

L. Kralj, D. Glasnović Gracin, Z. Ćurković, M. Stepić, S. Banić

# Petica 7

udžbenik i zbirka zadataka za 7. razred osnovne škole

PRVI SVEZAK

1. izdanje

Zagreb, 2007.

---

Autorice: Lidija Kralj, Dubravka Glasnović Gracin, Zlata Ćurković, Minja Stepić, Sonja Banić

Urednik: Vinkoslav Galešev

Recenzentice: Ela Rac Marinić Kragić, Ines Kniewald

Lektorica: Jasmina Han

Ilustracija naslovnice: Ivan Marušić

Ostale ilustracije: Ivan Marušić, Antonija Jelić, Helena Povijač

Priprema za tisak: Ivana Biluš, Robert Braun, Antonija Jelić,  
Mirta Kovač, Josip Marić, Tomislav Stanojević

Tisak: Prius d.o.o.

Za nakladnika: Robert Šipek

Nakladnik: SysPrint d.o.o.

XIV. trokut 8a, p.p. 84, 10020 Zagreb, Hrvatska

tel: (01) 655 8740, fax: (01) 655 8741

e-mail: [udzbenici@sysprint.hr](mailto:udzbenici@sysprint.hr), web: [www.sysprint.hr/udzbenici](http://www.sysprint.hr/udzbenici)

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa odobrilo rješenjem:

Klasa: UP/I° 602-09/07-03/00005

Ur. broj: 533-12-07-2

Zagreb, 30. ožujka 2007.

CIP zapis dostupan u računalnom katalogu

Nacionalne i sveučilišne knjižnice u Zagrebu

pod brojem 633269

ISBN 978-953-232-137-1 (cjelina)

ISBN 978-953-232-138-8 (svezak 1)

© SysPrint d.o.o, Zagreb, svibanj 2007.

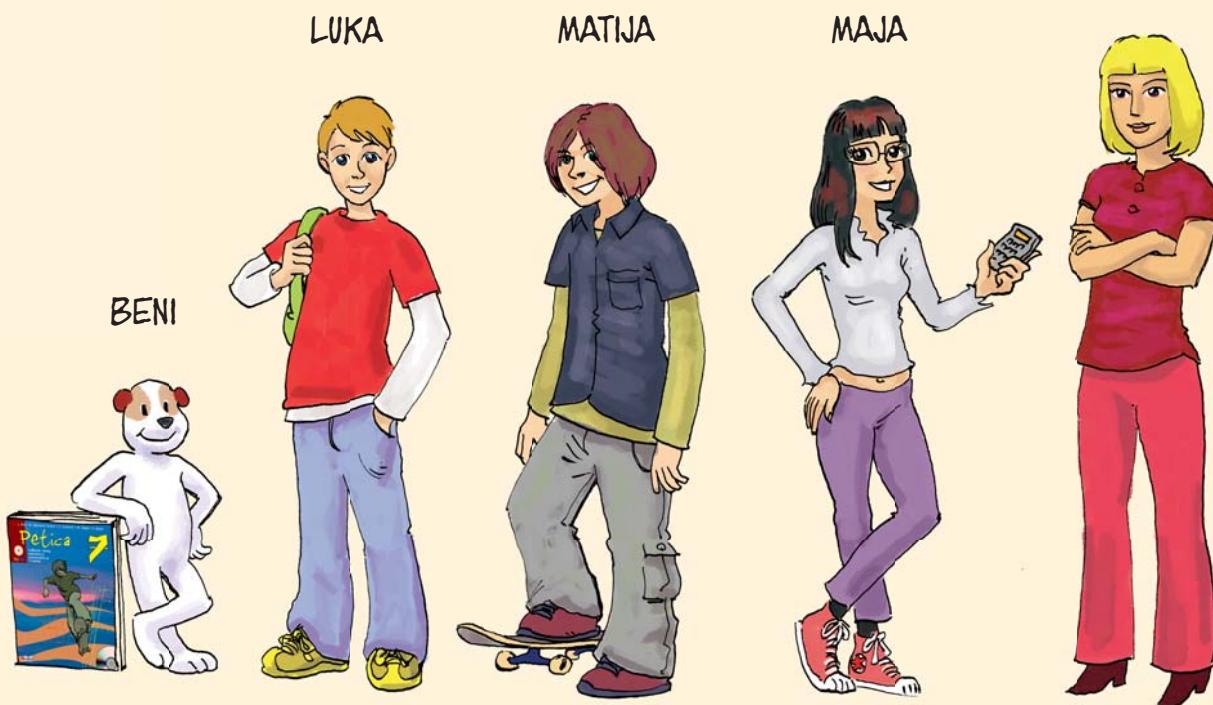
Nijedan dio ove knjige ili CD-a ne smije se umnožavati, fotokopirati niti na bilo koji način  
reproducirati bez nakladnikova pismenog dopuštenja

