 c) $-5 \cdot 30 - \{-1320 : [(285 - 11) : 137 + 8] - 14 - 64 : 16\}$.

20. Izračunaj:

- a) $\{-23 - [43 \cdot (360 - 43 \cdot 8) - 13] : 3\} : 31$;
 b) $-62 - \{52 \cdot [102 - (12 + 22 \cdot 3)]\} : (-3 \cdot 100 - 6 \cdot 2)$;
 c) $580 - \{-1040 : [(-255 + 71) : 8 + 7] - 5 \cdot 25 - 7 \cdot 4\} - 18$

21. Ako je $a = -30$, $b = -15$ i $c = 5$ koliko je

- a) $-a + b \cdot c$; b) $2a - b - 3c$; c) $a : b - c$;
 d) $a - b : c$; e) $a : (-6) + b \cdot c$.

$$35 - \{116 : [(205 - 1) : 4 + 7] - 14 + 4 \cdot 4\}$$

3.11. Ponavljanje

Pitanja za ponavljanje:

- Koji brojevi se nalaze u skupu prirodnih brojeva?
- Kako označavamo skup prirodnih brojeva?
- Koji brojevi se nalaze u skupu cijelih brojeva?
- Kako označavamo skup cijelih brojeva?
- Postoji li najveći cijeli broj? A najmanji?
- Navedi par suprotnih brojeva.
- Koliko iznosi udaljenost na brojevnom pravcu broja 5 od njemu suprotnog broja?
- Nabroji sve cijele brojeve x za koje vrijedi: $-5 < x < 4$
- Koja svojstva ima zbrajanje u skupu cijelih brojeva?
- Koja svojstva ima množenje u skupu cijelih brojeva?
- Kako se zove par brojeva čiji je zbroj uvijek jednak nuli?
- Kakav rezultat dobivamo pri množenju i dijeljenju s 1?
- Kakav rezultat dobivamo pri množenju i dijeljenju s -1?
- Koji broj je veći, ako uspoređujemo
 - pozitivan i negativan broj;
 - pozitivan broj i nulu;
 - negativan broj i nulu?

Zadaci za ponavljanje:

- Stavi znak uspoređivanja ($<$, $>$ ili $=$):
 - $12 \square 45$; b) $12 \square -45$; c) $-12 \square -45$;
 - $127 \square 107$; e) $-65 \square 0$; f) $76 \square -65$.
- Poredaj podatke u rastućem nizu:
 $-17\text{ }^{\circ}\text{C}$, $27\text{ }^{\circ}\text{C}$, $-12\text{ }^{\circ}\text{C}$, $0\text{ }^{\circ}\text{C}$, $-29\text{ }^{\circ}\text{C}$, $29\text{ }^{\circ}\text{C}$.
- Odredi apsolutnu vrijednost broja:
 - $|6| = ?$ b) $|-12| = ?$ c) $|0| = ?$
 - $|1\ 234| = ?$ e) $|-1\ 234| = ?$
- Izračunaj:
 - $-2 + 3$; b) $-45 - 23$; c) $-12 - 5$;
 - $79 - 87$; e) $-43 - 13$; f) $35 - 35$
 - $-64 + 64$; h) $12 - 12$
 - $-6 + (-2) + (+4) - (-1) - (+3)$.
- Izračunaj:
 - $-36 : (-9)$; b) $-36 - 9$; c) $-8 \cdot 8 =$
 - $19 - 19$; e) $72 : (-8)$; f) $-4 + 28 =$
 - $0 : (-7)$; h) $50 + 23$; i) $7 \cdot 9 =$
- Prvo pojednostavni zapis, pa izračunaj:
 - $-6 + (-2) + (+4) - (-1) - (+3)$;
 - $-(+2) + (-6) - (-3)$;
 - $100 - (-25) - 35 + (-25) - (+35)$;
 - $-(+8) + 45 - (+45) + 0 + (-12)$;
- Izračunaj uz pomoć džepnog računala stanje računa za posljednji datum u tablici:
 - | vrsta | datum | uplata/isplata | stanje |
|-------|--------|----------------|--------|
| | | | 405 |
| izvod | 12.06. | -300 | |
| plaća | 13.06. | 3 226 | |
| ček | 24.06. | -1 340 | |
| račun | 30.06. | -526 | |
| izvod | 1.08. | -350 | |
| plaća | 23.08. | 3 424 | |
| ček | 24.08. | -1 522 | |
| račun | 30.08. | -551 | |

b)

vrsta	datum	uplata/isplata	stanje
			-523
izvod	12.06.	-150	
plaća	13.06.	3 224	
ček	24.06.	-342	
račun	30.06.	-1 573	
izvod	1.08.	-9	
plaća	23.08.	2 457	
ček	24.08.	-522	
račun	30.08.	-1 544	

8. Izračunaj umnožak.

- a) $-6 \cdot 3 \cdot 5$;
 b) $-8 \cdot (-2) \cdot 6$;
 c) $-7 \cdot 1 \cdot 6 \cdot (-2)$;
 d) $-5 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3$;
 e) $0 \cdot (-9) \cdot (-5) \cdot (-3)$;
 f) $-9 \cdot (-2) \cdot (-5) \cdot 0$;
 g) $-6 \cdot (-9) \cdot 4 \cdot 3$;
 h) $5 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 8$;
 i) $6 \cdot (-3) \cdot (-2) \cdot (-4)$.

9. Izračunaj količnik.

- a) $-27 : 9$;
 b) $-49 : (-7)$;
 c) $-14 : 7$;
 d) $-50 : 5$;
 e) $-9 : (-9)$;
 f) $-60 : (-10)$;
 g) $-48 : (-8)$;
 h) $66 : 11$;
 i) $6 : (-2)$;
 j) $-20 : (-5)$;

10. Izračunaj:

- a) $-12 - 4 \cdot (100 : 20 - 48 : (-8))$;
 b) $9 - 5 - [8 + (-3) + 2 \cdot (-7 - 4 + 2)]$;
 c) $-8 - [4 + (7 - 10)] - (4 - 2)$;
 d) $-2 \cdot (3 - 5) - [-3 + 1 - (-4 + 2)]$;
 e) $-3 + [-(2 - 6) - 3 + (-4 + 2)]$.

11. Izračunaj:

- a) $13 - (-4) \cdot 3$;
 b) $6 + 30 : (-6)$;
 c) $-18 : 3 + (-28) : (-7)$;
 d) $-6 - 55 : 5 + 11$;
 e) $5 - (-8) \cdot (-3)$.

12. Izračunaj:

- a) $7 + 3 \cdot (-5) - (-2)$;
 b) $-3 - 16 : (-8) + (-12) \cdot 2$;
 c) $-6 + (-7) \cdot (-4) - 28$;
 d) $-4 - 3 : (-3) - 3 \cdot (-5)$;
 e) $-64 : (-8) - 5 \cdot (-1)$;
 f) $5 + (-6) : 6 - 7$;
 g) $-15 + 45 + 4 \cdot \{16 - 14 : [16 - 3 \cdot (-9 + 12)]\}$.

13. U Varaždinu su tijekom veljače zabilježene ove temperature zraka: 0°C , -5°C , -1°C , 0°C , 2°C , 4°C , 7°C , 9°C . Kolika je bila prosječna temperatura?

14. Matija je bio dužan Luki 27 kuna. Kad je Matija za džeparac od tate dobio 15 kuna, dao ih je Luki. Je li nakon toga još uvijek bio dužan Luki? Ako jest, koliko kuna?

Nakon toga je Matija od bake dobio 25 kuna. Je li tada Luki mogao vratiti cijeli dug? Je li mu ostalo što novaca? Ako jest, koliko?

Primjerak oglednog testa:

1. Izračunaj:

- a) $2 - 8$; b) $(-5) \cdot 3$.

2. Izračunaj:

$$9 - 13 + 2.$$

3. Usporedi:

- a) -7 i 4 ; b) -2 i -3 .

4. Izračunaj:

- a) $2 - 11 + (-15) - (-2)$;
 b) $-15 - 19 - (-7) + (-3)$;

5. Poredaj gradove prema izmjerenim

temperaturama tako da počneš od najhladnijeg grada. Atena 20°C , Berlin 1°C , Moskva -19°C , Oslo -17°C , Pariz -2°C , Prag 4°C , Rim 16°C . Kolika je razlika u temperaturi između najtoplijeg i najhladnijeg grada?

6. Izračunaj:

- a) $-4 - 4 : (-4) - 4 \cdot (-4)$;
 b) $-1 : (-1) - 1 \cdot (-1)$;
 c) $52 + (-53) : 53 - 52$;

7. $-5 + [4 \cdot (-2 + 8 : (-4) - 1)] =$
8. U Osijeku su tijekom ožujka zabilježene ove temperature zraka: $4\text{ }^{\circ}\text{C}$, $-3\text{ }^{\circ}\text{C}$, $-11\text{ }^{\circ}\text{C}$, $10\text{ }^{\circ}\text{C}$, $2\text{ }^{\circ}\text{C}$, $-4\text{ }^{\circ}\text{C}$, $-7\text{ }^{\circ}\text{C}$, $1\text{ }^{\circ}\text{C}$. Kolika je bila prosječna temperatura?
9. Izračunaj: $7 \cdot (-4) + [36 : 6 + 14 - 81 : 9] : (-1) =$

10. Izračunaj stanje računa za posljednji datum u tablici.

vrsta	datum	uplata/isplata	stanje
			215
dodatak	12.09.	-650	
plaća	13.09.	3 228	
ček	24.09.	-2 540	
račun	30.09.	-923	
izvod	1.10.	-19	
plaća	23.10.	4 257	
ček	24.10.	-3 322	
račun	30.10.	-55	

Igre

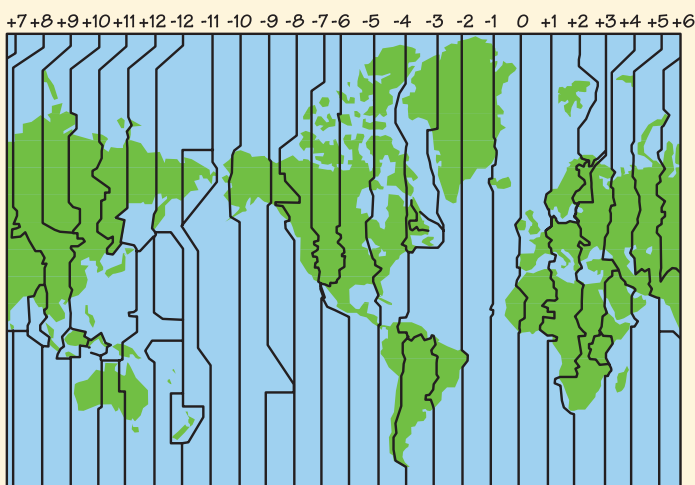
1. Igra kartama

(Karte s cijelim brojevima su na CD-u.)

Moguće inačice igre

- a) Trebaju se spojiti parovi karata čiji zbroj je 1.
- b) Trebaju se spojiti parovi karata čiji zbroj je 0.
- c) Trebaju se spojiti parovi karata čiji umnožak je pozitivan/negativan broj.
- d) Vuku se karte, pobjeđuje veća/manja.
- e) Vuku se dvije karte – njih treba zbrojiti ili oduzeti ili podijeliti ili pomnožiti.

2. Vremenske zone



Za igru je potreban atlas svijeta.

Moguće inačice igre

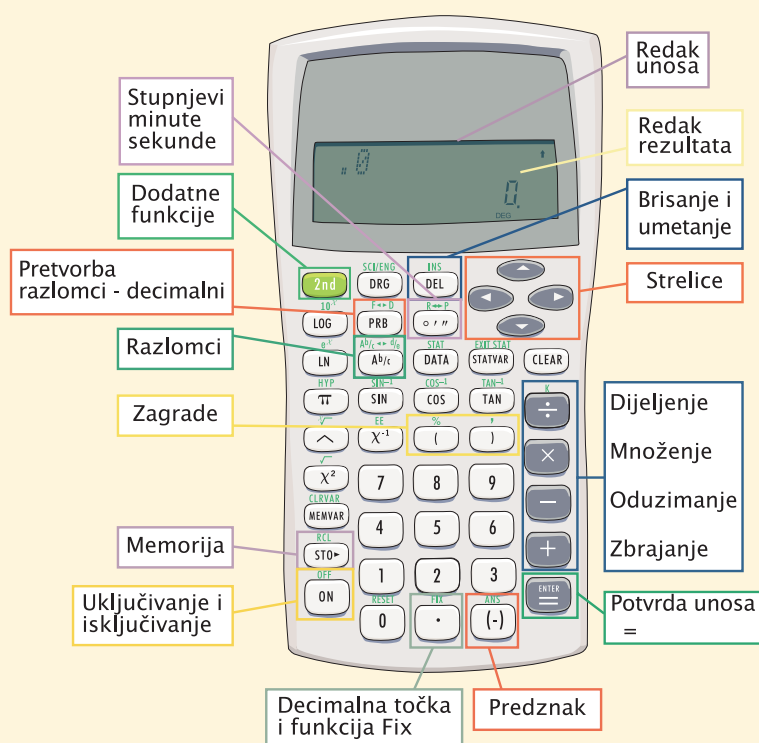
- U Zagrebu je 12:00 sati, koliko je u Londonu, Moskvi, Torontu...
- Let iz Halifaxa do Moskve traje 9 sati. Avion je krenuo iz Halifaxa u 6:00, u koliko će sati sletjeti u Moskvu?
- Poruka elektroničke pošte poslana je iz Londona u New York u 10:00 sati. Zbog problema na Internetu stigla je nakon dva sata. Koliko je tada bilo sati u New Yorku?

3. Tombola

Potrebne su karte s cijelim brojevima. Svaki učenik izvlači jednu kartu.

Prvu nagradu dobiva najveći/najmanji od izvučenih brojeva. Tko je sretni dobitnik?

Upoznajmo džepno računalo



Promišljena upotreba džepnog računala može olakšati rješavanje, istraživanje i donošenje zaključaka o raznim matematičkim problemima. Džepno računalo ne može samostalno rješavati probleme, ono je alat koji olakšava učenje. Uporaba džepnog računala ne isključuje klasičan način računanja s olovkom i papirom, a u nekim zadacima čak je brže i jednostavnije doći do rješenja na takav način.

Većina današnjih džepnih računala ima sličan izgled i slične mogućnosti. Ovdje možete pročitati osnovne upute za jedno ogledno džepno računalo, a ukoliko radite s drugačijim modelom pronađite na njemu odgovarajuće tipke

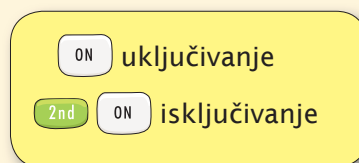
Neki modeli džepnog računala imaju zaslon s dva retka, što je pogodno za provjeravanje tijekom upisa rezultata. Prvi redak (redak unosa) prikazuje unesene brojeve i znakove. Ukupna duljina mu je 88 znakova. Pritiskom na tipke sa strelicama pomičete se po retku lijevo ili desno.

Drugi redak (redak rezultata) prikazuje rezultat do 10 znamenaka. Ako rezultat ima više znamenaka prikazuje se u znanstvenom zapisu.

Primjer 1. Uključivanje i isključivanje džepnog računala

1. Za uključivanje džepnog računala pritisnite tipku **ON**. Na zaslonu se pojavi pokazivač (treptajući crni pravokutnik).

2. Za isključivanje džepnog računala pritisnite najprije tipku **2nd** te zatim tipku **ON**.



Osnovne računске operacije

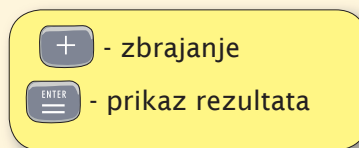
Primjer 2. Zbrajanje

Da biste izračunali koliko je $12 + 7$ pritisnite:

1. Tipke sa brojevima **1** **2**
2. Tipku za zbrajanje **+**
3. Tipku s brojem **7**

4. Za prikaz rezultata pritisnite tipku **ENTER**

5. Na zaslonu će se prikazati rezultat 19.



Primjer 3. Oduzimanje

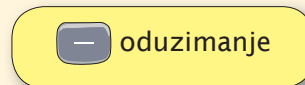
Da biste izračunali koliko je $123 - 78$ pritisnite:

1. Tipke sa brojevima **1** **2** **3**
2. Tipku za oduzimanje **-**

3. Tipku s brojevima **7** **8**

4. Za prikaz rezultata pritisnite tipku **ENTER**

5. Na zaslonu će se prikazati rezultat 45.



Primjer 4. Množenje

Da biste izračunali koliko je $23 \cdot 8$ pritisnite:

1. Tipke sa brojevima
2. Tipku za množenje

3. Tipku s brojem

4. Za prikaz rezultata pritisnite tipku

5. Na zaslonu će se prikazati rezultat 184.

množenje

Primjer 5. Dijeljenje

Da biste izračunali koliko je $375 : 5$ pritisnite:

1. Tipke sa brojevima
2. Tipku za dijeljenje

3. Tipku s brojem

4. Za prikaz rezultata pritisnite tipku

5. Na zaslonu će se prikazati rezultat 75.

dijeljenje

Brisanje

Primjer 6.

Brisanje jednog ili nekoliko znakova

Ponekad je potrebno neki broj ili znak obrisati.

1. Primjerice napisali ste 563 umjesto 53.
2. Da biste izbrisali broj 6 pritiskom na strelicu

pomaknite pokazivač ulijevo na broj 6

3. Pritisnite tipku

4. Ukoliko želite obrisati više znakova postupak ponovite.

brisanje udesno

Primjer 7. Brisanje cijelog retka

Da biste obrisali cijeli redak pritisnite tipku

Tipka ne briše sadržaj memorije.

brisanje cijelog retka

Primjer 8.

Brisanje svih redaka i memorije

Istovremenim pritiskom na tipke i brišu se svi podaci iz memorije i svi prije

unešeni reci. Pri tom se džepno računalo vraća na osnovne postavke.

potpuno brisanje

Ispravljanje

Primjer 9. Ispravljanje unosa

1. Utipkajte brojeve , pritisnite tipku te zatim brojeve

2. Želimo umjesto unesenih brojeva napisati 41 i 26

3. Pritiskom na strelicu pomaknite pokazivač ulijevo na broj 6 te pritisnite tipku s brojem . Time smo broj 6 zamijenili brojem 1

4. Zatim pritiskom na strelicu pomaknite pokazivač na broj 3 i pritisnite tipku s brojem . Time smo broj 3 zamijenili brojem 6

6. Pritiskom na tipku dobivamo rezultat zadane računske operacije

7. Na zaslonu će se prikazati rezultat 67.

pomicanje po retku unosa

Primjer 10.**Ispravljanje unosa s umetanjem**

U prethodnom primjeru ste vidjeli da svaki novi unos broja briše prethodno napisani broj. Ukoliko želite umetnuti neki broj ili znak potrebno je uključiti funkciju *Insert*.

1. Utipkajte brojeve
2. Pritisnite tipku za zbrajanje
3. Utipkajte brojeve
4. Želimo umjesto broja 46 imati broj 416. Dakle, između 4 i 6 trebamo unijeti broj 1
5. Pritiskom na strelicu pomaknite pokazivač ulijevo na broj 6

6. Pritisnite tipku za uključivanje dodatnih funkcija , te zatim tipku . Pokazivač je promijenio oblik u treptajuću crticu

7. Pritisnite tipku s brojem . Na zaslonu su se brojevi 4 i 6 razmaknuli i između njih se pojavio broj 1

8. Pritiskom na strelicu pomaknite pokazivač na desni kraj. Funkcija umetanja (*Insert*) se automatski isključuje.

9. Pritisnite tipku da biste dobili rezultat.

10. Na zaslonu će se prikazati rezultat 439.



Zagrade i redoslijed računskih operacija

Primjer 11. Upotreba zagrada

Želimo izračunati $57 \cdot (120 + 56012)$.

1. Utipkajte brojeve
2. Pritisnite tipku za množenje
3. Pritisnite tipku za lijevu zagradu
4. Utipkajte brojeve

5. Pritisnite tipku za zbrajanje

6. Utipkajte brojeve

7. Pritisnite tipku za desnu zagradu

8. Pritisnite tipku da

biste dobili rezultat.

9. Na zaslonu će se

prikazati rezultat 3199524.

Primjer 12.**Redoslijed računskih operacija**

Džepno računalo slijedi ista poznata pravila za redoslijed računskih operacija:

1. Zagrade
2. Množenje i dijeljenje
3. Zbrajanje i oduzimanje

Izračunajmo:

a) $1 + 2 \cdot 3 =$

b) $(1 + 2) \cdot 3 =$

Za a) zadatak trebamo redom pritisnuti ove

tipke: . Rezultat je 7.

Za b) zadatak trebamo redom pritisnuti ove tipke:

.

Rezultat je 9.

Rezultati u ta dva zadatka su različiti jer je umetanje zagrada promijenilo redoslijed izvršavanja računskih operacija.

Razlomci

Primjer 13. Unos razlomka

Za upisivanje razlomaka upotrebljava se tipka

.

Želimo upisati razlomak $\frac{1}{4}$.

1. Utipkajte brojnik

2. Pritisnite tipku za razlomak

3. Utipkajte nazivnik

4. Pritisnite tipku .








U prvom retku zaslona

razlomak je zapisan kao 1.4, a u drugom kao 1/4.

Primjer 14. Skraćivanje razlomka

Ukoliko upišete neki razlomak koji je moguće skratiti, nakon pritiska na tipku dobit ćete na zaslonu napisan potpuno skraćen razlomak. Ukoliko je razlomak veći od 1 bit će prikazan u obliku mješovitog broja.




Želimo skratiti razlomak $\frac{64}{256}$.




1. Utipkajte brojnik  
2. Pritisnite tipku za razlomak 
3. Utipkajte nazivnik   
4. Pritisnite tipku 

Na zaslonu će biti napisan rezultat $1/4$.

Primjer 15. Unos mješovitog broja

Želimo upisati mješoviti broj $3\frac{1}{4}$.

1. Utipkajte broj 
2. Pritisnite tipku za razlomak 
3. Utipkajte brojnik 


2. Pritisnite tipku za razlomak 
3. Utipkajte nazivnik 
4. Pritisnite tipku 




U prvom retku zaslona razlomak je zapisan kao $3\downarrow1\downarrow4$, a u drugom kao $3\downarrow1/4$.



Primjer 16. Pretvaranje mješovitog broja u razlomak

Želimo mješoviti broj $3\frac{1}{4}$ zapisati u obliku razlomka.

1. Pritisnite redom tipke








2. Za promjenu zapisa pritisnite redom tipke  
 3. Pritisnite tipku 
- Na zaslonu će biti napisan rezultat $13/4$.

  promjena zapisa mješoviti broj - razlomak

Primjer 17.

Pretvaranje razlomka u mješoviti broj






Želimo razlomak $\frac{13}{4}$ zapisati u obliku mješovitog broja.








1. Pritisnite redom tipke    
 2. Za promjenu zapisa pritisnite redom tipke  
 3. Pritisnite tipku 
- Na zaslonu će biti napisan rezultat $3\downarrow1/4$.

Primjer 18. Računanje s razlomcima




Računske operacije s razlomcima rade se na isti način kao i s prirodnim brojevima.

Želimo izračunati koliko je $\frac{53}{12} - \frac{44}{12}$.

1. Utipkajte brojnik prvog razlomka  
2. Pritisnite tipku za razlomak 
3. Utipkajte nazivnik prvog razlomka  

4. Pritisnite tipku za oduzimanje 
5. Utipkajte brojnik drugog razlomka  
6. Pritisnite tipku za razlomak 
7. Utipkajte nazivnik drugog razlomka  
8. Pritisnite tipku 

Na zaslonu će biti napisan rezultat $3/4$.
Rezultat je automatski skraćen do kraja.

   promjena zapisa razlomak - decimalni broj

Decimalni brojevi




Primjer 19.

Pretvaranje razlomka u decimalni broj

Mješoviti broj i razlomak možemo vrlo jednostavno zapisati u obliku decimalnog broja.

Želimo broj $\frac{13}{4}$ zapisati u obliku decimalnog broja.









1. Pritisnite redom tipke    




2. Za promjenu zapisa pritisnite redom tipke  
3. Pritisnite tipku 




Na zaslonu će biti napisan rezultat 3.25. Na isti način se i mješoviti brojevi mogu zapisati u obliku decimalnih.

Primjer 20. Pretvaranje decimalnog broja u razlomak

Želimo broj 3.25 zapisati u obliku razlomka.












1. Pritisnite redom tipke    
2. Za promjenu zapisa pritisnite redom tipke   
3. Pritisnite tipku .



Na zaslonu će biti napisan rezultat $3\frac{1}{4}$.
Ukoliko želite možete dobiveni mješoviti broj zapisati u obliku razlomka tako da pritisnete redom tipke   .

 decimalna točka
  promjena zapisa mješoviti broj - razlomak



Primjer 21. Zaokruživanje decimalnog broja

Želimo broj 3.556791 zaokružiti na četiri decimale.

1. Utipkajte decimalni broj        
2. Otvorite izbornik za određivanje broja decimala pritiskom na tipke  te 
3. Pritisnite tipku s brojem  jer zaokružujemo na četiri decimale.








4. Pritisnite tipku  da biste dobili rezultat.
5. Na zaslonu će se prikazati rezultat 3.5568. Umjesto pritiskanja tipke  mogli smo strelicama pomaknuti pokazivač na broj 4 u izborniku.



Bez obzira na odabrani broj decimala džepno računalo i dalje pamti zadani broj sa svim decimalama, pa ako želite promijeniti broj decimala neće biti nikakvog problema.

  određivanje broja decimala

Primjer 22. Računanje s decimalnim brojevima





Želimo izračunati $3.45 : 3.5$.

1. Utipkajte broj 
2. Pritisnite tipku za decimalnu točku 
3. Utipkajte brojeve  
4. Pritisnite tipku za dijeljenje 
5. Utipkajte broj 
6. Pritisnite tipku za decimalnu točku 











7. Utipkajte broj 
8. Pritisnite tipku  da biste dobili rezultat.
9. Na zaslonu će se prikazati rezultat 0.985714286. Rezultat je beskonačan decimalni broj. Džepno računalo može prikazati samo ograničen broj decimala, u ovom slučaju 9. Pritom se svaki beskonačan decimalan broj automatski zaokružuje.

Primjer 23. Određivanje broja decimala

Želimo izračunati $3.45 : 3.5$ zaokruženo na tri decimale.

1. Da biste odredili na koliko decimala će biti prikazan rezultat pritisnite tipku  te zatim 
 2. Na zaslonu se prikazao izbornik F0123456789 po kojem se možete pomicati strelicama  i .
- F je oznaka za pomičnu točku, tj. bez točno određenog broja decimala. 0 je oznaka za 0

decimala. 1 je oznaka za 1 decimalu itd. do najviše 9 decimala.

3. Pritiskom na strelice pomaknite pokazivač na oznaku 3
4. Pritisnite 
5. Utipkajte brojeve    
6. Pritisnite tipku za dijeljenje 
7. Utipkajte brojeve   
8. Pritisnite tipku  da biste dobili rezultat.
9. Na zaslonu će se prikazati rezultat 0.986.

Rezultat je automatski zaokružen na tri decimale. Broj decimala se može promijeniti i nakon izračuna. Postavljeni broj decimala se odnosi samo na rezultat, brojevi koje unosite mogu imati decimala koliko želite.

Primjer 24. Jedan duži zadatak

Želimo izračunati

$$20.4 - [6.4 : (0.4 + 0.6 \cdot 2) - 0.6] + 25.5 : 5 = .$$

Kad rješavamo ovakav zadatak uz pomoć džepnog računala potrebno je pažljivo unijeti sve brojeve, zagrade i znakove. Džepno računalo koristi samo znak okrugle zagrade (i), pa za sve zagrade u zadatku upotrijebite te znakove.

Provjeravajte što se upisali gledajući u prvi redak na zaslonu. Po potrebi pomaknite

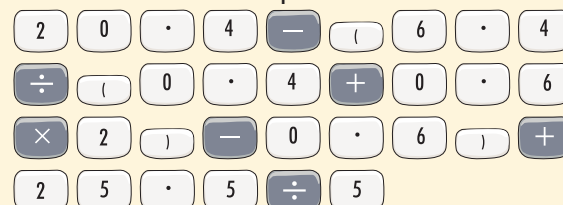
Za povratak na pomičnu decimalnu točku

pritisnite redom tipke 2nd FIX FIX .

2nd FIX FIX uključivanje pomične decimalne točke

pokazivač strelicama ulijevo ili udesno da biste vidjeli neki dio zadatka.

1. Pritisnite redom tipke



2. Pritisnite tipku ENTER .

Na zaslonu će biti prikazan rezultat 22.1.

Upotreba memorije

Memorija džepnog računala namijenjena je spremanju rezultata pojedinih računa. Tako spremljeni brojevi mogu se upotrebljavati u daljnjim računanjima.

Primjer 25. Upotreba posljednjeg rezultata

Ukoliko pri daljnjem računanju želite upotrijebiti rezultat posljednjeg računa upotrijebite funkciju *Ans*. Primjerice izračunali ste $53245 - 1244$ i tek onda se sjetili da je još potrebno pomnožiti s 543 .

1. Pritisnite redom tipke 5 3 2 4

5 $-$ 1 2 4 4

2. Rezultat ste dobili pritiskom na tipku ENTER

3. Da biste dobiveni rezultat upotrijebili u

novom računu pritisnite

redom tipke 2nd ANS $(-)$. Na

zaslonu će biti napisano *Ans*

4. Nastavite s upisom računa \times

5 4 3

5. Pritisnite tipku ENTER da biste

dobili rezultat.

6. Na zaslonu će se prikazati

rezultat 28236543 .

Jednak rezultat bi dobili i da ste odmah upisali

$(53245 - 1244) \cdot 543$.

Primjer 26. Spremanje broja u memoriju

Za spremanje nekog broja u memoriju imate na raspolaganju pet mjesta označenih slovima A, B, C, D i E.

Želimo izračunati $55 + 44$ i spremiti taj rezultat u memoriju.

1. Pritisnite redom tipke 5 5 $+$ 4 4

2. Pritisnite tipku ENTER

3. Za spremanje u memoriju pritisnite tipku RCL STO . Pritiskom na strelice pomaknite pokazivač na slovo pod kojim želite spremiti broj, primjerice C

4. Pritisnite tipku ENTER

U prvom retku zaslona će biti napisano

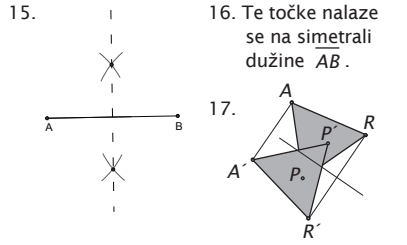
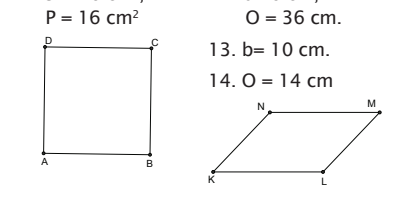
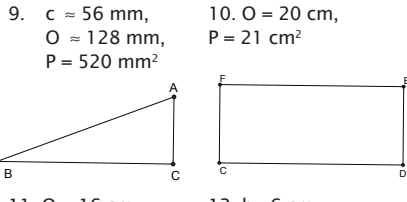
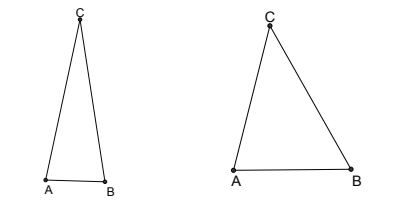
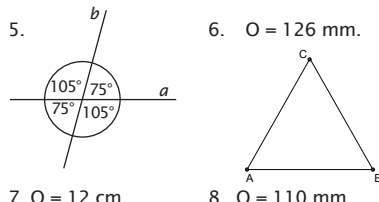
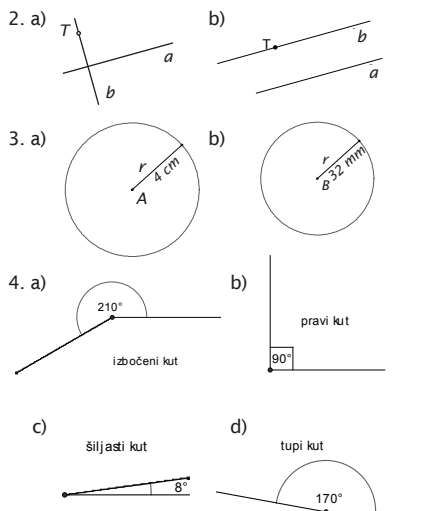
$\text{Ans} \rightarrow \text{C}$, a u drugom broj 99 .



O. Uvodno ponavljanje

0.1. Geometrija

1. 1-paralelogram, 2-pravokutnik, 3-peterokut, 4-pravokutni trokut, 5-paralelogram, 6-tupokutni trokut, 7-kvadrat, 8-paralelogram.



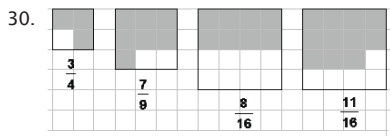
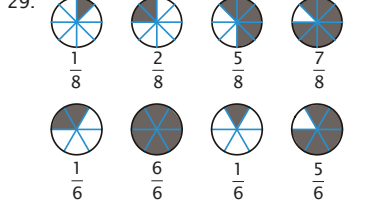
0.2. Aritmetika

- 28 27, 408 < 4040, 55 = 55, 0 < 23, 10 0.
- a) ≈ 240, 3010, 520, 8900, 6760, 250; b) ≈ 200, 3000, 500, 8900, 6800, 300; c) ≈ 200, 3000, 500, 9000, 7000, 300.
- a) 40217; b) 3894; c) 7502; d) 31128; e) 2472.
- a) 9; b) 129; c) 65; d) 14 i ost 4; e) 213; f) 369; g) 275.
- O = 900 cm.
- a) 72; b) 62; c) 67; d) 0.
- a) 26; b) 145; c) 27; d) 22.
- 44640 min.
- a) 0, ne može, 0, 0, 1, 0, 1, ne može, ne može u \mathbb{N} ; b) 0, 8, 0, 0, ne može, 27, 0, 1; c) 0, 5, 0, ne može, 0, 12, 12, 1.
- a) 405, 7000, 5, 10; b) 7000, 10; c) 7000; d) 7000; e) 405, 492; f) 405; g) 405, 223, 492, 1973, 7000, 5, 10, 1; h) 492, 7000, 10.

- a) 4020, 4021, 4022, 4023, 4024, 4025, 4026, 4027, 4028, 4029; b) 4020, 4022, 4024, 4026, 4028; c) 4020, 4023, 4026, 4029; d) 4020, 4025; e) 4023; f) 4020.
- a) 200 = 2 · 2 · 2 · 5 · 5; b) 64 = 2 · 2 · 2 · 2 · 2 · 2; c) 72 = 2 · 2 · 2 · 3 · 3.
- D = 8, V = 504. 14. D = 1, V = 156.

15. Najveća duljina je 25 cm.(NZD).
- Za 54 min.(NZV).
- a) 5.9; b) 27.15; c) 54.046; d) 1294.9846; e) 171.1103; f) 3735.0496; g) 718.7656.
- a) 20.9; b) 24.65; c) 33.796; d) 916.8596; e) 2.7977; f) 246.7594; g) 198.0584.
- a) 17.875; b) 785.916; c) 2634.169; d) 545.3; e) 9571.311; f) 14660.2; g) 20.8763; h) 280.78614; i) 3642.109; j) 4581.7876.
- a) 2280; b) 4.01; c) 0.574; d) 7.47; e) 920; f) ≈ 109.3; g) ≈ 12660; h) ≈ 143.9; i) ≈ 161.2.
- a) 161 kn; b) 281.75 kn; c) 744.625 kn.
- 75 bombona, 50 čokoladica, 25 žvaka; platit će 315.25 kn.

23. 584.48 kn. 24. 7.49 kn.
- 14 boca. 26. 42 dana.
- ≈ 3300.33 kn. 28. 3 kn.
- 29.



- $\frac{9}{15}$.
- a) $\frac{1}{4} < \frac{5}{4}$; b) $\frac{11}{5} > 1$; c) $\frac{3}{3} = 1$; d) $\frac{7}{8} > \frac{6}{8}$.
- $\frac{2}{15} < \frac{3}{15} < 1 < \frac{24}{15} < \frac{33}{15} < \frac{101}{15}$.

- a) $\frac{8}{25}$ kuglica; b) $\frac{7}{25}$ kuglica; c) $\frac{10}{25}$ kuglica.
- $\frac{9}{4}$ jabuke.
- a) $\frac{1}{30}$ studenog; b) $\frac{7}{30}$ studenog; c) $\frac{14}{30}$ studenog.
- a) 500 g; b) 160 g; c) 3 g; d) 70 g.
- a) 30 min; b) 40 min; c) 45 min.
- a) 6 dm; b) 4375 mm; c) 390 min; d) 12 mm.
- a) $\frac{11}{33}$; b) $\frac{8}{20}$; c) $\frac{8}{32}$; d) $\frac{42}{48}$.
- $\frac{17}{5} > 1$, $\frac{4}{41} < 1$, $\frac{3}{2} > 1$, $\frac{2}{3} < 1$, $\frac{17}{17} = 1$, $\frac{102}{12} > 1$.

- Proširujemo s 9.
- a) $\frac{3}{8}$; b) $\frac{5}{2}$; c) $\frac{1}{2}$; d) $\frac{4}{5}$.
- a) $2\frac{3}{4}$; b) 0; c) 1; d) $1\frac{3}{4}$.

1. Razlomci

1.0. uvod

- Jedna polovina; dvije trećine; jedna četvrtina; tri petine; sedam šestina; jedanaest desetina; sedamnaest stotina; sto devedeset tri dvjesto trideset četvrtina.
- a- brojnik; b- nazivnik. 3. Obojano: $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{7}, \frac{5}{8}$.
- $\frac{9}{12}, \frac{8}{12}, \frac{6}{12}$. 5. $\frac{2}{6}, \frac{3}{4}, \frac{4}{7}, \frac{2}{4}$.
- $\frac{7}{11}$; a) zbroj; b) pribrojnici.
- $\frac{8}{17}$; a) razlika; b) umanjnik i umanjitelj.
- a) umnožak; b) faktori; c) 4, 0, 0, 9.
- a) količnik; b) djeljenik i djelitelj; c) 2, 0, 16, 1, 0.
1. zgrade; 2. množenje i dijeljenje; 3. zbrajanje i oduzimanje.