# Sadržaj

0. Uvodno ponavljanje.....	6
0.1. Geometrija .....	6
0.2. Aritmetika .....	11
1. Koordinatni sustav u ravnini.....	14
1.1. Koordinatni sustav na pravcu .....	16
1.2. Uređeni par .....	20
1.3. Koordinatni sustav u ravnini.....	22
1.4. Ponavljanje.....	29
2. Proporcionalne i obrnuto proporcionalne veličine.....	32
2.1. Omjeri.....	34
2.2. Proporcije ili razmjeri .....	39
2.3. Proporcionalne veličine .....	44
2.4. Grafički prikaz proporcionalnosti .....	51
2.5. Obrnuto proporcionalne veličine .....	53
2.6. Primjena proporcionalnosti i obrnute proporcionalnosti .....	60
2.7. Ponavljanje.....	62
3. Postotni i kamatni račun .....	66
3.1. Pojam postotka .....	68
3.2. Računanje s postocima.....	72
3.3. Postoci u svakodnevnom životu .....	76
3.4. Jednostavni kamatni račun .....	82
3.5. Ponavljanje.....	88
4. Statistika i vjerojatnost.....	92
4.1. Grafičko prikazivanje podataka .....	94
4.2. Analiza podataka.....	105
4.3. Vjerojatnost slučajnog događaja .....	114
4.4. Ponavljanje.....	130
5. Sličnost .....	134
5.1. Dijeljenje dužine na jednake dijelove i u jednakom omjeru .....	136
5.2. Sličnost trokuta .....	144
5.3. Poučci o sličnim trokutima .....	150
5.4. Opseg i površina sličnih trokuta.....	159
5.5. Ponavljanje gradiva .....	162
Rješenja .....	167
Kazalo .....	183

Upoznajte likove s kojima ćete se družiti kroz gradivo udžbenika Petica!

## UČITELJICA



**Luka** je odličan učenik. Iako se kod njega nikad ne zna hoće li imati 4 ili 5, matematika mu je jedan od najdražih predmeta. Kada mu nešto nije jasno, ne srami se pitati učiteljicu da mu pojasni gradivo.

**Matija** voli playstation i svoj skateboard mnogo više od matematike. No, pravi je stručnjak za računala svih vrsta, pa tako i za džepna. Otkad je učiteljica dozvolila njihovo korištenje, pomaže cijelom razredu u svladavanju gradiva.

**Maja** ima sve petice i najbolja je učenica u razredu. Voli matematiku i redovito piše zadaće. Često se prepire s Lukom i Matijom oko točnih rješenja zadataka. Naravno, smatra da je baš ona uvijek u pravu!

**Beni** je Lukin pas. Voli dobro jelo, voli spavati, ali voli i prисluškivati kada Luka kod kuće priča o školi. Beni naročito voli matematiku i voli na šaljiv način komentirati matematičke probleme.

**Učiteljica** na zanimljiv način približava učenicima i najteže gradivo iz matematike. Uvijek je tu ako treba nešto dodatno objasniti i strpljivo odgovara na njihova brojna pitanja.

Dragi čitatelji,

pred vama je prvi svezak udžbenika sa zbirkom zadataka iz matematike za 7. razred osnovne škole, koji je u potpunosti uskladen sa stručnim i metodičkim zahtjevima Hrvatskog nacionalnog obrazovnog standarda (HNOS). Uz objedinjeni udžbenik sa zbirkom zadataka i rješenjima, u udžbenički komplet ubraja se još i CD za učenike koji će vam približiti gradivo matematike i učiniti ga zanimljivim, pa i zabavnim.

Gradivo sedmog razreda započinje ponavljanjem gradiva prethodnih razreda. Nakon toga slijedi proširivanje znanja o brojevnim pravcima i koordinatnim sustavima. Ove školske godine učit ćete o raznim matematičkim načinima (modelima) rješavanja zadataka iz svakodnevnog života. Time se posebno bave cjeline: Proporcionalne i obrnuto proporcionalne veličine, Postotni i kamatni račun, Analiza i prikupljanje podataka te Vjerovatnost. Učite li i informatiku lako ćete sadržaje tih cjelina povezati s proračunskim tablicama.

Svaki naslov u udžbeniku započinje problemom koji će vas kroz zanimljiv zadatak iz života uvesti u novo gradivo. Zatim slijede riješeni primjeri, putem kojih ćete stjecati nova znanja iz matematike. Znanje ćete utvrditi pomoći raznovrsnih zadataka koji se nalaze iza primjera. Zadaci su složeni po težini od lakših prema težima i obojani odgovarajućim bojama: plavo - lakši zadaci, crno - srednje teški zadaci i narančasto - složeniji zadaci. Ako neku vrstu zadataka poželite još više uvježbati, na CD-u ćete naći dodatne i dopunske zadatke te druge obrazovne materijale i igre vezane uz matematiku.

Kroz gradivo matematike voditi će vas simpatični likovi: Luka, Maja, Matija, učiteljica, Beni i ostali, koji će se, baš kao i vi, uhvatiti u koštac s gradivom matematike. Svojim razgovorima i savjetima olakšat će vam svladavanje početnih teškoća.

Kako bi vaš uspjeh iz matematike bio još bolji, na kraju svake nastavne teme nalaze se pitanja za ponavljanje i uvježbavanje gradiva. U udžbeniku su posebno označeni dijelovi gradiva koji nisu dio obaveznog programa, ali su namijenjeni učenicima koji žele znati više. Osim toga, i drugi dijelovi građe istaknuti su posebnim okvirima.