1.1. svođenje razlomaka na zajednički nazivnik

- a) $\frac{3}{6}, \frac{4}{6}$; b) $\frac{40}{15}, \frac{27}{15}$; c) $\frac{21}{70}, \frac{50}{70}$; d) $\frac{25}{30}, \frac{18}{30}$; e) $\frac{9}{12}, \frac{20}{12}$; f) $\frac{30}{35}, \frac{63}{35}$; g) $\frac{91}{63}, \frac{36}{63}$; h) $\frac{20}{110}, \frac{99}{110}$.
- a) $\frac{2}{4}, \frac{3}{4}$; b) $\frac{5}{6}, \frac{14}{6}$; c) $\frac{3}{25}, \frac{65}{25}$; d) $\frac{15}{3}, \frac{11}{18}$; e) $\frac{8}{8}, \frac{7}{8}$; f) $\frac{5}{14}, \frac{14}{14}$; g) $\frac{25}{9}, \frac{35}{9}$; h) $\frac{18}{20}, \frac{18}{20}$.
- a) $\frac{2}{12}, \frac{9}{12}$; b) $\frac{20}{36}, \frac{21}{36}$; c) $\frac{6}{50}, \frac{65}{50}$; d) $\frac{15}{36}, \frac{22}{36}$; e) $\frac{33}{48}, \frac{10}{48}$; f) $\frac{5}{30}, \frac{51}{30}$; g) $\frac{26}{42}, \frac{39}{42}$; h) $\frac{5}{75}, \frac{33}{75}$; i) $\frac{150}{180}, \frac{63}{180}$; j) $\frac{52}{36}, \frac{3}{36}$; k) $\frac{12}{80}, \frac{55}{80}$; l) $\frac{49}{105}, \frac{35}{105}$.
- a) $\frac{2}{12}, \frac{9}{12}, \frac{5}{12}$; b) $\frac{280}{504}, \frac{441}{504}, \frac{288}{504}$; c) $\frac{6}{50}, \frac{65}{50}, \frac{80}{50}$; d) $\frac{75}{36}, \frac{26}{36}, \frac{28}{36}$; e) $\frac{8}{20}, \frac{15}{20}, \frac{14}{20}$; f) $\frac{98}{126}, \frac{1}{1}$; g) $\frac{14}{30}, \frac{39}{30}, \frac{54}{30}$; h) $\frac{42}{24}, \frac{15}{24}, \frac{136}{24}$.

1.2. Uspoređivanje razlomaka

- $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12}$.
-
-

Jednaki su : $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}, \frac{5}{8} = \frac{10}{16}, \frac{4}{6} = \frac{2}{3} = \frac{6}{9}$.

3. a) $\frac{1}{2} < \frac{3}{2}$; b) $\frac{8}{3} > \frac{5}{3}$; c) $\frac{3}{10} = \frac{3}{10}$; d) $\frac{5}{12} < \frac{10}{12}$;

e) $\frac{11}{23} < \frac{31}{23}$; f) $\frac{8}{13} > \frac{5}{13}$; g) $\frac{23}{110} < \frac{32}{110}$; h) $\frac{5}{19} = \frac{5}{19}$.

4. a) $\frac{3}{2} < \frac{5}{2} < \frac{8}{2} < \frac{11}{2}$; b) $\frac{5}{6} < \frac{10}{6} < \frac{13}{6} < \frac{35}{6}$;

c) $\frac{1}{5} < \frac{8}{5} < \frac{13}{5} < \frac{15}{5}$; d) $\frac{1}{16} < \frac{3}{16} < \frac{5}{16} < \frac{15}{16}$.

5. a) $\frac{3}{5} < \frac{3}{2}$; b) $\frac{5}{7} < \frac{5}{3}$; c) $\frac{13}{10} > \frac{13}{12}$; d) $\frac{10}{12} < \frac{10}{7}$;

e) $\frac{11}{23} < \frac{11}{13}$; f) $\frac{8}{3} > \frac{8}{5}$; g) $\frac{23}{10} > \frac{23}{11}$; h) $\frac{5}{3} < \frac{5}{9}$.

6. a) $\frac{11}{21} < \frac{11}{12} < \frac{11}{3} < \frac{11}{2}$; b) $\frac{13}{26} < \frac{13}{12} < \frac{13}{6} < \frac{13}{5}$;

c) $\frac{7}{35} < \frac{7}{25} < \frac{7}{15} < \frac{7}{5}$; d) $\frac{9}{16} < \frac{9}{11} < \frac{9}{6} < \frac{9}{3}$.

7. a) $\frac{1}{2} < \frac{2}{3}$; b) $\frac{8}{3} > \frac{9}{5}$; c) $\frac{3}{10} < \frac{5}{7}$; d) $\frac{5}{6} = \frac{10}{12}$;

e) $\frac{3}{2} > \frac{5}{4}$; f) $\frac{11}{3} > \frac{20}{9}$; g) $\frac{3}{10} > \frac{2}{7}$; h) $\frac{13}{6} < \frac{11}{5}$.

8. a) Luka je pojeo veći dio torte; b) Lucija je pretrčala manje; c) Slikovnica o biljkama je skuplja; d) Prvi motor je prešao veći dio staze, i bio je brži.

9. Lucija je bila uspješnija.

10. Luka je u pravu jer je $\frac{20}{25} = \frac{24}{30}$.

11. Maja je trčala brže.

12. a) $\frac{1}{8}$ bazena; b) $\frac{1}{11}$ bazena; c) prva cijev

jer je $\frac{5}{8} > \frac{6}{11}$.

13. a) $\frac{5}{9} < \frac{5}{7} < \frac{4}{3}$; b) $\frac{1}{3} < \frac{2}{5} < \frac{7}{10} < \frac{13}{9}$;

c) $\frac{7}{5} < \frac{3}{2} < \frac{5}{3}$; d) $\frac{1}{9} < \frac{17}{12} < \frac{5}{3} < \frac{11}{6}$;

e) $\frac{7}{12} < \frac{21}{10} < \frac{14}{5}$; f) $\frac{3}{20} < \frac{13}{25} < \frac{7}{10} < \frac{14}{15}$.

14. Čokolada, jagode, sladoled, štapići, lizaljka.

15. Sretni dobitnik je Petar.



16. a) $\frac{13}{4} > \frac{5}{2} > \frac{23}{10} > \frac{7}{4} > \frac{4}{5}$;



b) $\frac{17}{3} > \frac{27}{5} > \frac{17}{4} > \frac{49}{12}$.

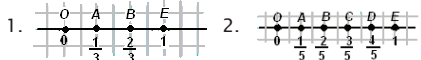


18. $\frac{60}{15} \text{ kg} < \frac{104}{25} \text{ kg} < \frac{21}{5} \text{ kg} < \frac{17}{4} \text{ kg} < \frac{35}{8} \text{ kg}$.

19. Najviše je potrošio treći, a najmanje prvi.

20. Prvi je bio najbliže gradu.

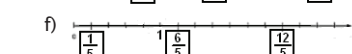
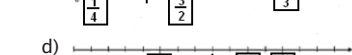
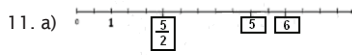
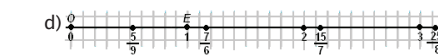
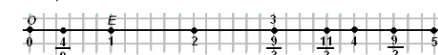
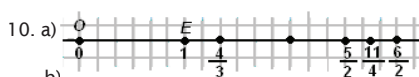
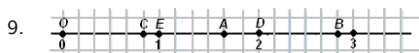
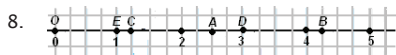
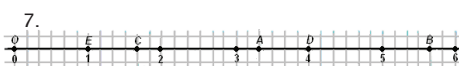
1.3. Brojevni pravac



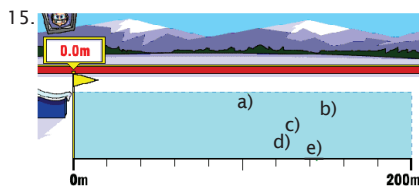
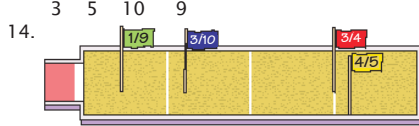
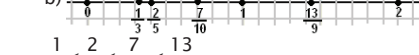
4. a) A($\frac{1}{4}$), B($\frac{2}{4}$), C($\frac{3}{4}$); b) A($\frac{1}{6}$), B($\frac{3}{6}$), C($\frac{4}{6}$), D($\frac{5}{6}$); c) A($\frac{1}{9}$), B($\frac{4}{9}$), C($\frac{5}{9}$), D($\frac{8}{9}$).

5. $\frac{11}{7}$ je između 1 i 2, $\frac{11}{3}$ je između 3 i 4, $\frac{23}{4}$ je između 5 i 6, $\frac{63}{5}$ je između 12 i 13.

6. $\frac{1}{8}$ je između 1 i 2, $3\frac{3}{4}$ je između 3 i 4, $3\frac{1}{3}$ je između 3 i 4, 8 je na 8, $13\frac{1}{2}$ je između 13 i 14.



12. a) $\frac{5}{9} < \frac{5}{7} < \frac{4}{3}$;



a) 100 m- najkraće; b) 150 m- najdulje; c) 125 m; d) 120 m; e) 140 m.

1.4. Zbrajanje razlomaka

1. a) $1\frac{1}{8}$; b) $1\frac{3}{11}$; c) $2\frac{2}{9}$; d) $2\frac{7}{9}$.

2. $\frac{4}{5}$ torte su pojele, nisu pojele cijelu tortu.

3. a) (6), $1\frac{2}{3}$; b) (12), $2\frac{1}{2}$; c) (20), $1\frac{3}{20}$.

4. a) $\frac{3}{4}$; b) $\frac{3}{4}$; c) $\frac{4}{5}$; d) $1\frac{2}{9}$; e) $\frac{8}{9}$; f) $2\frac{7}{16}$;

g) $1\frac{7}{25}$; h) $1\frac{1}{21}$.

+	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{5}{11}$
	$\frac{1}{2}$	2	$2\frac{1}{4}$	$\frac{21}{22}$
	$\frac{3}{4}$	$2\frac{1}{4}$	$1\frac{1}{12}$	$2\frac{1}{2}$
	$\frac{5}{3}$	$3\frac{1}{6}$	2	$3\frac{5}{12}$
	$\frac{11}{7}$	$3\frac{1}{14}$	$1\frac{19}{21}$	$3\frac{9}{28}$
			$2\frac{2}{77}$	

6. a) $\frac{11}{12}$; b) $\frac{17}{20}$; c) $\frac{13}{21}$; d) $\frac{43}{45}$; e) $1\frac{8}{21}$; f) $1\frac{19}{36}$;

g) $1\frac{16}{35}$; h) $1\frac{41}{90}$.

7. a) $1\frac{7}{12}$; b) $1\frac{7}{60}$; c) $1\frac{7}{18}$; d) $1\frac{11}{20}$; e) $\frac{11}{12}$; f) $1\frac{1}{2}$;

g) $1\frac{1}{10}$; h) $1\frac{1}{60}$.

8. a) $1\frac{47}{80}$; b) $1\frac{19}{30}$; c) $1\frac{41}{63}$; d) $9\frac{11}{140}$.

9. Pročitala je cijelu knjigu.

10. Pokosili su $\frac{13}{24}$ livade, što nije cijela livada.

11. Riješili su $\frac{9}{10}$ testa, što nije cijeli test.

12. a) $2\frac{1}{2}$; b) $2\frac{1}{2}$; c) $2\frac{1}{2}$.

13. Kupila je $1\frac{7}{20}$ kg voća.

+	$2\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{3}$	$4\frac{3}{4}$	$4\frac{5}{11}$
	$\frac{1}{2}$	3	$2\frac{5}{6}$	$5\frac{1}{4}$
	$\frac{3}{4}$	$3\frac{1}{4}$	$3\frac{1}{12}$	$5\frac{1}{2}$
	$\frac{5}{3}$	$4\frac{1}{6}$	4	$6\frac{5}{12}$
	$\frac{11}{7}$	$4\frac{1}{14}$	$3\frac{19}{21}$	$6\frac{9}{28}$
			$6\frac{2}{77}$	

+	$2\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{3}$	$4\frac{3}{4}$	$4\frac{5}{11}$
	$5\frac{1}{2}$	8	$7\frac{5}{6}$	$10\frac{1}{4}$
	$4\frac{3}{4}$	$7\frac{1}{4}$	$7\frac{1}{12}$	$9\frac{1}{2}$
	$4\frac{2}{3}$	$7\frac{1}{6}$	7	$9\frac{5}{12}$
	$3\frac{4}{7}$	$6\frac{1}{14}$	$5\frac{19}{21}$	$8\frac{9}{28}$
			$8\frac{2}{77}$	

16. a) $3\frac{5}{8}$; b) $4\frac{5}{6}$; c) $1\frac{8}{15}$; d) $3\frac{1}{2}$.

17. a) $1\frac{13}{15}$; b) $5\frac{17}{30}$; c) $6\frac{32}{63}$; d) $5\frac{47}{55}$.

18. Spavao je $15\frac{11}{12}$ sati, što je 15 sati i 55 min, veći dio dana je spavao.

19. $5\frac{1}{5}$ litara. 20. $15\frac{1}{4}$ godina.

21. $537\frac{7}{20}$ tona ugljena.

22. a) $8\frac{7}{12}$; b) $5\frac{7}{60}$; c) $10\frac{7}{18}$; d) $16\frac{11}{20}$;

e) $7\frac{7}{12}$; f) $5\frac{19}{24}$; g) $9\frac{8}{15}$; h) $13\frac{1}{14}$.

23. a) $27\frac{2}{5}$; b) $30\frac{7}{10}$; c) $18\frac{5}{12}$; d) $7\frac{7}{12}$;

e) $8\frac{1}{3}$; f) $18\frac{5}{18}$; g) $16\frac{1}{4}$; h) $10\frac{4}{9}$.

24. a) $10\frac{7}{11}$; b) $5\frac{3}{10}$; c) $8\frac{7}{18}$; d) $14\frac{4}{15}$;

e) $7\frac{7}{12}$; f) $15\frac{5}{6}$; g) $19\frac{13}{22}$; h) $11\frac{29}{56}$.

25.

60 minuta	1 sat	$\frac{1}{24}$ dana
30 minuta	$\frac{1}{2}$ sata	$\frac{1}{48}$ dana
15 minuta	$\frac{1}{4}$ sata	$\frac{1}{96}$ dana

26.

jelo	$1\frac{1}{2}$ sata	$\frac{1}{16}$ dana
škola	$6\frac{1}{4}$ sata	$\frac{25}{96}$ dana
spavanje	$8\frac{1}{2}$ sata	$\frac{17}{48}$ dana
hodanje	$\frac{1}{2}$ sata	$\frac{1}{48}$ dana
vožnja autobusom	1 sat	$\frac{1}{24}$ dana
posjet zubaru	$\frac{3}{4}$ sata	$\frac{1}{32}$ dana
pisanje zadaće	1 sat	$\frac{1}{24}$ dana
čitanje	1 sat	$\frac{1}{24}$ dana
gledanje televizije	$1\frac{1}{4}$ sata	$\frac{5}{96}$ dana
telefoniranje	$\frac{1}{2}$ sata	$\frac{1}{48}$ dana
zabavljanje	$1\frac{3}{4}$ sata	$\frac{7}{96}$ dana
ZBROJ	24 sata	$\frac{96}{96} = 1$ dan

29. $27\frac{19}{20}$ km. 30. $35\frac{3}{5}$.

31. $9\frac{8}{15}$.

1.5. Svojstva zbrajanja razlomaka

1. $\frac{47}{36}$, svojstvo komutativnosti.

2. $\frac{122}{105}$, svojstvo asocijativnosti.

3. $1\frac{1}{30}$ litara. 4. 71 kn.

5. $293\frac{5}{12}$ kg jabuka.

6. $20\frac{2}{3}$ dm, $21\frac{2}{3}$ dm. 7. $15\frac{2}{5}$ m.

8.

a	0	$4\frac{1}{2}$	$5\frac{3}{8}$	$1\frac{17}{29}$	$21\frac{1}{6}$
b	$4\frac{11}{23}$	$6\frac{1}{2}$	$6\frac{5}{8}$	0	$3\frac{5}{6}$
a + b	$4\frac{11}{23}$	11	12	$1\frac{17}{29}$	25

9. a) $13\frac{5}{6}$; b) 11; c) $11\frac{39}{80}$; d) 2; e) 13; f) 29.

1.6. Oduzimanje razlomaka

1. a) $\frac{5}{8}$; b) $\frac{4}{11}$; c) $\frac{5}{6}$; d) $2\frac{4}{5}$.

2. $\frac{2}{5}$ više.

3. a) $\frac{1}{4}$; b) $\frac{3}{4}$; c) $\frac{4}{15}$; d) $\frac{7}{9}$; e) $1\frac{1}{9}$; f) $\frac{9}{16}$;

g) $\frac{2}{25}$; h) $\frac{20}{21}$.

4.

-	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{5}{11}$
$\frac{13}{2}$	6	$6\frac{1}{6}$	$4\frac{3}{4}$	$6\frac{1}{22}$
$\frac{19}{4}$	$4\frac{1}{4}$	$4\frac{5}{12}$	3	$4\frac{13}{44}$
$\frac{17}{3}$	$5\frac{1}{6}$	$5\frac{1}{3}$	$3\frac{11}{12}$	$5\frac{7}{33}$
$\frac{15}{7}$	$1\frac{9}{14}$	$1\frac{17}{21}$	$\frac{11}{28}$	$1\frac{53}{77}$

5. a) $\frac{5}{12}$; b) $1\frac{7}{20}$; c) $\frac{1}{21}$; d) $1\frac{38}{45}$; e) $\frac{14}{15}$; f) $\frac{11}{14}$;

g) $3\frac{13}{36}$; h) $3\frac{1}{12}$.

6. a) $1\frac{3}{4}$; b) $1\frac{17}{60}$; c) $\frac{5}{18}$; d) $1\frac{1}{20}$; e) $\frac{19}{36}$;

f) $\frac{43}{48}$; g) $\frac{16}{75}$; h) $\frac{19}{24}$.

7. a) $2\frac{33}{80}$; b) $2\frac{13}{30}$; c) $6\frac{8}{63}$; d) $\frac{69}{140}$.

8. Nije zasijala cijeli vrt, ostalo joj je $\frac{3}{40}$ vrta.

9. Preostane im $\frac{53}{90}$.

10. a) $\frac{7}{8}$ je veći za $\frac{1}{24}$; b) $\frac{9}{14}$ je veći za $\frac{5}{84}$;

c) $\frac{53}{72}$ je veći za $\frac{1}{24}$; d) $\frac{13}{36}$ je veći za $\frac{1}{144}$.

11. a) $3\frac{3}{8}$; b) $2\frac{1}{6}$; c) $\frac{11}{15}$; d) $3\frac{1}{2}$.

12. a) $1\frac{7}{15}$; b) $3\frac{1}{10}$; c) $5\frac{59}{63}$; d) $8\frac{52}{55}$.

13. a) $\frac{7}{12}$; b) $1\frac{37}{60}$; c) $3\frac{7}{18}$; d) $2\frac{9}{20}$.

14. $\frac{12}{25}$ ukupne količine drva.

15. Ostalo im je $\frac{5}{12}$ puta, što je manji dio.

16. Duljina treće stranice je $3\frac{11}{12}$ cm.

17. Mora dodati još $1\frac{7}{8}$ šalice brašna.

18. Mora dodati još $\frac{1}{8}$ litre.

19. Mora dodati $2\frac{1}{30}$ litre vode.

20. Moguće je utovariti još $\frac{1}{4}$ tone tereta.

21. Dovoljno je veliko, ostane još $5\frac{1}{2}$ m².

22. Prekopao je $\frac{13}{20}$ vrta, ostalo mu je još $\frac{7}{20}$.

23. Mora prijeći $\frac{8}{35}$ puta.

24. Preostalo je $213\frac{61}{200}$ m².

25. 213 litara vode.

26. Drugi je pokosio $\frac{7}{16}$ livade.

27.

-	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{5}{11}$
$2\frac{1}{2}$	1	$2\frac{1}{6}$	$\frac{3}{4}$	$2\frac{1}{22}$
$3\frac{3}{4}$	$2\frac{1}{4}$	$3\frac{5}{12}$	2	$3\frac{13}{44}$
$5\frac{2}{3}$	$4\frac{1}{6}$	$5\frac{1}{3}$	$3\frac{11}{12}$	$5\frac{7}{33}$
$6\frac{4}{7}$	$5\frac{1}{14}$	$6\frac{5}{21}$	$4\frac{23}{28}$	$6\frac{9}{77}$

28.

-	$2\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{3}$	$4\frac{3}{4}$	$2\frac{5}{11}$
$5\frac{1}{2}$	3	$3\frac{1}{6}$	$\frac{3}{4}$	$3\frac{1}{22}$
$4\frac{3}{4}$	$2\frac{1}{4}$	$2\frac{5}{12}$	0	$2\frac{13}{44}$
$8\frac{2}{3}$	$6\frac{1}{6}$	$6\frac{1}{3}$	$3\frac{11}{12}$	$6\frac{7}{33}$
$7\frac{4}{7}$	$5\frac{1}{14}$	$5\frac{5}{21}$	$2\frac{23}{28}$	$5\frac{9}{77}$

1.7. Svojstva oduzimanja razlomaka

1. a) 0; b) $\frac{5}{4}$; c) 0; d) $5\frac{1}{51}$.

2.

a	$12\frac{2}{3}$	$\frac{11}{13}$	$11\frac{2}{11}$	$\frac{17}{25}$
b	$12\frac{2}{3}$	$\frac{11}{13}$	0	0
a - b	0	0	$11\frac{2}{11}$	$\frac{17}{25}$

3. a) $8\frac{11}{18}$; b) $12\frac{59}{120}$; c) $10\frac{19}{40}$; d) $1\frac{4}{5}$.

4. $\frac{5}{7} - \frac{3}{9} = \frac{8}{21}$.

5. $\frac{1}{4}$ polja je zasadena cvijećem.

6. Još mora prijeći $\frac{5}{12}$ puta do vrha.

1.8. množenje razlomaka

1. 90 kutija čaja.

2. a) 10 sanduka; b) 27 vreće; c) 96 kutija.

3. 64 žena i 96 muškaraca.

4. Prvi dobiva 3000 m², drugi 1800 m², a treći 2400 m².

5. Plivača ima 285, a neplivača 75.

6. 12 km. 7. 8 paketa maslaca.

8.

.	2	3	4	5
$\frac{1}{2}$	1	$1\frac{1}{2}$	2	$2\frac{1}{2}$
$\frac{3}{4}$	$1\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{4}$	3	$3\frac{3}{4}$
$\frac{5}{3}$	$3\frac{1}{3}$	5	$6\frac{2}{3}$	$8\frac{1}{3}$
$\frac{11}{7}$	$3\frac{1}{7}$	$4\frac{5}{7}$	$6\frac{2}{7}$	$7\frac{6}{7}$

9. $5\frac{3}{7}$ $\frac{8}{9}$ 10. a) $1\frac{1}{4}$; b) $8\frac{2}{5}$;

$2\frac{4}{9}$ $\frac{15}{7}$ c) $9\frac{1}{3}$; d) $5\frac{5}{9}$.

$0\frac{1}{3}$ $\frac{5}{13}$ 11. a) $\frac{1}{3}$; b) $1\frac{2}{5}$;

$1\frac{5}{13}$ 0 c) 4; d) 10.

12. a) $1\frac{2}{5}$; b) $3\frac{7}{26}$; c) 44; d) $34\frac{2}{3}$.

13. a) $\frac{3}{8}$; b) $4\frac{10}{11}$; c) $2\frac{3}{4}$; d) 5.

14. a) $2\frac{1}{3}$; b) $8\frac{2}{11}$; c) 11; d) $10\frac{1}{2}$.

15. a) $12\frac{1}{2}$; b) 70; c) $33\frac{1}{3}$; d) $27\frac{7}{9}$.

16. a) $12\frac{3}{4}$; b) 7; c) 1; d) $9\frac{4}{9}$.

17. a) $5\frac{5}{4} = \frac{25}{4}$; b) $12\frac{3}{17} = \frac{36}{17}$

c) $\frac{6}{34} \cdot 6 = \frac{36}{34}$; d) $\frac{7}{9} \cdot 11 = \frac{77}{9}$

18. Riješila je 10 zadataka.

19. 5 kg. 20. 10 minuta.

21. 1 radnik bi trebao 6 puta više dana, za 21 dan.

22. $7\frac{1}{2}$ kg brašna, $1\frac{2}{3}$ l mlijeka, 5 kvasaca i $\frac{1}{2}$ l ulja.

23. a) 50 cm; b) 60 cm; c) 68 cm; d) 94 cm.

24. a) 250 g; b) 440 g; c) 375 g; d) 228 g.

25. a) 15 min; b) 45 min; c) 50 min; d) 46 min.

26. a) 6 mjeseci; b) 9 mjeseci; c) 10 mjeseci; d) 5 mjeseci.

27. a) 6 sati; b) 5 dana; c) 20 dana; d) 46 dana.

28. a) 5 dm; b) 6 dm; c) 33 dm; d) 34 dm.

29. a) 5 dl; b) 8 dl; c) 33 dl; d) 22 dl.

30. a) $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$; b) $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{6}{20}$; c) $\frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{12}$;

d) $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{10}$.

31.

	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{5}{11}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{5}{22}$
$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{15}{44}$
$\frac{5}{3}$	$2\frac{1}{2}$	$\frac{5}{9}$	$2\frac{11}{12}$	$\frac{25}{33}$
$\frac{11}{7}$	$2\frac{5}{14}$	$\frac{11}{21}$	$2\frac{3}{4}$	$\frac{5}{7}$

32. a) $\frac{5}{12}$; b) $\frac{14}{25}$; c) $1\frac{1}{33}$; d) $1\frac{23}{27}$; e) $\frac{8}{21}$;

f) $6\frac{4}{5}$; g) $\frac{7}{44}$; h) $3\frac{7}{16}$.

33. a) $\frac{1}{6}$; b) $\frac{1}{30}$; c) $11\frac{1}{3}$; d) $2\frac{7}{9}$; e) $\frac{10}{11}$;

f) $\frac{1}{12}$; g) $\frac{1}{10}$; h) $3\frac{8}{9}$.

34. a) $\frac{1}{6}$; b) $\frac{2}{3}$; c) $\frac{1}{3}$; d) $\frac{1}{36}$; e) $7\frac{1}{2}$;

f) $1\frac{1}{2}$; g) $\frac{1}{9}$; h) $1\frac{4}{5}$.

35. a) 2; b) 9; c) 84; d) 6.

36. a) $\frac{6}{35}$; b) $\frac{8}{35}$; c) $\frac{1}{45}$; d) $1\frac{1}{3}$; e) $\frac{1}{2}$;

f) 6; g) $1\frac{2}{3}$; h) 2.

37. a) $\frac{13}{20}$; b) $1\frac{5}{7}$; c) $17\frac{1}{51}$; d) $8\frac{11}{45}$.

38. a) $\frac{3}{10}$; b) $\frac{5}{16}$; c) $\frac{5}{36}$; d) $2\frac{1}{4}$.

39. a) $16\frac{9}{10}$; b) $7\frac{5}{7}$; c) $46\frac{5}{18}$; d) $27\frac{13}{27}$.

40.

	$2\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{3}$	$4\frac{3}{4}$	$4\frac{5}{11}$
$\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{4}$	$1\frac{1}{6}$	$2\frac{3}{8}$	$2\frac{5}{22}$

$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{3}{4}$	$3\frac{9}{16}$	$3\frac{15}{44}$
$\frac{5}{3}$	$4\frac{1}{6}$	$3\frac{8}{9}$	$7\frac{11}{12}$	$7\frac{14}{33}$
$\frac{11}{7}$	$3\frac{13}{14}$	$3\frac{2}{3}$	$7\frac{13}{28}$	7

41.

	$2\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{3}$	$4\frac{3}{4}$	$4\frac{5}{11}$
$5\frac{1}{2}$	$13\frac{3}{4}$	$12\frac{5}{6}$	$26\frac{1}{8}$	$24\frac{1}{2}$
$4\frac{3}{4}$	$11\frac{7}{8}$	$11\frac{1}{12}$	$22\frac{9}{16}$	$21\frac{7}{44}$
$4\frac{2}{3}$	$11\frac{2}{3}$	$10\frac{8}{9}$	$22\frac{1}{6}$	$20\frac{26}{33}$
$3\frac{4}{7}$	$8\frac{13}{14}$	$8\frac{1}{3}$	$16\frac{27}{28}$	$15\frac{10}{11}$

42. Prvi dan su prešli 10 km, drugi 8 km, a treći 22 km.

43. 45 m². 44. $117\frac{1}{2}$ m².

45. a) 10 km; b) 6 km; c) 7 km.

46. $\frac{12}{35}$ učenika igra nogomet, što je 300 učenika, a sportom se bavi 525 učenika.

47. 2700 metara.

48. 1680 kn za stanovanje, 1050 kn za hranu, preostane 1470 kn.

49. Čaja od šipka ima 50 kutija, zelenog ima 45 kutija, a voćnih ima 55 kutija.

50. Od jabuke 60 kom, od višnje 72 kom, a od naranče 108 kom.

51. O = $49\frac{1}{2}$ dm, P = $153\frac{9}{64}$ dm².

52. O = $18\frac{1}{4}$ dm, P = $19\frac{3}{32}$ dm².

53. O = $65\frac{1}{2}$ m. 54. O = 9 m, P = $5\frac{1}{16}$ m².

55. O = $15\frac{7}{9}$ m, P = $13\frac{17}{27}$ m². 56. O = 23 cm.

57. O = 3 dm, P = $\frac{9}{16}$ dm².

58. O = $56\frac{1}{2}$ dm, P = $198\frac{3}{4}$ dm². 59. O = $1\frac{16}{17}$ dm.

60. a) 5 dm; b) 6 dm; c) 29 dm; d) 34 dm.

61. a) 12 cm; b) 1875 mm; c) 468 sekundi; d) 15 mm.

62. a) 875 mm; b) 6 g; c) 1650 sek; d) 25 mm.

63. a) $\frac{1}{2}$ m = 5 dm; b) $\frac{1}{5}$ kn = 20 lipa;

c) $\frac{3}{4}$ l = 750 ml; d) $\frac{4}{5}$ h = 48 min;

e) $\frac{7}{8}$ m = 875 mm; f) $\frac{7}{10}$ m = 70 cm.

64. a) $2\frac{1}{2}$ m = 250 cm; b) $1\frac{1}{8}$ t = 1125 kg;

c) $3\frac{3}{8}$ m = 3375 mm; d) $5\frac{1}{3}$ h = 320 min.

65. a) $\frac{1}{8}$ t < 150 kg, jer je $\frac{1}{8}$ t = 125 kg;

b) $\frac{3}{5}$ km > 60 m, jer je $\frac{3}{5}$ km = 600 m;

c) $2\frac{1}{4}$ kn = 225 lipa, jer je $2\frac{1}{4}$ kn = 225 lipa;

d) $1\frac{1}{3}$ h < 90 min, jer je $1\frac{1}{3}$ h = 80 min;

e) $\frac{17}{20}$ l > 170 ml, jer je $\frac{17}{20}$ l = 850 ml;

f) $3\frac{4}{5}$ m > 345 cm, jer je $3\frac{4}{5}$ m = 380 cm.

1.9. svojstva množenja razlomaka

1. a) $\frac{2}{3}$; b) 0; c) $\frac{17}{8}$; d) 0; e) $\frac{1}{3}$; f) 0; g) $\frac{1}{9}$; h) 0.

2. a) $\frac{3}{2}$; b) $\frac{7}{4}$; c) $\frac{8}{17}$; d) $\frac{6}{5}$; e) 3; f) 15; g) 9; h) 6; i) 1;

j) $\frac{1}{2}$; k) $\frac{1}{15}$; l) nema; m) $\frac{4}{11}$; n) $\frac{5}{17}$; o) $\frac{9}{14}$; p) $\frac{6}{73}$.

3. a) 1; b) $\frac{3}{7}$; c) 0; d) 0.

4. a) $1\frac{1}{3}$; b) $\frac{6}{7}$; c) $\frac{4}{21}$; d) $\frac{4}{9}$.

5. a) $\frac{5}{18}$; b) $\frac{3}{4}$; c) $\frac{4}{9}$; d) $\frac{3}{7}$.

6. a) $\frac{1}{27}$; b) $\frac{1}{10}$; c) $\frac{45}{182}$; d) $1\frac{1}{4}$.

7. Platila je $637\frac{7}{16}$ kn. 8. 12 pizza.

1.10. dijeljenje razlomaka

1. $2\frac{1}{2}$; 5 2. a) 20; b) 30; c) 42; d) 90.

$1\frac{1}{2}$; $\frac{1}{8}$ 3. a) $\frac{1}{75}$; b) $\frac{7}{180}$;

$\frac{5}{6}$; 4 c) $\frac{1}{49}$; d) $\frac{5}{162}$.

4. a) $32\frac{2}{3}$; b) $\frac{3}{26}$; c) 44; d) $1\frac{1}{3}$.

5. a) $6\frac{2}{3}$; b) $3\frac{1}{2}$; c) $2\frac{7}{22}$; d) $1\frac{1}{6}$.

6. a) 15; b) $7\frac{1}{2}$; c) $\frac{3}{34}$; d) $\frac{1}{9}$.

7. a) $1\frac{1}{24}$; b) $\frac{2}{3}$; c) $\frac{1}{3}$; d) $\frac{1}{36}$.

8. a) 28; b) $\frac{3}{55}$; c) $2\frac{5}{6}$; d) $\frac{4}{17}$.

9. a) 3; b) $\frac{2}{9}$; c) $2\frac{2}{3}$; d) $\frac{1}{12}$.

10. a) $\frac{34}{69}$; b) $2\frac{22}{95}$; c) $2\frac{16}{57}$; d) $2\frac{16}{105}$.

11. $\frac{31}{100}$ m. 12. $\frac{16}{125}$ m. 13. $50\frac{7}{10}$ kg.

14. 60 dana. 15. $5\frac{1}{2}$ kn. 16. $3300\frac{100}{303}$ kn.

17. 14 boca. 18. 15 boca. 19. 11 odijela.

20. 555 vrećica.

21. 48 razmaka, 49 stabala s jedne strane, 98 stabala ukupno.

22. a)

:	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{5}{11}$
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{7}$	$1\frac{1}{10}$
$\frac{3}{4}$	$1\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{4}$	$\frac{3}{7}$	$1\frac{13}{20}$
$\frac{5}{3}$	$3\frac{1}{3}$	5	$\frac{20}{21}$	$3\frac{2}{3}$
$\frac{11}{7}$	$3\frac{1}{7}$	$4\frac{5}{7}$	$\frac{44}{49}$	$3\frac{16}{35}$

b)

:	2	3	4	5
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{10}$
$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{20}$
$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{3}$
$\frac{11}{7}$	$\frac{11}{14}$	$\frac{11}{21}$	$\frac{11}{28}$	$\frac{11}{35}$

c)

:	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{5}{11}$
5	$3\frac{1}{3}$	15	$2\frac{6}{7}$	11
4	$2\frac{2}{3}$	12	$2\frac{2}{7}$	$8\frac{4}{5}$

3	2	9	$1\frac{5}{7}$	$6\frac{3}{5}$
7	$4\frac{2}{3}$	21	4	$15\frac{2}{5}$

d)

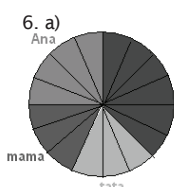
.	$2\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{3}$	$4\frac{3}{4}$	$4\frac{5}{11}$
$5\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{5}$	$2\frac{5}{14}$	$1\frac{3}{19}$	$1\frac{23}{98}$
$4\frac{3}{4}$	$1\frac{9}{10}$	$2\frac{1}{28}$	1	$1\frac{13}{196}$
$4\frac{2}{3}$	$1\frac{13}{15}$	2	$\frac{56}{57}$	$1\frac{1}{21}$
$3\frac{4}{7}$	1	$1\frac{3}{7}$	$\frac{100}{133}$	$\frac{275}{343}$

1.11. svojstva dijeljenja razlomaka

- a) 0; b) 0; c) 0; d) 0.
- a) $\frac{1}{15}$; b) $\frac{7}{30}$; c) $\frac{2}{7}$; d) $\frac{5}{9}$.
- a) $4\frac{2}{3}$; b) $1\frac{11}{15}$; c) $1\frac{5}{6}$; d) $\frac{3}{32}$.
- a) 1; b) 1; c) 1; d) 1. 5. a) 0; b) 0; c) 0; d) 0.
- a) 1; b) 1; c) 1; d) 1.

1.12. povezivanje računskih operacija

- a) $\frac{5}{64}$; b) 5; c) $\frac{2}{5}$; d) 14; e) 3; f) $3\frac{1}{3}$; g) $\frac{7}{15}$; h) $\frac{2}{3}$.
- a) $\frac{2}{3}$; b) 5; c) $\frac{3}{5}$; d) $4\frac{1}{2}$.
- a) $\frac{8}{15}$; b) $3\frac{1}{2}$; c) $1\frac{2}{5}$; d) $6\frac{1}{2}$.
- a) $14\frac{7}{15}$; b) 8; c) $1\frac{1}{3}$; d) $8\frac{1}{6}$; e) 2; f) 13; g) $\frac{11}{17}$; h) 16.
- a) $\frac{7}{20}$; b) $3\frac{1}{3}$; c) $\frac{5}{72}$; d) $11\frac{2}{3}$; e) $\frac{2}{15}$;
f) $16\frac{1}{2}$; g) $\frac{1}{2}$; h) $6\frac{1}{2}$; i) $\frac{1}{2}$; j) 6; k) $\frac{1}{5}$; l) 2.