U tablici su dani njihovi opisi i značenja:

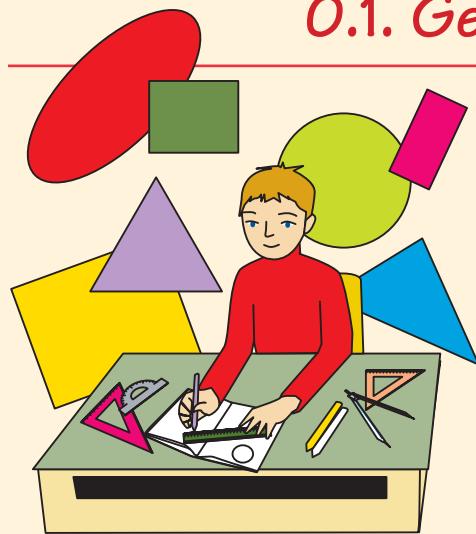
Oblik	Značenje
Zadatak 4.	Lakši zadatak (redni broj zadataka obojan svijetlo-plavom bojom)
Zadatak 5.	Složeniji zadatak i zadaci za nadarene (redni broj zadataka obojan narančastom bojom)
	Važan dio gradiva kojeg treba dobro naučiti
	Dio teksta za lakše praćenje i pamćenje gradiva
	Formula
	Gradivo za radoznalce

Ako se u nekom zadatku traži crtanje ili upisivanje rješenja u udžbenik, riješite zadatak u svojoj bilježnici. Udžbenik trebaju koristiti i generacije iza vas.

Puno uspjeha u radu žele vam autorice udžbenika!

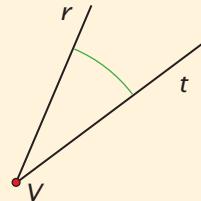
# O. Uvodno ponavljanje

## 0.1. Geometrija



### Kut

Osnovno o kutu



$\angle V$

$t, r$  - kraci kuta  
 $V$  - vrh kuta

### Vrste kutova



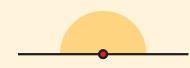
ŠILJASTI KUT  
manji od  $90^\circ$



PRAVI KUT  
 $90^\circ$



TUPI KUT  
veći od  $90^\circ$  i  
manji od  $180^\circ$



ISPRUŽENI KUT  
 $180^\circ$

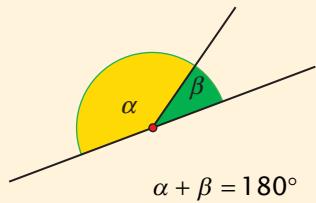


IZBOČENI KUT  
veći od  $180^\circ$   
i manji od  $360^\circ$

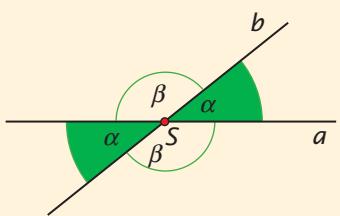


PUNI KUT  
 $360^\circ$

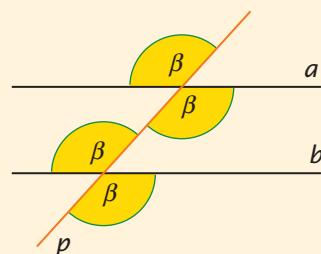
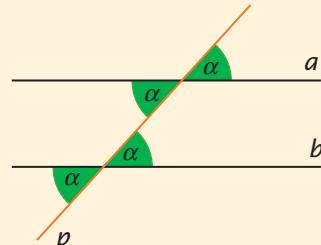
### Sukuti i susjedni kutovi



### Vršni kutovi

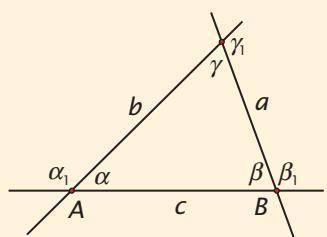


### Kutovi uz presječnicu



### Trokut

#### Svojstva



### Unutrašnji kutovi trokuta

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

### Vanjski kutovi trokuta

$$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 360^\circ$$

$$\alpha_1 = \beta + \gamma$$

$$\beta_1 = \alpha + \gamma$$

$$\gamma_1 = \alpha + \beta$$

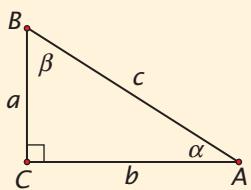
### Nejednakosti trokuta

$$a + b > c$$

$$a + c > b$$

$$b + c > a$$

## Pravokutni trokut



$a, b$  – katete  
 $c$  – hipotenuza

$$\gamma = 90^\circ$$

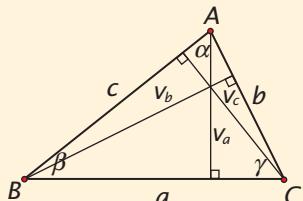
$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

$$O = a + b + c$$

$$P = \frac{a \cdot b}{2}$$

$$P = \frac{c \cdot v_c}{2}$$

## Raznostraničan trokut

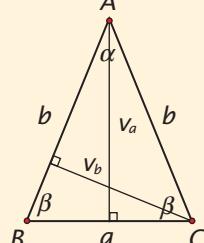


$$O = a + b + c$$

$$P = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{b \cdot v_b}{2} = \frac{c \cdot v_c}{2}$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