- a) Ana; b) Luka; c) $\frac{3}{8}$;
d) $\frac{3}{16}$; e) Ana.
- 75 kutija čaja od kamilice, 90 kutija indijskog i 135 kutija voćnog čaja.
- Za kredit daje 1160 kn, za stanarinu 1740 kn, ostane mu 580 kn.
- Četvrti stan zauzima $\frac{13}{60}$ kata, za prvi stan plaća 7500 kn, za drugi 10000 kn, za treći 6000 kn i za četvrti 6500 kn.
- 3781 $\frac{4}{5}$ kn. 11. $26\frac{11}{20}$ kg.
- Zelene treba $9\frac{21}{32}$ l, a plave $3\frac{7}{32}$ l. Bojanje će stajati $2169\frac{7}{16}$ kn.
- $41\frac{183}{200}$ sati ili 41 sat, 54 min i 54 sek.
- Prvi obradi $17\frac{5}{12}$ m², drugi $14\frac{1}{6}$ m², a zajedno obrade $31\frac{7}{12}$ m² drva.
- Masa torte biti će oko $1\frac{9}{40}$ kg, a svake kriške $\frac{7}{40}$ kg.
- a) $\frac{1}{9}$; b) $2\frac{53}{1120}$; c) $6\frac{19}{75}$; d) $3\frac{1}{84}$; e) $\frac{9}{20}$;
f) $\frac{11}{54}$; g) $\frac{91}{270}$; h) $15\frac{13}{15}$.
- a) $3\frac{1}{21}$; b) $2\frac{101}{140}$; c) $8\frac{11}{18}$; d) $1\frac{11}{60}$; e) $15\frac{3}{25}$;

- f) $3\frac{31}{40}$; g) $\frac{25}{288}$; h) $3\frac{31}{60}$.
- a) $1\frac{8}{27}$; b) $2\frac{4}{7}$; c) $1\frac{19}{35}$.

1.13. ponavljanje gradiva

- Proširiti razlomak znači pomnožiti i brojnik i nazivnik istim brojem.
- Skratiti razlomak znači podijeliti i brojnik i nazivnik istim brojem.
- a). 4. a). 5. Za zbrajanje i oduzimanje.
- Za množenje i dijeljenje.
- Odlučiti se koji je veći.
- Svođenjem na zajednički nazivnik ili unakrsnim množenjem.
- Pravi razlomci se ne mogu pretvoriti u mješoviti broj (manji su od 1), nepravi razlomci se pretvaraju u mješoviti broj.
- Npr. $\frac{3}{3}$, $\frac{5}{5}$, $\frac{18}{18}$.
- Recipročnu vrijednost dobijemo kad u razlomku zamijenimo brojnik i nazivnik.
0. 14. 1.
- a)Zatvorenost, komutativnost, asocijativnost, neutralni element je nula;
b)neutralni element je 0;
c)Zatvorenost, komutativnost, asocijativnost, neutralni element je jedan;
d)zatvorenost, neutralni element je 1.
- a) jednak tom razlomku; b) 0.
- a) jednak tom razlomku; b) s 0 ne dijelimo.
- a) recipročne; b) jedan faktor mora biti 0.
- a) jednake; b) djeljenik mora biti 0.

Zadaci za ponavljanje:

- a) $\frac{1}{2} < \frac{2}{3}$; b) $\frac{8}{3} > \frac{9}{5}$; c) $\frac{3}{10} < \frac{5}{7}$; d) $\frac{5}{6} = \frac{10}{12}$.
- a) $\frac{9}{6} = \frac{3}{2}$; b) $\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$; c) $\frac{49}{70} = \frac{7}{10}$; d) $\frac{5}{30} = \frac{1}{6}$.
- a) $1\frac{3}{4}$; b) $2\frac{1}{12}$; c) $2\frac{2}{5}$; d) $1\frac{8}{9}$; e) $\frac{11}{12}$;
f) $3\frac{7}{12}$; g) $\frac{29}{42}$; h) $2\frac{28}{45}$.
- a) $1\frac{3}{4}$; b) 6; c) $18\frac{2}{3}$; d) $6\frac{1}{9}$; e) $2\frac{6}{7}$; f) $\frac{21}{22}$;
g) $\frac{1}{8}$; h) $\frac{7}{30}$; i) 0; j) 0; k) $\frac{11}{27}$; l) $\frac{117}{309}$.
- a) 250 m; b) 300 m; c) 150 m; najdalje je skočio u b), a najbliže u c).
- a) 750 g; b) 520 g. 7. a) 30 min; b) 10 min.
- a) $\frac{1}{6}$; b) 1; c) $\frac{5}{8}$; d) $\frac{1}{8}$.
- a) $\frac{6}{35}$; b) $\frac{8}{35}$; c) $\frac{1}{45}$; d) $\frac{1}{3}$.
- a) $\frac{7}{20}$; b) 5; c) $\frac{65}{72}$; d) $11\frac{2}{3}$.
- a) $5\frac{11}{15}$; b) $2\frac{1}{2}$; c) $5\frac{3}{55}$; d) $1\frac{4}{5}$.
- a) $65\frac{4}{5}$; b) 12; c) $11\frac{1}{3}$; d) 0.
- Zajedno su riješili $\frac{9}{10}$ testa, što nije cijeli test.
- $O = 16\frac{1}{6}$ cm. 15. $1\frac{12}{25}$ m.
- $O = 24\frac{1}{4}$ m, $P = 36\frac{21}{32}$ m². 17. 255 vrećica.
- $\frac{6}{17}$ ukupne količine im je ostalo.
- Prekopao je $\frac{14}{15}$ vrta, ostalo mu je $\frac{1}{15}$.
- $\frac{6}{35}$ igra nogomet, 322 uč. se bavi sportom, 138 uč. igra nogomet.
- Četvrti zauzima $\frac{1}{4}$ kata, prvi plaća 5000 kn, drugi 3750 kn, treći 3000 kn, a četvrti 3750 kn.

$$22. \frac{3}{5} + \frac{8}{5} = \frac{11}{5} = 2\frac{1}{5} \quad \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{7} = \frac{10}{7} = 1\frac{3}{7}$$

$$\frac{6}{9} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \quad \frac{7}{10} : \frac{4}{5} = \frac{17}{8} = 2\frac{1}{8}$$

Primjerak oglednog testa :

- a) b) 2. a) $\frac{7}{8}$; b) $2\frac{1}{6}$.
- a) $\frac{5}{6}$; b) $\frac{2}{3}$.
- a) $\frac{5}{8} < \frac{2}{3}$; b) $\frac{12}{5} > \frac{12}{7}$.
- a) $\frac{3}{16}$ m; b) 250 g; c) 50 min.
- Točni su: a), d) i e). 7. $\frac{1}{3} < \frac{2}{5} < \frac{7}{10} < \frac{13}{9}$.
- Za kredit daje 1065 kn, a za stanarinu 1420 kn. Ostane mu 1775 kn.
- a) $17\frac{18}{25}$; b) $3\frac{196}{333}$.

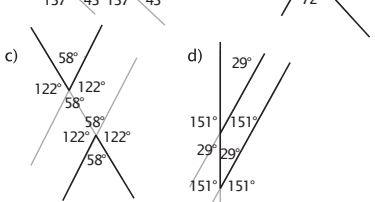
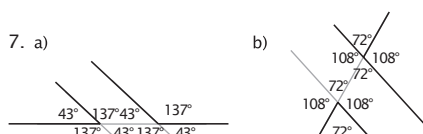
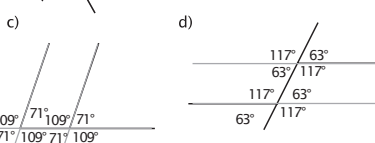
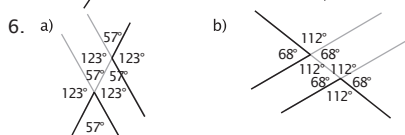
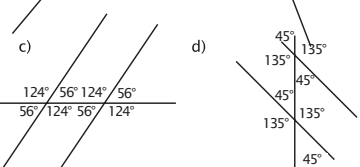
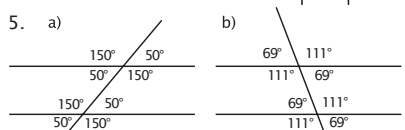
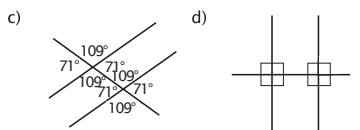
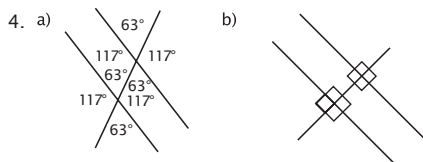
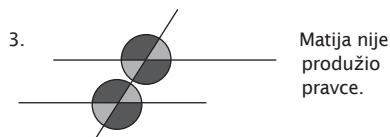
2. Trokut

2.0. Uvod

-
-
- To su sukuti, njihov zbroj je 180°.
- To su vršni kutovi, oni imaju međusobno jednake veličine.
- Kutove mjerimo kutomjerom, mjerna jedinica za kut je kutni stupanj.
- $\angle A = 45^\circ$, $\angle B = 40^\circ$, $\angle C = 8^\circ$, $\angle E = 135^\circ$
- $1^\circ = 60'$.

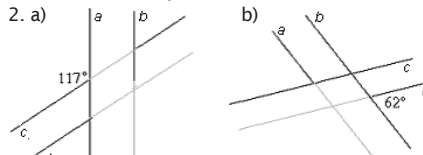
2.1. Kutovi uz presječnicu

-
-

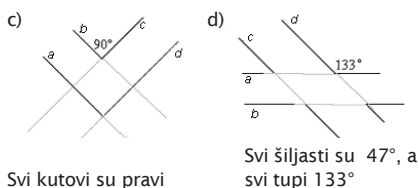


2.2. Kutovi s usporednim i okomitim kracima

- a) Svi šiljasti su 63° , a svi tupi kutovi su 117° ;
- Svi šiljasti su 79° , a svi tupi kutovi su 101° ;
- Svi šiljasti su 73° , a svi tupi kutovi su 107° ;
- Svi kutovi su pravi.



Svi šiljasti su 63° a svi tupi 117° Svi šiljasti su 62° a svi tupi 118°



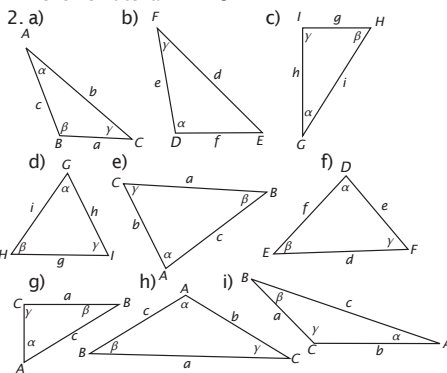
- Svi kutovi su pravi
- a) $a = 127^\circ$; b) $b = 43^\circ$; c) $a = 136^\circ$; d) $b = 112^\circ$;
 - a) $a = 132^\circ$; b) $b = 81^\circ$; c) $b = 61^\circ$; d) $a = 51^\circ$;
 - a) $b = 45^\circ$; b) $a = 9^\circ$; c) $a = 33^\circ$; d) $b = 109^\circ$.

2.3. Kutne minute

- $780'$, $3600'$, $8340'$, $20640'$, $21600'$.
- $721'$, $2684'$, $3239'$. 3. 2° , 10° , 90° , 50° .
- $1^\circ 1'$, $1^\circ 24'$, $2^\circ 2'$, $7^\circ 15'$, $8^\circ 24'$, $15^\circ 5'$.
- $13^\circ 3'$, $55^\circ 10'$, $46^\circ 28'$, 25° , $56^\circ 15'$.
- a) $142^\circ 15'$; b) $110^\circ 52'$; c) $51^\circ 3'$; d) $7^\circ 49'$.
- a) $34^\circ 57'$; b) $25^\circ 7'$; c) $114^\circ 59'$; d) $91^\circ 30'$;
- e) $354^\circ 53'$; f) $168^\circ 17'$.
- a) $12^\circ 55'$; b) $13^\circ 2'$; c) $152^\circ 47'$; d) $22^\circ 45'$;
- e) $0^\circ 55'$; f) $245^\circ 12'$.
- a) $181^\circ 12'$; b) $39^\circ 56'$; c) $199^\circ 55'$; d) $59^\circ 10'$;
- e) $228^\circ 59'$; f) $21^\circ 36'$.
- $262^\circ 19'$. 11. $113^\circ 32'$.
- a) $118^\circ 7'$; b) $28^\circ 55'$; c) $195^\circ 13'$.

2.4. Trokut

- Trokut: $\triangle EFG$
Vrhovi trokuta: E, F, G
Stranice trokuta: $\overline{EF}, \overline{FG}, \overline{GE}$
Kutovi trokuta: $\sphericalangle E, \sphericalangle F, \sphericalangle G$
Duljine stranica: e, f, g
Veličine kutova: α, β, γ



- $O = 17.2 \text{ cm}$, $O = 15.1 \text{ cm}$;
- a) $O = 20 \text{ cm}$; b) $O = 19.1 \text{ dm}$; c) $O = 3.1 \text{ m}$.
- a) $O = 205 \text{ cm}$; b) $O = 216 \text{ dm}$; c) $O = 343 \text{ cm}$.
- Trebat će 12 m žice, i 12 stupova.
- a) $O = 15 \text{ cm}$; b) $O = 18 \text{ dm}$; c) $O = 4.5 \text{ m}$.
- Trebat će mu 15 m žice.
- $a = 6 \text{ cm}$. 11. Bit će duga 11.3 m .
- Nema dovoljno trake.
- a) $O = 23 \text{ cm}$; b) $O = 16.6 \text{ dm}$; c) $O = 29 \text{ dm}$.
- $O = 158 \text{ cm}$. 15. $O = 86 \text{ dm}$.
- $O = 55 \text{ cm}$. 17. $O = 400 \text{ cm}$.
- Treba mu 83.6 m žice.
- a) $b = 10 \text{ cm}$; b) $O = 32 \text{ cm}$.
- $\triangle MNO$ je jednakokraničan, $\triangle GHI$ je raznostraničan, $\triangle ABC$ je raznostraničan, $\triangle JKL$ je jednakokračan, $\triangle DEF$ je raznostraničan.
- $\triangle MNO$ je pravokutan, $\triangle GHI$ je tupokutan, $\triangle ABC$ je pravokutan, $\triangle DEF$ je šiljastokutan.
- Svijetloplavi $\triangle ABC$ je pravokutan raznostraničan, ružičasti $\triangle MNO$ je

šiljastokutan jednakokraničan, crveni $\triangle GHI$ je tupokutan raznostraničan, ljubičasti $\triangle ABC$ je šiljastokutan jednakokraničan, zeleni $\triangle ABC$ je tupokutan raznostraničan, plavi $\triangle JKL$ je šiljastokutan jednakokraničan, narančasti $\triangle ABC$ je tupokutan raznostraničan, sivozeleni $\triangle ABC$ je pravokutan jednakokračan, tamnoružičasti $\triangle TUV$ je šiljastokutan jednakokraničan, žuti $\triangle DEF$ je tupokutan raznostraničan, smeđi $\triangle PRS$ je pravokutan jednakokračan, maslinastozeleni $\triangle XYZ$ je pravokutan jednakokraničan.

- a) $54^\circ < 63^\circ$, $f < e = d$; b) $4.3 < 5 < 6.5$, $a < g < b$;
 - c) $4.4 < 5.5 < 6$, $g < b < a$;
 - $24^\circ < 59^\circ < 97^\circ$, $a < c < b$.
24. Hipotenuza.
25. Stranice b i c su jednake jer se nalaze nasuprot jednakim kutovima.

2.5. Zbroj kutova u trokutu

- a) $a = 87^\circ$; b) $a = 52^\circ$.
- a) $b = 80^\circ$; b) $b = 57^\circ$.
- $a = 53^\circ$, $b = 82^\circ$, $g = 45^\circ$.

4.

α	β	γ
25°	123°	32°
51°	48°	81°
67°	12°	101°
40°	50°	90°
$101^\circ 12'$	$45^\circ 24'$	$33^\circ 24'$
$104^\circ 31'$	$45^\circ 55'$	$29^\circ 34'$
$66^\circ 42'$	$37^\circ 11'$	$76^\circ 7'$

5. $b = 36^\circ$, $a = 50^\circ$, $a = 46^\circ$.

6.

α	β	γ
25°	65°	90°
42°	48°	90°
67°	23°	90°
40°	50°	90°
$34^\circ 56'$	$55^\circ 4'$	90°
$33^\circ 48'$	$56^\circ 12'$	90°

- a) $a = 114^\circ$; b) $a = 82^\circ$.
- a) $b = 68^\circ$; b) $b = 28^\circ$.
- a) 90° ; b) 60° ; c) 118° ; d) 36° .
- a) 18° ; b) 60° ; c) $24^\circ 30'$; d) $52^\circ 30'$.

11.

α	β
25°	$77^\circ 30'$
84°	48°
117°	$31^\circ 30'$
80°	50°
$101^\circ 23'$	$39^\circ 18' 30''$
$47^\circ 28'$	$66^\circ 16'$

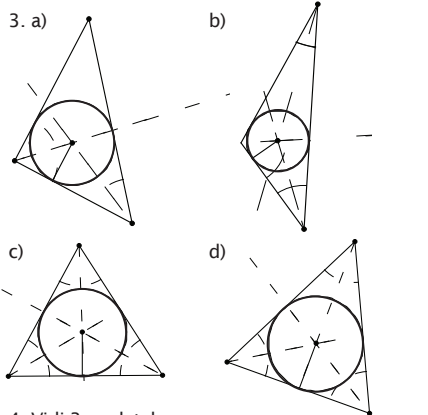
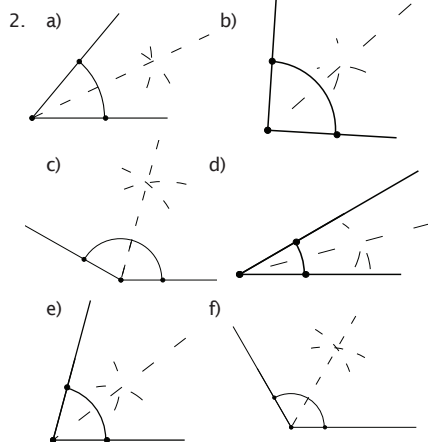
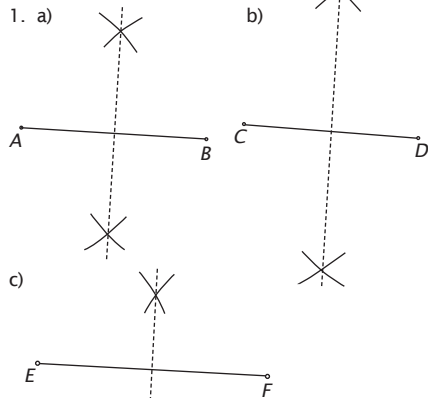
- a) $a = 44^\circ$; b) $g = 63^\circ$; c) 60° ; d) $a = 45^\circ$;
- e) $a = 60^\circ$; f) $b = 73^\circ$.
- $a = b = g = d = 40^\circ$.
- $a = 30^\circ$, $b = 120^\circ$, $g = 60^\circ$, $d = 60^\circ$, $e = 60^\circ$, $f = 60^\circ$, $c = 60^\circ$.
- $d = 65^\circ$, $c = 130^\circ$, $l = 50^\circ$.
- a) Ana je unutar kuće, a Luka van kuće; b) a je unutar, a a' je van kuće; c) oni su sukuti; d) $a = a' = 90^\circ$; e) zbroj im je 180° .
- a) $a' = 138^\circ$, $b' = 129^\circ$, $g' = 93^\circ$;
- a) $a' = 118^\circ$, $b' = 101^\circ$, $g' = 141^\circ$.
- a) $a = 98^\circ$, $b = 29^\circ$, $g = 53^\circ$;
- a) $a = 58^\circ$, $b = 79^\circ$, $g = 43^\circ$.

19.

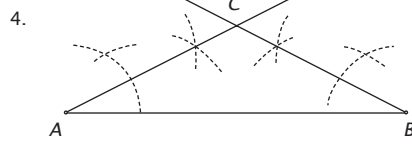
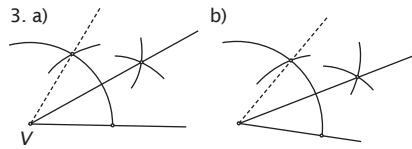
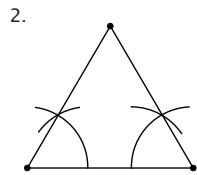
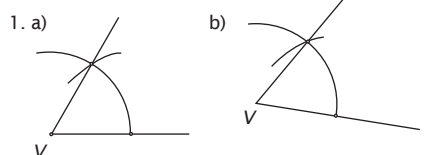
α	β	γ	α'	β'	γ'
35°	45°	100°	145°	135°	80°
55°	97°	28°	125°	83°	152°
11°	103°	66°	169°	77°	114°
$45^\circ 35'$	$23^\circ 12'$	$111^\circ 13'$	$134^\circ 25'$	$22^\circ 23'$	$68^\circ 47'$
$34^\circ 27'$	$121^\circ 44'$	$23^\circ 49'$	$145^\circ 33'$	$58^\circ 16'$	$56^\circ 11'$
$35^\circ 22'$	$64^\circ 19'$	$80^\circ 19'$	$44^\circ 38'$	$115^\circ 41'$	$99^\circ 41'$

20. a) $g = 92^\circ, a = 49^\circ$; b) $a = 42^\circ, g = 77^\circ$;
 c) $a' = 136^\circ, b = 92^\circ, g = 44^\circ$.
 21. a) $a = 42^\circ, b = 78^\circ, b' = 102^\circ$;
 b) $b = 80^\circ, b' = 100^\circ, g_1 = 45^\circ$.
 22. $b = 45^\circ, g = 45^\circ, b' = 135^\circ, a_1 = g_1 = 22^\circ 30'$.
 23. $a = 90^\circ$.

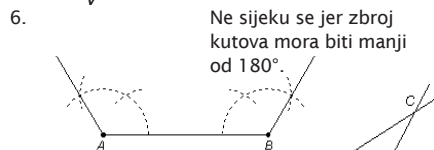
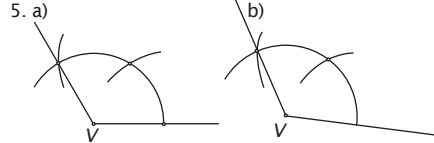
2.6. Simetrala kuta



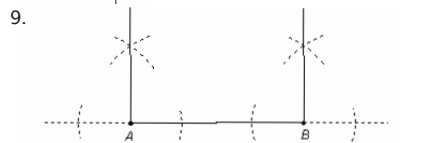
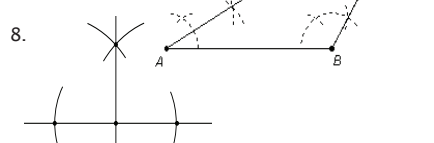
2.7. Konstrukcije nekih kutova



Trokut je jednakokrani jer ima dva kuta jednakih veličina.

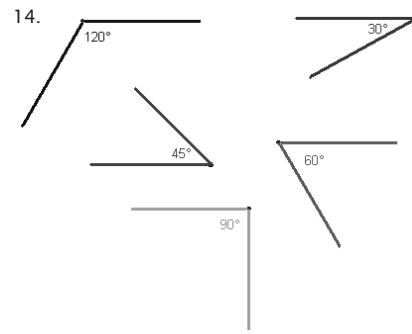
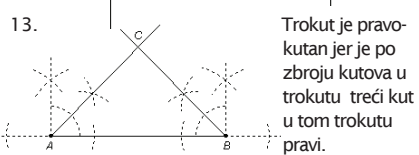
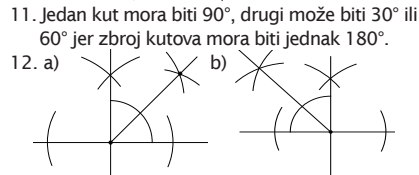
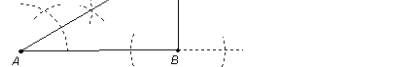


7. Trokut je tupokutan jer ima jedan tupi kut.

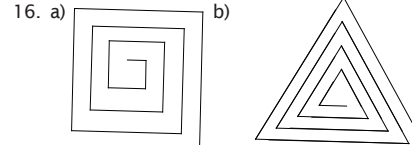


Ne sijeku se jer zbroj kutova mora biti manji od 180° .

10. Pravi trokut jer je jedan kut pravi.

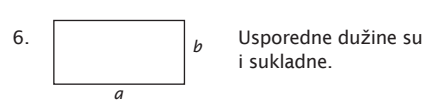
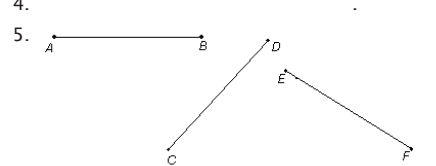
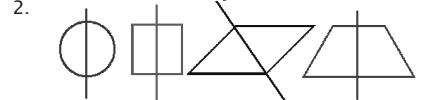
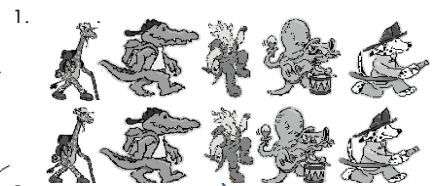


15. Kut je 15° jer je puni kut 360° .

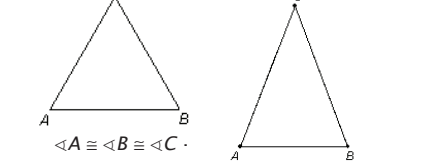


17. a) Trojke kutova koje tvore trokut: $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$; $30^\circ, 30^\circ, 120^\circ$; $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$; $60^\circ, 60^\circ, 60^\circ$;
 b) Parovi kutova koji ne tvore trokut: $90^\circ, 120^\circ; 90^\circ, 90^\circ; 120^\circ, 120^\circ; 60^\circ, 90^\circ$.

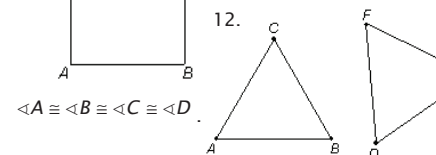
2.8. Sukladnost trokuta

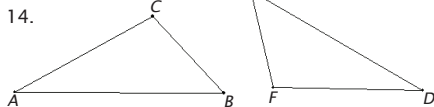
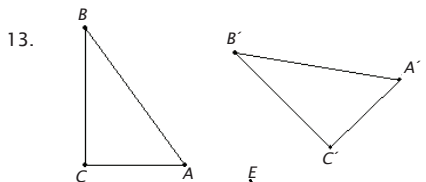


7. $\angle C \cong \angle H, \angle F \cong \angle I, \angle B \cong \angle J, \angle E \cong \angle G$.



10. $\triangle ABC \cong \triangle OMN, \triangle PRS \cong \triangle JKL, \triangle FDE \cong \triangle HIG$





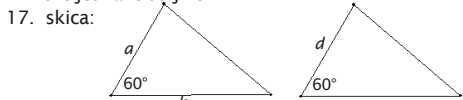
Sukladni su jer su sukladni $\sphericalangle A \cong \sphericalangle D$, $\sphericalangle B \cong \sphericalangle E$, $\sphericalangle C \cong \sphericalangle F$;

$\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$, $\overline{CA} \cong \overline{FD}$.

15. a) $\alpha = 104^\circ$, $a = 4\text{cm}$, $b = 3\text{cm}$, $c = 2\text{cm}$;

b) $\alpha = 115^\circ$, $b = 38^\circ$, $\gamma = 27^\circ$, $a = 7\text{cm}$, $b = 6\text{cm}$, $c = 4\text{cm}$.

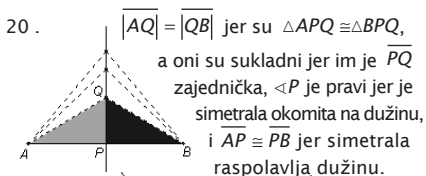
16. Dijagonala im je zajednička, a druge dvije stranice su sukladne jer su stranice kvadrata sve jednake duljine.



Ta dva trokuta su sukladna jer je $\sphericalangle 60^\circ \cong \sphericalangle 60^\circ$, $d \cong a$, $e \cong b$.

18. Nasuprotne stranice pravokutnika su sukladne, a kut među njima je pravi, pa su i trokuti sukladni.

19. Sukladni su jer su im sukladni i kutovi uz osnovicu zbog činjenice da je zbroj kutova u svakom trokutu 180° .

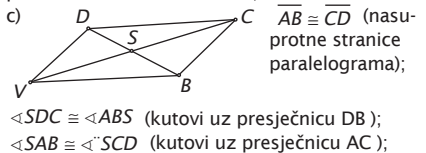


20. $|AQ| = |QB|$ jer su $\triangle APQ \cong \triangle BPQ$, a oni su sukladni jer im je \overline{PQ} zajednička, $\sphericalangle P$ je pravi jer je simetrala okomita na dužinu, i $\overline{AP} \cong \overline{PB}$ jer simetrala raspolavlja dužinu.

21. skica: Sukladni su, $\sphericalangle 45^\circ \cong \sphericalangle 45^\circ$, $a \cong d$, $\sphericalangle 60^\circ \cong \sphericalangle 60^\circ$.

22. Dijeli ga na dva sukladna pravokutna trokuta jer: kutovi uz osnovicu su sukladni, krakovi su sukladni, a kutovi između okomice i krakova su također sukladni zbog činjenice da je zbroj šiljastih kutova u pravokutnom trokutu 90° .

23. a) Nasuprotni kutovi su kutovi s paralelnim kracima i oba su ili šiljasta ili tupa pa su jednakih veličina, prema tome i sukladni; b)Dijagonala paralelograma dijeli ga na dva sukladna trokuta jer su im paralelne stranice i jednake duljine, znači i sukladne, a kutovi među njima su nasuprotni, dakle i sukladni, po poučku stranica-kut-stranica;



c) $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ (nasuprotne stranice paralelograma); $\sphericalangle SDC \cong \sphericalangle ABS$ (kutovi uz presječnicu DB); $\sphericalangle SAB \cong \sphericalangle SCD$ (kutovi uz presječnicu AC); po poučku kut-stranica-kut trokuti $\triangle ABS$ i $\triangle CDS$ su sukladni pa je $|SA| = |SC|$ i $|DS| = |SB|$, tj. dijagonale se raspolavljaju.

24. $\sphericalangle A \cong \sphericalangle B \cong \sphericalangle C (= 60^\circ)$; $\overline{AD} \cong \overline{BE} \cong \overline{CF}$ (pola stranice jednakokraničnog trokuta); $\overline{FA} \cong \overline{DB} \cong \overline{EC}$ (pola stranice jednakokraničnog

trokuta); $\triangle ADF \cong \triangle BED \cong \triangle CFE$ po poučku S-K-S, iz te sukladnosti slijedi da su stranice trokuta DEF međusobno jednake i jednake polovici stranice jednakokraničnog trokuta te sukladne sa stranicama svakog od "malih" trokuta, pa je po poučku S-S-S i taj trokut sukladan s ostalih tri, tj. svi "mali" trokuti međusobno su sukladni.

2.9. Osnovne konstrukcije trokuta

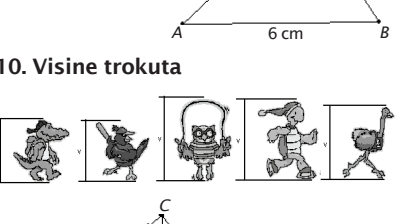
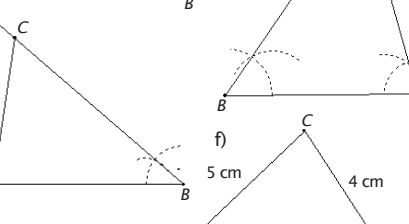
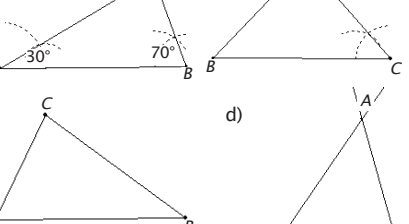
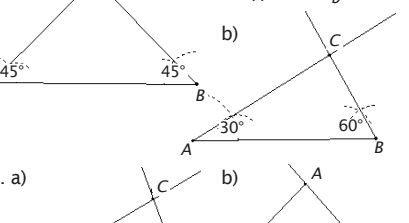
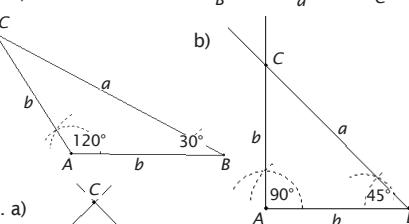
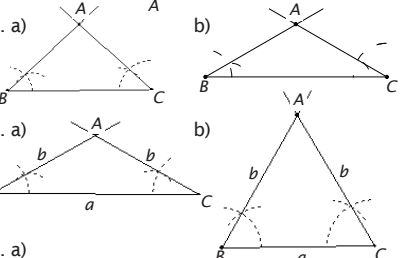
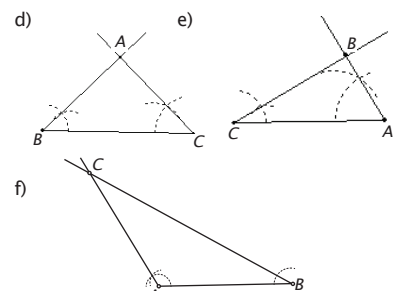
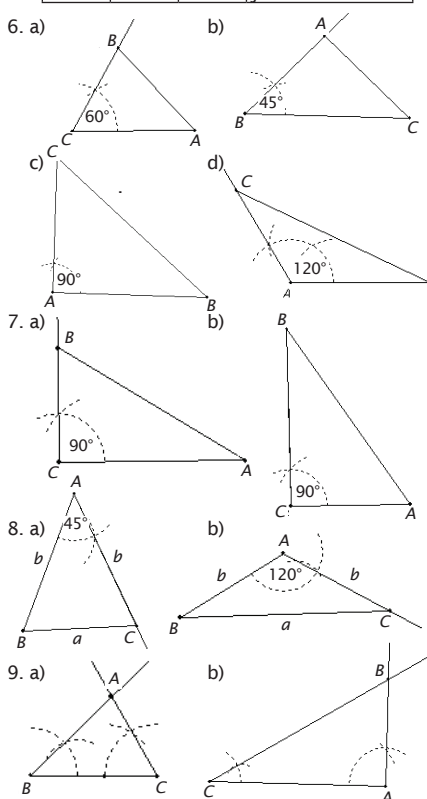
1. a) b) c) d)

2. a) b) c)

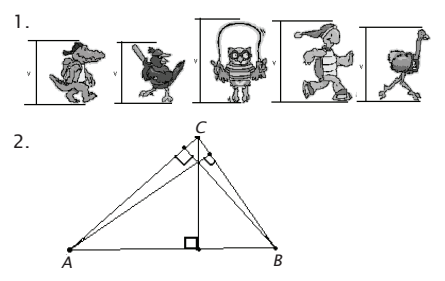
3. a) b) c)

4. a) Može; b) Ne može jer je $3+4=7$; c) Ne može jer je $4+4 < 10$; d) Može.

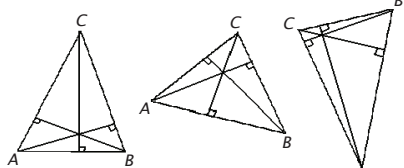
a	b	c	Vrsta trokuta
2 cm	5 cm	5 cm	jednakokraničan
3 cm	4 cm	5 cm	raznostraničan
4 cm	4 cm	4 cm	jednakokraničan



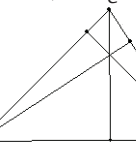
2.10. Visine trokuta



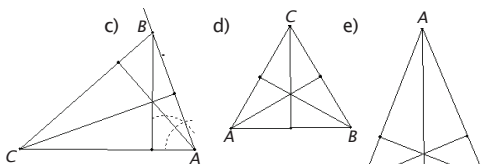
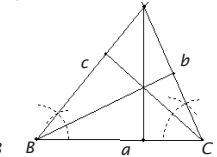
3.



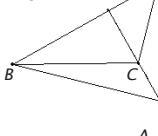
4. a)



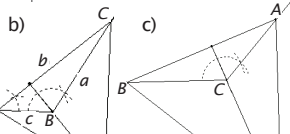
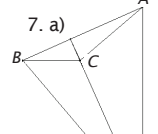
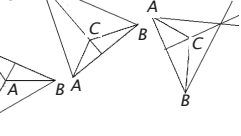
b)



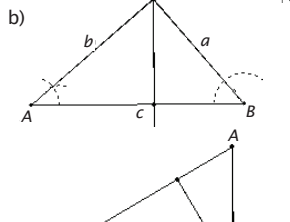
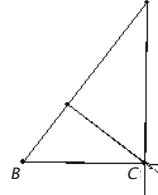
5.



6.



8. a)



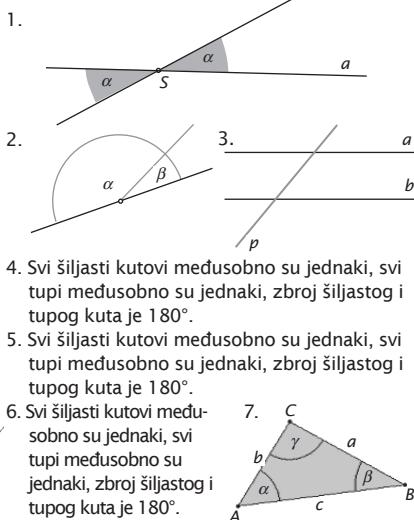
9. Dijeli ga na dva sukladna pravokutna trokuta jer: kutovi uz osnovicu su sukladni, krakovi su sukladni, a kutovi između okomice i krakova su također sukladni zbog činjenice da je zbroj šiljastih kutova u pravokutnom trokutu 90° .

2.11. Površina trokuta

- a) $P = 5 \text{ cm}^2$; b) $P = 24 \text{ dm}^2$; c) $P = 15 \text{ cm}^2$; d) $P = 7 \text{ cm}^2$.
- a) $P = 5 \text{ cm}^2$; b) $P = 70 \text{ dm}^2$; c) $P = 21 \text{ m}^2$; d) $P = 9.8 \text{ cm}^2$.
- a) $P = 100 \text{ cm}^2$; b) $P = 70 \text{ cm}^2$; c) $P = 18750 \text{ cm}^2$; d) $P = 1430 \text{ dm}^2$.
- a) $P = 9 \text{ cm}^2$; b) $P = 13.6 \text{ cm}^2$; c) $P = 3.15 \text{ cm}^2$; d) $P = 6 \text{ cm}^2$.
- Za površinu od 45 m^2 potrebno je 1125 g sjemena trave.
- Lima treba 48.96 m^2 , što će stajati 979.2 kn.
- Zato jer imaju jednake visine i zajedničku pripadnu stranicu.
- a) I površina će se utrostručiti; b) površina će se udvostručiti; c) površina će se povećati 6 puta.