## Jednakokračan trokut



$a$  – osnovica

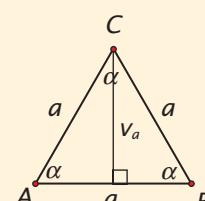
$b$  – kraci

$$O = a + 2b$$

$$P = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{b \cdot v_b}{2}$$

$$\alpha + 2\beta = 180^\circ$$

## Jednakostraničan trokut



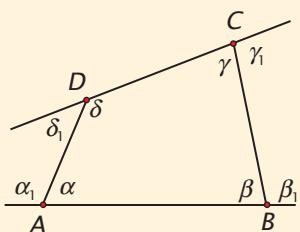
$$O = 3a$$

$$P = \frac{a \cdot v_a}{2}$$

$$\alpha = 60^\circ$$

## Četverokut

## Svojstva



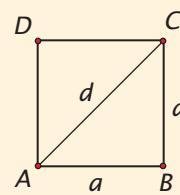
$\alpha, \beta, \gamma, \delta$  – unutarnji kutovi

$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$  – vanjski kutovi

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$$

$$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 + \delta_1 = 360^\circ$$

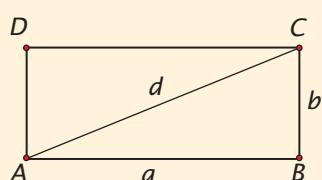
## Kvadrat



$$O = 4a$$

$$P = a \cdot a = a^2$$

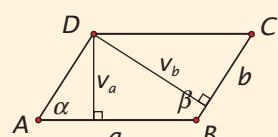
## Pravokutnik



$$O = 2a + 2b = 2(a + b)$$

$$P = a \cdot b$$

## Paralelogram



$$O = 2a + 2b = 2(a + b)$$

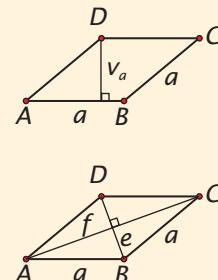
$$P = a \cdot v_a = b \cdot v_b$$

$$\alpha = \gamma, \beta = \delta$$

$$\alpha + \beta = 180^\circ, \beta + \gamma = 180^\circ,$$

$$\gamma + \delta = 180^\circ, \delta + \alpha = 180^\circ$$

## Romb

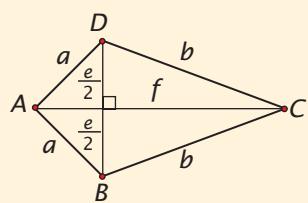


$$O = 4a$$

$$P = a \cdot v = \frac{e \cdot f}{2}$$

## 0. Uvodno ponavljanje

Deltoid

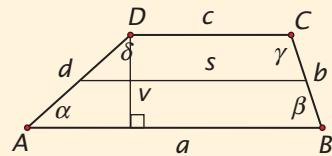


$$\alpha = \gamma, \beta = \delta$$

$$O = 2a + 2b = 2(a + b)$$

$$P = \frac{e \cdot f}{2}$$

Trapez



$a, c$  – osnovice

$b, d$  – kraci

$s$  – srednjica

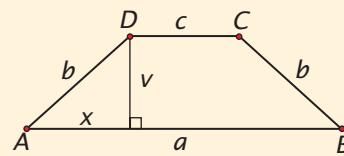
$$\alpha + \delta = 180^\circ, \beta + \gamma = 180^\circ$$

$$O = a + b + c + d$$

$$s = \frac{a + c}{2}$$

$$P = s \cdot v = \frac{(a + c)}{2} \cdot v$$

Jednakokračni trapez



$$\alpha = \beta, \gamma = \delta$$

$$O = a + 2b + c$$

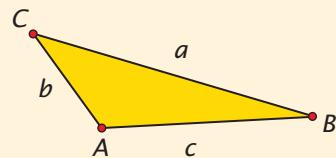
$$x = \frac{a - c}{2}$$

$$s = \frac{a + c}{2}$$

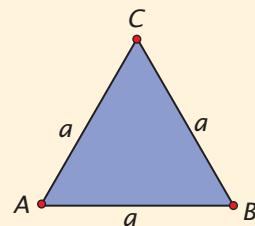
$$P = s \cdot v = \frac{(a + c)}{2} \cdot v$$

### Vrste trokuta s obzirom na duljine stranica

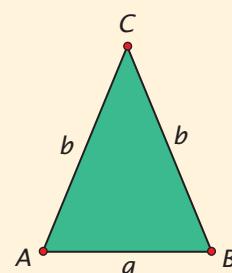
Raznostraničan



Jednakostraničan

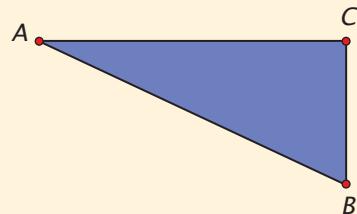


Jednakokračan

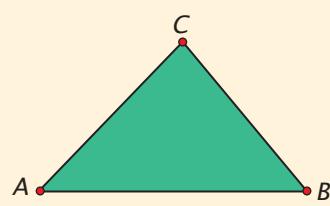


### Vrste trokuta s obzirom na veličine kutova

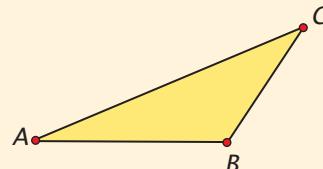
Pravokutan



Šiljastokutan



Tupokutan



## Poučci o sukladnosti trokuta

stranica – stranica – stranica  
(SSS)

Dva su trokuta sukladna ako su im sve tri odgovarajuće stranice sukladne.