- a) $b = 10 \text{ cm}$; b) $a = 25 \text{ dm}$; c) $V_a = 16.8 \text{ m}$; d) $V_b = 7.4 \text{ dm}$; e) $V_a = 12.4 \text{ m}$; f) $V_b = 7 \text{ dm}$.
- a) $V_a = 10 \text{ cm}$; b) $V_b = 11 \text{ dm}$; c) $V_c = 12.8 \text{ m}$; d) $V_a = 12.8 \text{ cm}$; e) $V_b = 18.8 \text{ dm}$; f) $V_c = 11 \text{ m}$.
- a) $a = 40 \text{ cm}$; b) $b = 44 \text{ dm}$; c) $c = 14 \text{ m}$; d) $a = 8.8 \text{ cm}$; e) $b = 19 \text{ dm}$; f) $c = 20 \text{ dm}$.
- $P = 6 \text{ m}^2$, $c = 5 \text{ m}$. 13. $P = 7.7 \text{ dm}^2$, $v_a = 2.2 \text{ dm}$.
- $P = 24 \text{ m}^2$, $c \approx 17.14 \text{ m}$.
- $P = 85.5 \text{ cm}^2$, $v_b \approx 12.21 \text{ cm}$, $v_c = 14.25 \text{ cm}$.

2.12. Ponavljanje gradiva



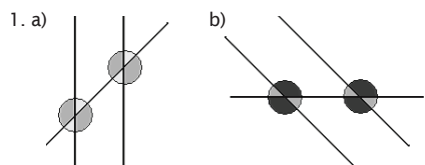
- Svi šiljasti kutovi međusobno su jednaki, svi tupi međusobno su jednaki, zbroj šiljastog i tupog kuta je 180° .
- Svi šiljasti kutovi međusobno su jednaki, svi tupi međusobno su jednaki, zbroj šiljastog i tupog kuta je 180° .
- Svi šiljasti kutovi međusobno su jednaki, svi tupi međusobno su jednaki, zbroj šiljastog i tupog kuta je 180° .
- a) Jednakostraničan trokut je trokut koji ima sve stranice jednakih duljina. Jednakokrtačan trokut je trokut koji ima dvije stranice jednakih duljina. Te dvije stranice nazivaju se krakovi, a preostala stranica trokuta naziva se osnovicom. Trokut kojemu su sve stranice različitih duljina nazivamo raznostraničan trokut; b) Trokut koji ima pravi kut naziva se pravokutan trokut. Stranice trokuta koje zatvaraju pravi kut nazivaju se katete. Stranica nasuprot pravom kutu naziva se hipotenuza. Trokut kojem su svi kutovi šiljasti naziva se šiljastokutan trokut. Trokut koji ima tupi kut naziva se tupokutan trokut.
- Opseg trokuta je zbroj duljina svih njegovih stranica. Opseg raznostraničnog trokuta, $o = a + b + c$. Opseg jednakostraničnog trokuta, $o = 3 \cdot a$. Opseg jednakokrtačnog trokuta $o = a + 2 \cdot b$.
- Hipotenuza i katete. 11. Osnovica i kraci.
- Zbroj unutarnjih kutova trokuta je 180° .
- Svi jednaki i iznose 60° .
- Kutovi uz osnovicu su jednaki.
- Kut nasuprot hipotenuzi je pravi, ostali su šiljasti.
- Nasuprot dulje stranice nalazi se veći kut.
- Zbroj dviju stranica mora biti veći od treće.
- Npr. 1 cm, 5 cm i 7 cm.
- Simetrala dužine je pravac koji je okomit na tu dužinu i prolazi njenim polovištem.
- Simetrala kuta je pravac koji prolazi vrhom kuta i dijeli ga na dva jednaka dijela.

- Sukladni likovi imaju isti oblik i veličinu.
- Dužine su sukladne ako imaju jednake duljine.
- Kutovi su sukladni ako imaju jednake veličine.
1. Poučak o sukladnosti trokuta: stranica - stranica - stranica (SSS): Dva su

trokuta sukladna ako su im sve tri odgovarajuće stranice sukladne; 2. Poučak o sukladnosti trokuta: stranica - kut - stranica (SKS): Dva su trokuta sukladna ako su im sukladne dvije odgovarajuće stranice i kut između njih; 3. Poučak o sukladnosti trokuta: kut - stranica - kut (KSK): Dva su trokuta sukladna ako im je sukladna jedna odgovarajuća stranica i ako su im sukladna dva odgovarajuća kuta koji leže na toj stranici.

- 3 elementa.
- Osnovne konstrukcije trokuta dijele se u tri grupe, ovisno zadanim elementima trokuta: - zadane sve tri stranice, - zadane dvije stranice i kut između njih, - zadana jedna stranica i dva kuta uz nju.
- Visina trokuta je dužina povučena okomito na stranicu iz nasuprotnog vrha.
- Kod tupokutnog trokuta dvije visine se nalaze izvan trokuta. Dvije visine pravokutnog trokuta poklapaju se s njegovim katetama. U šiljastokutnom trokutu sve tri visine nalaze se unutar trokuta.
- Površina trokuta jednaka je polovini umnoška duljine jedne stranice i visine na tu stranicu. $P = \frac{a \cdot v_a}{2}$, $P = \frac{b \cdot v_b}{2}$ ili $P = \frac{c \cdot v_c}{2}$.
- a) Površina pravokutnog trokuta: $P = (a \cdot b) : 2$, $P = \frac{a \cdot b}{2}$ ili $P = \frac{c \cdot v_c}{2}$; b) Površina raznostraničnog trokuta: $P = \frac{a \cdot v_a}{2}$, $P = \frac{b \cdot v_b}{2}$ ili $P = \frac{c \cdot v_c}{2}$.

Zadaci za ponavljanje:



- a) b)
- a) Svi šiljasti su 50° , svi tupi su 130° ; b) Svi šiljasti su 45° , svi tupi su 135° .
- a) $a = 47^\circ$; b) $a = 79^\circ$; c) $b = 113^\circ$.
- $O = 20 \text{ cm}$.
- a) $O = 15 \text{ cm}$; b) $O = 18 \text{ cm}$.
- a) $O = 23 \text{ cm}$; b) $O = 16.6 \text{ dm}$.

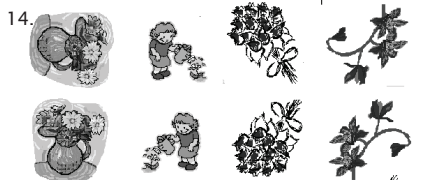
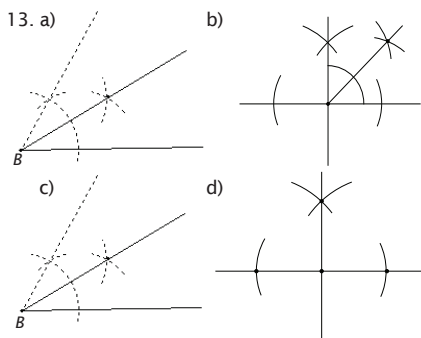
7.	Raznostraničan	Jednakostraničan	Jednakokrtačan
Šiljastokutan	3	2	6
Pravokutan	5	4	Ne može biti
Tupokutan	1	7	Ne može biti

8.	α	β	γ
	25°	123°	32°
	51°	48°	81°
	67°	$11^\circ 6'$	$101^\circ 54'$

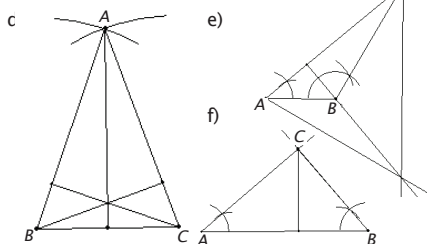
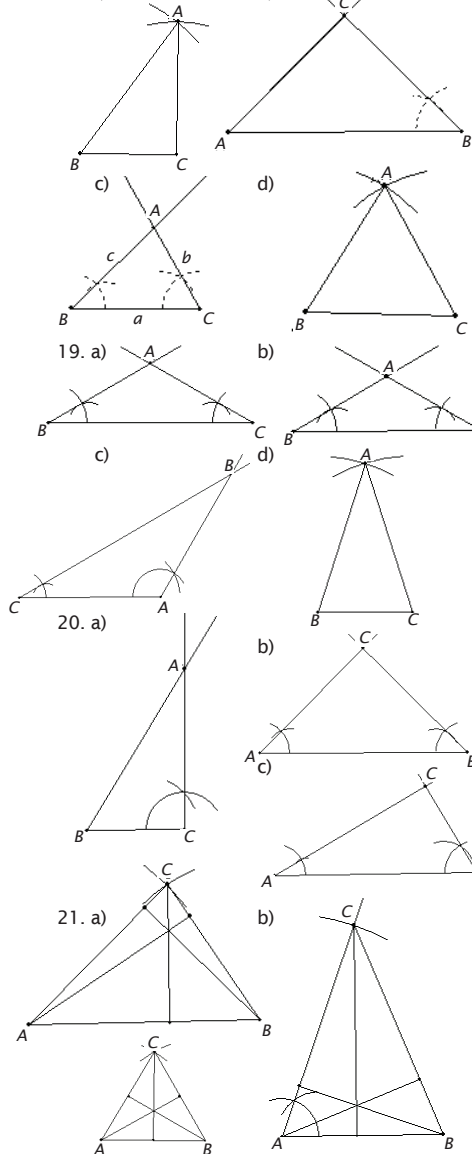
9.	α	β	γ
	25°	65°	90°
	$41^\circ 38'$	$48^\circ 22'$	90°

10.	α	β
	25°	$77^\circ 30'$
	$83^\circ 26'$	$48^\circ 17'$

- a) $a = 50^\circ, b = 58^\circ$; b) $a = 90^\circ, b = 60^\circ$; c) $a = 45^\circ, b = 135^\circ$.
- a) b) c)



15. $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, $\overline{KL} \cong \overline{EF}$, $\overline{OP} \cong \overline{GH}$, $\overline{IJ} \cong \overline{MN}$.
 16. $\sphericalangle A \cong \sphericalangle B$, $\sphericalangle C \cong \sphericalangle G$, $\sphericalangle E \cong \sphericalangle M$, $\sphericalangle D \cong \sphericalangle L$, $\sphericalangle H \cong \sphericalangle F$.
 17. $\triangle PNO \cong \triangle FED$, $\triangle TRS \cong \triangle ABC$, $\triangle MGH \cong \triangle JLK$.
 18. a)



22. a) $P = 96 \text{ dm}^2$; b) $P = 28500 \text{ cm}^2$;
 c) $P = 3040 \text{ dm}^2$.
 23. Plave boje treba 126 dl, ljubičaste 126 dl i zelene 31.5 dl. Bojanje tog zida stajat će 787.50 kn.

a	b	c	v_c	P
3 cm	4 cm	5 cm	2.4 cm	6 cm^2
7 dm	24 dm	25 dm	6.72 dm	84 dm^2
12 m	16 m	20 m	9.6 m	96 m^2

stranica	visina	površina
a = 25 cm	$v_a = 10 \text{ cm}$	$P = 125 \text{ cm}^2$
b = 44 dm	$v_b = 33 \text{ dm}$	$P = 726 \text{ dm}^2$
b = 50 dm	$v_b = 11 \text{ dm}$	$P = 275 \text{ dm}^2$
c = 14 m	$v_c = 8 \text{ m}$	$P = 56 \text{ m}^2$

26. $P = 47.6 \text{ cm}^2$, $v_c = 13.6 \text{ cm}$.
 27. $P_1 = 7.5 \cdot 7.5 = 56.25 \text{ mm}^2$
 $P_2 = \frac{7.5 \cdot 7.5}{2} = 28.125 \text{ mm}^2$
 $P_3 = 15 \cdot 15 = 225 \text{ mm}^2$
 $P_4 = \frac{15 \cdot 7.5}{2} = 56.25 \text{ mm}^2$

- a) $P = 4 \cdot P_1 + 4 \cdot P_4 = 450 \text{ mm}^2$;
 b) $P = P_3 + 8 \cdot P_2 = 450 \text{ mm}^2$;
 c) $P = 30 \cdot 30 = 900 \text{ mm}^2$.

Primjerak oglednog testa:

1. $P = 25 \text{ cm}^2$.
 2. $a = 75^\circ$, $b = 46^\circ$.
 3. $P = 9 \text{ cm}^2$
 4. $\gamma = 15^\circ$

a = 45 cm	$v_a = 40 \text{ cm}$	$P = 900 \text{ cm}^2$
b = 22 dm	$v_b = 39 \text{ dm}$	$P = 429 \text{ dm}^2$
c = 4 m	$v_c = 3.9 \text{ m}$	$P = 7.8 \text{ m}^2$

5. $\gamma = 15^\circ$
 6. o = 23 dm; $v_c = 2.5 \text{ dm}$.
 9. a) $P = 64 \text{ cm}^2$;
 b) $P = 48 \text{ cm}^2$;
 c) $P = 32 \text{ cm}^2$;
 d) $P = 144 \text{ cm}^2$.

3. Cijeli brojevi

3.0. Uvod

- \mathbb{N} .
- Skup \mathbb{N} ne sadrži nulu, a \mathbb{N}_0 sadrži.
- Najmanji prirodni broj je 1, najvećeg nema.
- "je veći", "je manji", "je jednak".
- Pribojcnici.
- Umanjenik i umanjitelj.
- Faktori.
- Djeljenik i djeljitelj.
- a) 6; b) 0; c) 0; d) ne može.
- a) 4340; b) 2.
- $\frac{2}{3}$, nije iz \mathbb{N} .
- 3854.

13. Komutativnost, zatvorenost, asocijativnost i postojanje neutralnog elementa.
 14. 144. 15. Ne može u \mathbb{N} . 16. Ne vrijedi.

3.1. Skup cijelih brojeva

- a) 17°C ; b) -3°C ; c) -300 kn .
- a) Pozitivnim brojevima; b) negativnim brojevima.
- Visina vode u koritu rijeke, pozitivan vodostaj je visina rijeke iznad normalne razine, a negativan je visina ispod normalne razine.
- a) -210 ; b) $+199$. 5. 0, 5, 7, 789, ...
- $-3, -6, -78, \dots$ 7. -273°C .

Ime	zarada u kunama	dugovanje u kunama	ima novaca u kunama
Ana	+ 50	- 0	50
Maja	+ 30	- 30	0
Luka	+ 30	- 50	- 20
Marko	+ 20	- 47	- 27
Petar	+ 40	- 10	30
Ante	+ 10	- 56	- 46
Lucija	+ 79	- 80	- 1

8. a) Najtoplije je u Dubrovniku, a najhladnije u Varaždinu; b) temperature Varaždina i Zagreba nisu prirodni brojevi; c) ispod nule su u Varaždinu i Zagrebu, a iznad nule u Splitu, Korčuli i Dubrovniku; d) za 6 stupnjeva; e) za 6 stupnjeva; f) za 12 stupnjeva.
 10. a) Ne; b) ne; c) u Zagrebu je -83 , a u Slavskom Šamcu 7.

3.2. Cijeli brojevi na brojevnom pravcu

1.

2.

4. a) 2 i 4, 1 i 3, 0 i 2, -1 i 1, -2 i 0, -3 i -1, -4 i -2, -5 i -3; b) 19 i 2, 344 i 346, -46 i -44, -101 i -99, -355 i -353.

5. a)

b)

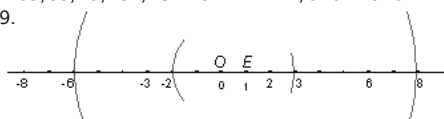
6.

7. a) $-1, -2, -3, -4, -5, -6, -7, -8, -9$;
 b) $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$; c) $-20, -19, -18, -17, 16, -15, -14, -13, -12$.
 8. a) $-2, -1, 0, 1, 2, 3$; b) $2, 1, 0, -1$;
 c) $-1, -2, -3, -4, -3, -4$; d) $2, 1, 0, -1, -2, -3, -4, -5$;
 e) $-7, -6, -5, -4, -3, -4, -3$; f) $-16, -17, -18, -19, -20, -21, -22, -23, -24$; g) $-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$.
 9.

3.3. Suprotni brojevi i apsolutna vrijednost

- a) -12 ; b) 3; c) 28; d) -45 .
 - 7, $-7, -15, 15, -82, 82, 100, -100$.
 - 6°C . 4. $3 i -3, -17 i 17, -50 i 50$.
 -
- -123 je lijevo, a 123 je desno.

6. a) $-(-3) = +3$; b) $+(-17) = -17$; c) $+(-15) = -15$;
 d) $-(-7) = +7$; e) $+(-5) = -5$;
 f) $+(-29) = -29$.
 7. 59, 59, 79, 234, 43. 8. $24i - 24$, $576i - 576$.
 9.

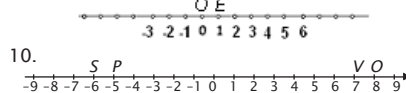


10. $|-8| = 8$, $|-6| = 6$, $|-3| = 3$, $|-2| = 2$,
 $|2| = 2$, $|3| = 3$, $|6| = 6$, $|8| = 8$.
 11. $3 \rightarrow -3$, $-5 \rightarrow 5$, $-10 \rightarrow 10$, $34 \rightarrow -34$, $-18 \rightarrow 18$,
 $-21 \rightarrow 21$, $98 \rightarrow -98$, $75 \rightarrow -75$, $-13 \rightarrow 13$.
 12. a) 90 jed. duljina, b) 2512 jed. duljina.
 13.

z	Suprotan broj od z	Neposredni prethodnik od z	Neposredni sljedbenik od z	Apsolutna vrijednost od z
-7	7	-8	-6	7
7	-7	6	8	7
4	-4	3	5	4
37	-37	36	38	37
-22	22	-23	-21	22

3.4. Uspoređivanje

1. U Čakovcu. 2. U Donjem Miholjcu.
 3. Mrtvo more.
 4. a) $12 < 45$; b) $12 < -45$; c) $-12 < -45$;
 d) $127 > 107$; e) $-65 < 0$; f) $76 > -65$.
 5. $-29^\circ\text{C} < -12^\circ\text{C} < -11^\circ\text{C} < 0^\circ\text{C} < 17^\circ\text{C} < 29^\circ\text{C}$.
 6. $0 < 1 < 2 < 3 < 4 < 5 < 6 \dots$
 7. $0 - 1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6 \dots$
 8. $-24, -23, -22, -21, -20, -19, -18, -17, -16$.
 9.



10. a) $-6 < -5 < 7 < 8$; b) 14 stupnjeva.
 11. $-211 < -130 < -115 < -95 < 39 < 68 < 79 < 199 < 201$.
 12. a) Najviše su na Veneri, a najniže na Plutonu; b) na Merkur; c) niža.
 13. a) 2006 + 776, prije 2782 god.; b) 2006 + 753, prije 2759 god.; c) prve olimpijske igre.
 14. a) 2794. god. prije Krista; b) 194. god. prije Krista; c) piramide su starije za 2600 god.; d) 3694. god. prije Krista.