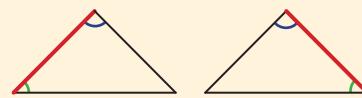
stranica – kut – stranica  
(SKS)

Dva su trokuta sukladna ako su im sukladne dvije odgovarajuće stranice i kut između njih.



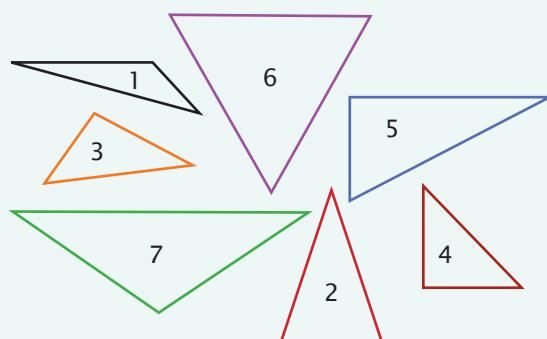
kut – stranica – kut  
(KSK)

Dva su trokuta sukladna ako su im sukladni jedna odgovarajuća stranica i dva kuta uz nju.



## Zadaci

1. Razvrstaj brojeve trokuta u tablicu.



	Raznostraničan	Jednakočračan	Jednakostraničan
Šiljastokutan			
Pravokutan			
Tupokutan			

2. Izračunaj nepoznati kut četverokuta.

$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\delta$
$100^\circ$	$25^\circ$	$125^\circ$	
$94^\circ$	$88^\circ$	$90^\circ$	$106^\circ$
$67^\circ$	$111^\circ$		$101^\circ$
	$89^\circ$	$91^\circ$	$95^\circ$

3. Izračunaj kut pravokutnog trokuta

$\alpha$	$\beta$	$\gamma$
$25^\circ$		$90^\circ$
	$48^\circ$	$90^\circ$
$67^\circ$		$90^\circ$
	$50^\circ$	$90^\circ$

4. Koliki je kut uz osnovicu jednakokračnog trokuta, ako je veličina kuta nasuprot osnovici  $40^\circ$ ?
5. Koliki je kut nasuprot osnovici jednakokračnog trokuta, ako je veličina kuta uz osnovicu  $40^\circ$ ?
6. Konstruiraj trokut.
  - a)  $a = 3 \text{ cm}$ ,  $b = 4 \text{ cm}$ ,  $c = 5 \text{ cm}$ ;
  - b)  $a = 6 \text{ cm}$ ,  $b = 4 \text{ cm}$ ,  $c = 3 \text{ cm}$ ;
  - c)  $a = 3 \text{ cm}$ ,  $b = 4 \text{ cm}$ ,  $\gamma = 60^\circ$ ;
  - d)  $a = 6 \text{ cm}$ ,  $c = 4 \text{ cm}$ ,  $\beta = 45^\circ$ ;
  - e)  $a = 3 \text{ cm}$ ,  $\beta = 45^\circ$ ,  $\gamma = 60^\circ$ ;
  - f)  $b = 6 \text{ cm}$ ,  $\alpha = 90^\circ$ ,  $\gamma = 30^\circ$ .
7. Konstruiraj jednakostaničan trokut.
  - a)  $a = 3 \text{ cm}$ ; b)  $a = 5 \text{ cm}$  .
8. Konstruiraj jednakokračan trokut s osnovicom  $a$  i krakovima  $b$ .
  - a)  $a = 3 \text{ cm}$ ,  $b = 5 \text{ cm}$ ;
  - b)  $a = 5 \text{ cm}$ ,  $\beta = 45^\circ$ ;
  - c)  $a = 6.5 \text{ cm}$ ,  $\alpha = 120^\circ$ ;
  - d)  $b = 6 \text{ cm}$ ,  $\beta = 30^\circ$ ;
  - e)  $b = 5 \text{ cm}$ ,  $\alpha = 45^\circ$ .

## 0. Uvodno ponavljanje

9. Konstruiraj pravokutan trokut kojemu su zadane duljine kateta.  
 a)  $a = 3 \text{ cm}$ ,  $b = 5 \text{ cm}$ ; b)  $a = 6 \text{ cm}$ ,  $b = 4 \text{ cm}$ .

10. Konstruiraj trokut i sve tri njegove visine.  
 a)  $a = 5 \text{ cm}$ ,  $b = 6 \text{ cm}$  i  $c = 7 \text{ cm}$ ;  
 b)  $a = 6 \text{ cm}$ ,  $\beta = 50^\circ$  i  $\gamma = 65^\circ$ ;  
 c)  $b = 7 \text{ cm}$ ,  $c = 5 \text{ cm}$  i  $\alpha = 70^\circ$ ;  
 d) Jednakostraničan trokut  $a = 4.5 \text{ cm}$ ;  
 e) Jednakokračan trokut osnovica  $a = 4 \text{ cm}$ , krakovi  $b = 6 \text{ cm}$ .

11. Izračunaj površinu trokuta kojemu su zadane duljina jedne stranice i pripadne visine:  
 a)  $a = 2 \text{ cm}$  i  $v_a = 5 \text{ cm}$ ;  
 b)  $b = 14 \text{ dm}$  i  $v_b = 10 \text{ dm}$ ;  
 c)  $c = 6 \text{ m}$  i  $v_c = 7 \text{ m}$ ;  
 d)  $a = 3.5 \text{ cm}$  i  $v_a = 5.6 \text{ cm}$ .

12. Krov crkvenog tornja sastoji se od četiri jednakokračna trokuta osnovice  $3.6 \text{ m}$  i visine  $6.8 \text{ m}$ . Koliko je lima potrebno da se prekrije cijeli krov? Ako je cijena  $1 \text{ m}^2$  lima  $20 \text{ kn}$ , koliko treba platiti lim za cijeli krov?

13. U pravokutnom trokutu zadane su duljine kateta  $a = 3 \text{ m}$ ,  $b = 4 \text{ m}$  i duljina visine na hipotenuzu  $v_c = 2.4 \text{ m}$ . Kolika je duljina hipotenuze?

14. Konstruiraj paralelogram i izračunaj mu opseg, ako je zadano:  
 a) stranice duljina  $5 \text{ cm}$  i  $3 \text{ cm}$ , a kut između njih  $30^\circ$ ;  
 b) stranice duljina  $4 \text{ cm}$  i  $6 \text{ cm}$ , a kut između njih  $60^\circ$ .

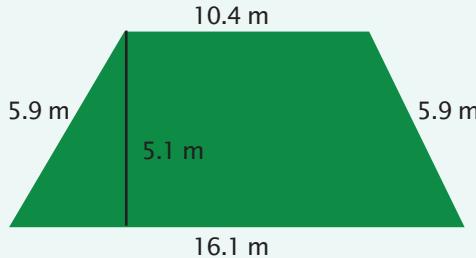
15. Izračunaj površinu paralelograma kojemu je zadana duljina stranice  $a$  i pripadne visine  $v_a$ :  
 a)  $a = 6 \text{ cm}$ ,  $v_a = 4 \text{ cm}$ ;  
 b)  $a = 16 \text{ dm}$ ,  $v_a = 41 \text{ dm}$ ;  
 c)  $a = 60 \text{ cm}$ ,  $v_a = 4 \text{ dm}$ ;  
 d)  $a = 76 \text{ dm}$ ,  $v_a = 4 \text{ m}$ .

16. Izračunaj površinu paralelograma kojemu je zadana duljina stranice  $b$  i pripadne visine  $v_b$ :  
 a)  $b = 5 \text{ cm}$ ,  $v_b = 7 \text{ cm}$ ;  
 b)  $b = 6.5 \text{ dm}$ ,  $v_b = 8.7 \text{ dm}$ .

17. Izračunaj veličine paralelograma koje nedostaju.

$a$	10 cm	8.6 dm	30 m	
$b$				12 cm
$v_a$	7 cm		15 m	
$v_b$	3.5 cm			18 cm
$o$		60.2 dm	150 m	
$P$		86 dm <sup>2</sup>		144 cm <sup>2</sup>

18. Kolika je površina vrta Majinog djeda? Koliko žice je potrebno za ogradu tog vrta?



## 0.2. Aritmetika

### Uspoređivanje

- Nula je veća od svakog negativnog broja.
- Pozitivni brojevi su veći od negativnih.
- Nula je manja od pozitivnog broja.
- Od dva broja veći je onaj koji se nalazi desno odnosno manji je onaj broj koji se nalazi lijevo na brojevnom pravcu.
- za razlomke vrijedi:

$$\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \text{ ako je } a \cdot d > b \cdot c$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ ako je } a \cdot d = b \cdot c$$

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \text{ ako je } a \cdot d < b \cdot c$$

### Zbrajanje i oduzimanje racionalnih brojeva

- Jednaki predznaci – prepisi predznak i brojeve bez predznaka zbroji.
- Različiti predznaci – zamisli brojeve bez predznaka, od većeg oduzmi manji i prepisi predznak od većeg.
- Razlomke svedi na zajednički nazivnik.
- Decimalne brojeve potpiši točku pod točku.

### Množenje i dijeljenje

- Jednaki predznaci – pozitivan rezultat
- Različiti predznaci – negativan rezultat

$$+ \cdot + = +$$

$$- \cdot - = +$$

$$+ \cdot - = -$$

$$- \cdot + = -$$

$$+ : + = +$$

$$- : - = +$$

$$+ : - = -$$

$$- : + = -$$

### Množenje više brojeva

- Ako negativnih faktora ima paran broj, umnožak će biti pozitivan broj.
- Ako negativnih faktora ima neparan broj, umnožak će biti negativan broj.