3.5. Zbrajanje

Pribrojnici	zbroj	jednakost
4 6	10	$4+6=10$
-4 -6	-10	$-4+(-6)=-10$
3 2	5	$3+2=5$
-3 -2	-5	$-3+(-2)=-5$
2 5	7	$2+5=7$
-2 -5	-7	$-2+(-5)=-7$
-5 -10	-15	$-5+(-10)=-15$
4 15	19	$4+15=19$
-4 -15	-19	$-4+(-15)=-19$
-25 0	-25	$-25+0=-25$
25 0	25	$25+0=25$

2. a) 13; b) -13; c) 18; d) -18; e) -12; f) -15; g) -23; h) -8; i) -6; j) -24; k) -34; l) -36; m) -16; n) -17; o) -43.
 3. a) -13 m; b) -15 m.
 4. a) 1°C , 0°C i -2°C ;
 b) $7 + (-6) = 1$; $1 + (-1) = 0$; $0 + (-2) = -2$.
 5. a) 5; b) -1; c) -17; d) 0; e) 16; f) -38; g) -100; h) 50; i) 0; j) -11; k) 132; l) -600.

broj igre	početna temperatura u $^\circ\text{C}$	žetoni: dodaj	zapis računanja	krajnja temperatura u $^\circ\text{C}$
1.	7	5	$7+5$	12
2.	-3	-1	$-3+(-1)$	-4
3.	-4	-5	$-4+(-5)$	-9
4.	-8	12	$-8+12$	4
5.	5	-3	$5+(-3)$	2
6.	9	-12	$9+(-12)$	-3
7.	0	-6	$0+(-6)$	-6
8.	-18	13	$-18+13$	-5
9.	10	-10	$10+(-10)$	0

7. a) -16; b) 16; c) -2; d) 2; e) -6; f) 80; g) -7; h) 6; i) -25; j) 4; k) -9; l) -12.
 8. a) -30; b) 38; c) 90; d) -21; e) -160; f) 1; g) -80; h) -63; i) -40; j) 7; k) -9; l) -7.
 9. a) -48; b) 179; c) 80; d) 27; e) -80; f) -55; g) 11; h) -5; i) -60; j) -68; k) 35; l) -35; m) -78; n) 137; o) 49; p) -10.
 10. 3080 kn, 2380 kn. 11. -224 kn, -424 kn.
 12. a) 92 kn < 100 kn; b) -435 kn.
 13. -32 kn - 100 kn.

3.6.Svojsva zbrajanja

1. a) 12; b) 14; c) 28; d) 23. 2. a) 25; b) 0.
 3. $0 + (-5) + 4 + 5 = 4$.
 4. a) -20; b) 1; c) -30; d) 10; e) -5; f) -7.
 5. a) b) 158 kn.

Datum:	Opis:	Uplata:	Isplata:	Stanje:
03. 04.	Trenutno stanje	-	-	-135
05. 04.	Kućne potrepštine	-	227	-362
07. 04.	Uplata plaće	4 128	-	3766
11. 04.	Bankomat (za režije)	-	1300	2466
15. 04.	Rata za osiguranje auta	-	438	2028
18. 04.	Bankomat	-	500	1528
20. 04.	Trenutno stanje	-	-	1528

3.7. oduzimanje

1. a) 6; b) -3; c) -17; d) -35; e) 27; f) -33; g) -80; h) -3.

(a)	(b)
$16 - 9 = 7$	$7 - 9 = -2$
$30 - 18 = 12$	$6 - 7 = -1$
$70 - 20 = 50$	$23 - 30 = -7$
$23 - 14 = 9$	$45 - 55 = -10$
$85 - 30 = 55$	$6 - 60 = -54$
(c)	(d)
$-1 - 3 = -4$	$-8 + (-4) = -12$
$-2 - 6 = -8$	$-10 + (-8) = -18$
$-9 - 8 = -17$	$-20 - 15 = -35$
$-17 - 4 = -21$	$10 - 13 = -3$
$-25 - 40 = -65$	$40 + (-10) = 30$

broj igre	početna temperatura u $^\circ\text{C}$	žetoni: oduzmi	krajnja temperatura u $^\circ\text{C}$
1.	8	4	$8-4=$ 4
2.	1	3	$1-3=$ -2
3.	2	6	$2-6=$ -4
4.	-7	8	$-7-8=$ -15
5.	-10	4	$-10-4=$ -14
6.	-15	10	$-15-10=$ -25

4. e) 11; f) 3; g) 1; h) -6; i) 19; j) -17.
 5. a) -12; b) -11; c) -4; d) 11; e) 201; f) 27; g) -33; h) -10; i) -82; j) -100.
 6. a) 26; b) 1; c) 20; d) 10; e) 3; f) -7; g) 130; h) -118.
 7. a) -36; b) 2; c) -6; d) -17; e) 1; f) -96; g) 23; h) -12; i) -19; j) -1.
 8. a) -3; b) -21; c) -3; d) 20; e) -20; f) 8; g) 8; h) -7; i) -200; j) -66.
 9. 6280 m.
 10. 147°C .
 11. a) Merkur; b) 610 stupnjeva; c) 125 stupnjeva; d) 155 stupnjeva.

12. 985 godina.
 13. $343\text{ cm} > 2\text{ m}$.
 14. a) $3 - 14 > -12$; b) $-27 + 1 > -27$;
 c) $-12 = 13 - 25$; d) $18 - 19 < 19 - 18$;
 e) $137 - 258 < 237 - 114$.
 15. a) -664; b) -684.
 16. a) 2482 kn; b) u svibnju je zaradila 4763 kn, u lipnju 4662 kn, u sva tri mjeseca je zaradila 13656 kn; c) drugo mjesto se može nalaziti na 2079 m ili na -1013 m nadmorske visine.
 17. a) -703246; b) 1765888; c) 523003; d) -290735053; e) 28663473360; f) 2815511.

3.8. svojsva oduzimanje

zadaci	zbrajamo	zadaci	zbrajamo
2 - 3	2 i - 3	9 + 5	9 i 5
18 - 4	18 i - 4	-6 - 21	-6 i - 21
-15 - 19	-15 i - 19	9 - 16	9 i - 16
-4 - 6	-4 i - 6	18 - 25	18 i - 25
-8 + 16	-8 i 16	-4 - 32	-4 i - 32
-17 + 9	-17 i 9	23 - 7	23 i - 7

2. a) $-7 + 2 = -5$; b) $-4 - 9 = -13$;
 c) $3 - 8 = -5$; d) $18 - 18 = 0$;
 e) $-9 - 6 = -15$; f) $0 - 12 = -12$.
 3. -35. 4. -30.
 5. a) -4; b) 10; c) -7; d) 39.
 6. a) -6; b) -5; c) 30; d) -20.
 7. a) 4; b) -20; c) -5; d) -6; e) 43; f) 0; g) -15; h) 32.
 8. $-10 - 5 - 8 = -23$, na dubini 23 m.

3.9. računanje sa zagradama

1. a) -4; b) 9; c) -20; d) 3; e) -6; f) 23.
 2. a) -9; b) 19; c) 1; d) 23.
 3. a) -6; b) ; c) 7; d) 15; e) 8; f) -6.
 4. a) -17; b) -34; c) -34; d) -44.
 5. a) 5; b) 11; c) 60.
 6. a) 1; b) 10; c) -11; d) -43; e) 13; f) 13; g) -5; h) -11.
 7. $5 < 11 < 60$. 8. 0, restoran je prazan.
 9. 1. $10 - (-4 - 3) + (-4 + 3) = -8$.
 11. $16 + (7 - (-19)) = 42$.
 12. 34. 13. 377.
 14. a) 2; b) 96; c) -12; d) 6; e) 2; f) 2.
 15. a) -6502; b) 9951994; c) -305295; d) -5005941; e) 2210; f) 209900.

3.10. množenje cijelih brojeva

1. a) 56; b) 54; c) 42; d) 81; e) 60; f) 350; g) 1000; h) 600; i) 60; j) 160; k) 100.
 2. -42°C .
 3. a) -20; b) -49; c) -56; d) -36; e) -21; f) 0; g) -33; h) -45; i) -30; j) -1; k) -25; l) -63.
 4. a) 20; b) -10; c) -18.
 5. a) -54; b) 56; c) -49; d) -35; e) -81; f) 54; g) 72; h) 63; i) 28.
 6. a) 14; b) -56; c) -63; d) 25; e) 0; f) 0; g) 40; h) -49; i) 5; j) -81.
 7. a) 18; b) 8; c) -6; d) 8; e) -3; f) 36; g) 56; h) -35; i) -20; j) 0; k) 0; l) 100.
 8. a) -30; b) -300; c) -300; d) -3000; e) -21; f) 210; g) -210; h) -210000; i) 72; j) -7200; k) -7200; l) 7200.
 9. a) $9 = 3 \cdot 3 = -3 \cdot (-3) = 1 \cdot 9 = -1 \cdot (-9)$;
 b) $6 = 2 \cdot 3 = -2 \cdot (-3) = 1 \cdot 6 = -1 \cdot (-6)$;
 c) $10 = 2 \cdot 5 = -2 \cdot (-5) = 1 \cdot 10 = -1 \cdot (-10)$;
 d) $12 = 1 \cdot 12 = -1 \cdot (-12) = 2 \cdot 6 = -2 \cdot (-6) = 3 \cdot 4 = -3 \cdot (-4)$.
 10. -8 kn.
 11. a) $3 \cdot (-14) < -3 \cdot (-14)$; b) $-27 \cdot 1 = -27$;
 c) $-12 \cdot 2 > -12 \cdot 5$; d) $18 \cdot 19 = -19 \cdot (-18)$;
 e) $-19 \cdot (-25) > 19 \cdot (-25)$.

3.11. svojstva množenja cijelih brojeva

- a) -24; b) 24. 2. a) -32; b) 1.
- a) -14; b) 10. 4. a) 0; b) -48; c) 36; d) 0.
- 3105, 738, -2716, -288, 0.
- a) 6600; b) -4500; c) 88000; d) 6300.
- a) 4500; b) 0.

3.12. Dijeljenje cijelih brojeva

dijeljenje	pozitivan/negativan
4 : 2	+
-4 : (-2)	+
-4 : 2	-
4 : (-2)	-

dijeljenje	količnik
24 : 12 =	2
-24 : (-12) =	2
-24 : 12 =	-2
24 : (-12) =	-2

- a) 6; b) 2; c) 10; d) 10; e) 8; f) 7; g) 6; h) 8; i) -7; j) -8; k) 9; l) -7; m) -8; n) 6; o) 7; p) 7; r) 7; s) 4.
- a) -8; b) -7; c) -7; d) -8; e) -5; f) -10; g) -2; h) 9; i) -2; j) 3; k) 2; l) -6; m) -7; n) 4; o) 6; p) 10; r) 3; s) 1.
- Isplata 4000 kn.
- a) -87; b) 87; c) -87; d) 87.
- a) -24, -12, -8, -6, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24; b) -12, -6, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 6, 12; c) -8, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 8; d) -15, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 15.

3.13. Svojstva dijeljenja

- a) -27; b) 27; c) 0; d) 0; e) 1; f) 1; g) -1; h) -1.
- a) 1; b) 4; c) 1; d) -4; e) -4; f) 12.
- a) 4; b) 4; c) 16. 4. -12.
- a) (-450) : (+10) : (+5) : (+3) = -3, dvije mogućnosti; b) (+450) : (-10) : (+5) : (-3) = +3, tri mogućnosti.
- Mjesečna rata svakog je 400 kn.

3.14. Povezivanje računskih operacija

- a) 21; b) 52; c) -1; d) -101; e) 1.
- a) 5; b) -39; c) -16; d) 37; e) 22; f) 32.
- a) 16; b) -17; c) 0; d) 35; e) -32; f) 50.
- 24 + (-5) - 3 · 7 + 4 · (-5) = -22
- a) 9; b) 128. 6. a) -5; b) 26; c) -43; d) -37.

(-6) · 3 + 6	-9
-15 + 7	-8
(-2) · (-4) + 2 · 4	16
(-24) · 4 - 6	-12
(-28) · (-7) + 3	7
-22 + 8 · (-2)	-26
-6 + (-7) + 15	2
28 + 3 · (-5)	11
(-4) · 6 + 4 · 5	0

- a) -2100; b) -240; c) 300.
- Smanjio ju je za 18 stupnjeva.
- 30. 18. a) -3; b) -10; c) 8.
- a) -9; b) -11; c) 2; d) 2; e) -14.
- a) 41; b) 7; c) 1; d) 28; e) -15; f) -35; g) 9.
- 9, -39. 22. 705. 23. -121.
8. 25. 10.
- a) -25; b) -35; c) -25; d) -147.
- a) 86; b) -11; c) -73.
- a) Bit će u "minusu"; b) -1563 kn.

3.15. Ponavljanje

- 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 2. \mathbb{N} .
- Prirodni brojevi, 0, i negativni cijeli brojevi.
- \mathbb{Z} .
- Ne postoji ni najveći ni najmanji cijeli broj.
- 4 i -4, 5 i -5, ... 7. 10 jediničnih duljina.
- 4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3.
- Zbroj cijelih brojeva je cijeli broj, neutralni element, suprotni element, komutativnost i asocijativnost.
- Zatvorenost, neutralni element.
- Zatvorenost, komutativnost, asocijativnost, neutralni element je jedan.
- Neutralni element je 1.
- a) 0; b) 0; c) ne smijemo; d) 0; e) isti taj broj; f) isti taj broj; g) isti taj broj; h) suprotan broj.
- Suprotni brojevi. 15. Taj isti broj.
- Suprotan broj.
- a) Pozitivan; b) pozitivan; c) nula.

Zadaci za ponavljanje:

- a) 12 < 45; b) 12 - 45; c) -12 - 45; d) 127 107; e) -65 0; f) 76 - 65.

- 29 °C < -17 °C < -12 °C < 0 °C < 27 °C < 29 °C
- a) 6; b) 12; c) 0; d) 1234; e) 1234.
- a) 1; b) -68; c) -17; d) -8; e) -56; f) 0; g) 0; h) 0; i) -6.
- a) 4; b) -45; c) -64; d) 0; e) -9; f) 24; g) 0; h) 73; i) 63.
- a) -6; b) -5; c) 30; d) -20.
- a) -90; b) 96; c) 84; d) -30; e) 0; f) 0; g) 648; h) 560; i) -144.
- a) -3; b) 7; c) -2; d) -10; e) 1; f) 6; g) 6; h) 6; i) -3; j) 4.
- a) -56; b) 17; c) -11; d) 4; e) -4.
- a) 25; b) 1; c) -2; d) -6; e) -19.
- a) -6; b) -25; c) -6; d) 12; e) 13; f) -3; g) 86.
- Prosječna temperatura je 2 °C.
- Još mu je dužan 12 kn. Nakon što je od bake dobio 25.50 kn vratio je Luki sve i još mu je ostalo 13 kn.
- 125 kutija s jagodom, 50 s jogurtom, 250 s lješnjakom i 75 običnih.

Primjerak oglednog testa:

- a) -6; b) -15.
- 2.
- a) -7 < 4; b) -2 > -3.
- a) -22; b) -30.
- Moskva, Oslo, Pariz, Berlin, Prag, Rim, Atena, razlika je 39 stupnjeva.
- a) 13; b) 2; c) -1.
- 25.
- 1 °C.
- 29.

vrsta	datum	uplata/ isplata	stanje
			215
izvod	12.09.	- 650	- 435
plaća	13.09.	3228	2793
ček	24.09.	- 2540	253
račun	30.09.	- 923	- 670
izvod	1.10.	- 19	- 689
plaća	23.10.	4257	3568
ček	24.10.	- 3322	246
račun	30.10.	- 55	191

A, B

apsolutna vrijednost broja, 141
 asocijativnost kod cijelih brojeva, 153, 169
 asocijativnost kod razlomaka, 40, 55
 brojevni pravac, 27

D, Dž

dijeljenje cijelih brojeva, 172
 dijeljenje razlomaka, 58
 distributivnost kod cijelih brojeva, 178
 distributivnost kod razlomaka, 62
 džepno računalo, 12

H, I, J

hipotenuza trokuta, 86
 izlučivanje zajedničkog faktora, 61
 jedinična dužina, 27
 jednakokrtačan trokut, 84
 jednakostraničan trokut, 84

K

katete , 86
 komutativnost kod cijelih brojeva, 153, 169
 komutativnost kod razlomaka, 40, 55
 konstrukcija simetrale kuta, 95
 konstrukcije kutova, 97
 konstrukcije trokuta, 111
 krakovi , 92
 kutne minute, 78
 kutne sekunde, 78
 kutni stupnjevi, 78
 kutovi s okomitim kracima, 76
 kutovi s usporednim kracima, 75
 kutovi trokuta, 83

M

mjerne jedinice za duljinu, 84
 mjerne jedinice za površinu, 124
 mješoviti brojevi na brojevnom pravcu, 30
 množenje cijelih brojeva, 167
 množenje mješovitih brojeva, 52
 množenje razlomaka, 46

N

najmanji zajednički višekratnik nazivnika, 21
 negativni brojevi, 132
 negativni cijeli brojevi, 135
 nepravilni razlomci, 23

O

oduzimanje cijelih brojeva, 156
 oduzimanje mješovitih brojeva, 43
 oduzimanje razlomaka, 42
 opseg trokuta, 83
 osnovica trokuta, 92

P, Q

poučci o sukladnosti trokuta, 107-110
 površina trokuta, 121-123
 pozitivni brojevi, 132
 pozitivni cijeli brojevi, 135
 pravi razlomci, 23
 pravilo unakrsnog množenja razlomaka, 24
 pravokutan trokut, 86
 predznak broja, 141
 predznak količnika, 173
 predznak umnoška, 168
 presječna, 70
 proširivanje razlomaka, 20-21
 Q+ skup razlomaka, 39

R

računanje sa zgradama, 164
 razlomci na brojevnom pravcu, 27-29
 raznostraničan trokut, 83
 recipročan broj, 56

S, Š

simetrala dužine, 94
 simetrala kuta, 93-94
 skraćivanje razlomaka, 35
 skup cijelih brojeva Z, 136
 skup prirodnih brojeva N, 132
 skup razlomaka Q+, 39
 stranice trokuta, 83
 sukladnost kutova trokuta, 106
 sukladnost trokuta, 103, 106
 suprotni brojevi, 139
 susjedni kutovi, 70
 svođenje razlomaka na zajednički nazivnik, 20-21
 šiljastokutan trokut, 86

T

trokut, 83-87
 tupokutan trokut, 86

U, V

unutarnji kutovi trokuta, 83
 uspoređivanje cijelih brojeva, 142
 uspoređivanje razlomaka, 22
 visina trokuta, 117-118
 vršni kutovi , 70

Z

zgrade, 164
 zajednički nazivnik, 21
 zapisivanje razlomka u obliku mješovitog broja, 29
 zbrajanje cijelih brojeva, 146
 zbrajanje razlomaka, 33-36
 zbroj unutarnjih kutova trokuta, 88