### Redoslijed računskih operacija

1. Množenje i dijeljenje
2. Zbrajanje i oduzimanje

### Podsjetnik za zagrade

- Zagrade određuju prednost pri računanju
- Ako je ispred zagrade +, zgradu uklonimo.
- Ako je ispred zagrade -, svim članovima zagrade moramo promijeniti predznak.
- Zgradu množimo nekim brojem tako da svaki član zagrade pomnožimo tim brojem.

### Podsjetnik za rješavanje jednadžbe

- Računskim postupcima ukloni zagrade,
- Cijelu jednadžbu pomnoži sa zajedničkim nazivnikom,
- Nepoznanice lijevo, poznanice desno (pri prebacivanju mijenjaj predznak),
- Zbroji što možeš,
- Dijeli s brojem koji množi nepoznanicu.

### Pri rješavanju problemskih zadataka

- pročitaj zadatak,
- odredi pitanje,
- odredi koji podaci su zadani,
- napiši jednadžbu,
- riješi jednadžbu,
- provjeri rezultat,
- napiši odgovor riječima.

## Zadaci

1. Usporedi racionalne brojeve:

a)  $1.5$  i  $-\frac{4}{3}$ ; b)  $-\frac{11}{2}$  i  $5.6$ ;

c)  $-\frac{4}{10}$  i  $0$ ; d)  $\frac{2}{6}$  i  $0$ .

2. Poredaj po veličini od najmanjeg prema najvećem:

$$-\frac{14}{4}, 0.81, -2.32, \frac{5}{2} \text{ i } 1.75$$

3. Poredaj gradove prema izmjerenim temperaturama tako da počneš od najtoplijeg grada.

Atena  $14.4^\circ\text{C}$ , Berlin  $6.4^\circ\text{C}$ , Moskva  $-20.4^\circ\text{C}$ , Oslo  $-11.4^\circ\text{C}$ , Pariz  $-3.8^\circ\text{C}$ , Prag  $-5.4^\circ\text{C}$ , Rim  $16.5^\circ\text{C}$ , Beč  $0^\circ\text{C}$ , Zagreb  $2.5^\circ\text{C}$ , Bern  $-4.6^\circ\text{C}$ , London  $-5.9^\circ\text{C}$ , Madrid  $9.4^\circ\text{C}$ , Kopenhagen  $-12.8^\circ\text{C}$ , Haag  $2.6^\circ\text{C}$ , Helsinki  $-17.2^\circ\text{C}$ .

4. Izračunaj:

a)  $-2.5 + 3.67$ ; b)  $-45.98 - 23.45$ ;

c)  $-12.3 - 5.99$ ; d)  $8.79 - 8.67$ ;

e)  $-\frac{2}{3} - 2.2$ ; f)  $\frac{1}{6} + 4.25$ ;

g)  $-6.5 - \frac{2}{7}$ ; h)  $0.8 + \frac{5}{11}$ .

5. Izračunaj:

a)  $-5.20 + 3.45$ ; b)  $0.21 + 6.67$ ;

c)  $-5.62 - 16.79$ ; d)  $-11.03 + 26.91$ ;

e)  $-16.4 + 37.03$ ; f)  $-21.8 - 47.15$ ;

g)  $27.2 - 57.27$ .

6. Pojednostavni zapis pa izračunaj:

a)  $-6.6 + (-2.3) + (+4.4) - (-1.5) - (+3.2)$ ;

b)  $-(+2.5) + (-6.6) - (-3.2)$ ;

c)  $100 - (-25) - 35 + (-25) - (+35)$ ;

d)  $-(+8.4) + 45 - (+45) + 0 + (-12.5)$ .

7. Koliko je metara:

a)  $1\frac{2}{5}\text{ km}$ ; b)  $3\text{ cm}$ ; c)  $\frac{3}{10}\text{ dm}$ ; d)  $234\text{ mm}$ ?

8. Koliko je grama: a)  $\frac{3}{4}\text{ kg}$ ; b)  $\frac{13}{25}\text{ kg}$ ?

9. Koliko je minuta: a)  $\frac{1}{2}\text{ sata}$ ; b)  $\frac{1}{6}\text{ sata}$ ?

10. Izračunaj: a)  $\frac{5}{12} \cdot \frac{6}{15}$ ; b)  $\frac{7}{14} \cdot \left(-\frac{42}{21}\right)$ ;

c)  $\frac{-17}{44} \cdot \left(-\frac{55}{34}\right)$ ; d)  $\frac{5}{100} \cdot \left(\frac{-50}{-20}\right)$ .

11. Izračunaj umnožak:

- |   |   |
|---|---|
| a) $-6 \cdot 3 \cdot 5$ ;                 | b) $-8 \cdot (-2) \cdot 6$ ;            |
| c) $-7 \cdot 1 \cdot 6 \cdot (-2)$ ;      | d) $-5 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3$ ;       |
| e) $0 \cdot (-9) \cdot (-5) \cdot (-3)$ ; | f) $-9 \cdot (-2) \cdot (-5) \cdot 0$ ; |
| g) $-6 \cdot (-9) \cdot 4 \cdot 3$ ;      | h) $5 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 8$ ;        |
| i) $6 \cdot (-3) \cdot (-2) \cdot (-4)$ . |   |

12. Izračunaj količnik:

a) $-27 : 9$ ;	b) $-49 : (-7)$ ;	c) $-14 : 7$ ;
d) $-50 : 5$ ;	e) $-9 : (-9)$ ;	f) $-60 : (-10)$ ;
g) $-48 : (-8)$ ;	h) $66 : 11$ ;	i) $6 : (-2)$ ;
j) $-20 : (-5)$ .		

13. Odaberij jednostavniji način rješavanja:

a) $-\frac{7}{2} \cdot \left(\frac{10}{3} + \frac{4}{5}\right)$ ;	b) $5 \cdot \left(\frac{7}{10} - \frac{9}{10}\right)$ ;
c) $\frac{3}{4} \cdot \left(\frac{4}{9} + \frac{4}{3}\right)$ ;	d) $-7 \cdot \left(\frac{11}{21} - \frac{9}{14}\right)$ .

14. Izračunaj:

a) $13 - (-4) \cdot 3$ ;	b) $6 + 30 : (-6)$ ;
c) $-18 : 3 + (-28) : (-7)$ ;	d) $-6 - 55 : 5 + 11$ ;
e) $5 - (-8) \cdot (-3)$ .	

15. Izračunaj:

a) $4 - 5 \cdot 3 - \left[ \frac{3}{2} + (-2) + 8 \cdot \left( -7 - 3.5 + \frac{1}{4} \right) \right]$ ;
b) $3.6 - [-7.5 - (-12 - 5) \cdot (-2)] \cdot (-2)$ ;
c) $-[-64 : (-16 + 8) - 9.9]$ ;
d) $-15.45 + 4 \cdot \{1.6 - 14 : [16 - 3 \cdot (-9 + 12)]\}$ .

16. Od  $2459.5\text{ kg}$  jabuka prvi je dan

$345.5\text{ kg}$ , a drugi dan  $\frac{1}{2}$  ostatka. Kolika je zarada u ta dva dana, ako je cijena jednog kilograma jabuka  $3.50\text{ kn}$ ?

17. U jednu kutiju stane  $40$  boca soka. Kolika je ukupna masa kutije, ako je masa prazne boce  $\frac{1}{4}\text{ kg}$ , masa soka u boci  $0.7\text{ kg}$  i masa prazne kutije  $2.5\text{ kg}$ ?

18. Jedan radnik za  $4$  sata obradi  $50.25\text{ m}^3$  drva, a drugi za  $5$  sati obradi  $60.5\text{ m}^3$  drva. Koliku količinu drva svaki od njih obradi za  $1$  sat? Koliku količinu drva bi obradili za  $1$  sat zajedno?

19. Majina obitelj je kupila zemljište površine  $250 \text{ m}^2$ . Na tom zemljištu žele imati kuću površine  $84.5 \text{ m}^2$ , bazen površine  $16 \text{ m}^2$  te vrt s travnjakom površine  $45.75 \text{ m}^2$ . Je li zemljište dovoljno veliko za sve njihove želje?
20. Od zemljišta površine  $2500.6 \text{ m}^2$  prodana su tri gradilišta površine  $502.25 \text{ m}^2$ ,  $499.5 \text{ m}^2$  i  $600.3 \text{ m}^2$ . Kolika je površina ostala za zelenilo?
21. Provjeri je li zadani broj rješenje jednadžbe.
- $x = 5$ ,  $2x = 10$ ;
  - $y = 7$ ,  $y + 4 = 15$ ;
  - $y = 4$ ,  $-3y - 6 = 1$ ;
  - $x = 2.5$ ,  $5x + 7.5 = 15$ ;
  - $y = -4.4$ ,  $12.4 + y = 8$ ;
  - $x = 1.7$ ,  $15 - 6x = 27$ .
22. Riješi jednadžbe:
- $x + 17 = 25$ ; b)  $z + 11 = -24$ ;
  - $x + 8.5 = 10$ ; d)  $27 + z = 179 - 11$ ;
  - $x \cdot (-25) = -100$ ; f)  $3.5 \cdot z = 14.35$ ;
  - $-9y = -10$ ; h)  $\frac{x}{13} = 5$ ; i)  $\frac{y}{-21} = 9$ ;
  - $z : 61 = -2.5$ .
23. Riješi jednadžbe:
- $7y + y = 64$ ;
  - $z + 6z = -63$ ;
  - $-3x - 5x = 152$ ;
  - $x - 6x - 1 = 2x + 5x + 11$ ;
  - $2.5y = 4y + 86.4$ ;
  - $10 - 30y - 150 = -200y + 20y + 500$ ;
  - $42z - 54 - 26z + 12 = 46 - 30z - 4 + 18z$ .
24. Riješi jednadžbe:
- $\frac{1}{3}x + 5 = \frac{3}{2}$ ; b)  $4 - \frac{4}{3}y = 2y$ ;
  - $\frac{x}{6} - \frac{1}{2} - 2.5 = 1 - \frac{x}{2} - \frac{2}{3}$ ; d)  $2x - \frac{x}{3} + \frac{1}{15} = 0.1$ .
25. Riješi jednadžbe:
- $4x - 114 - (6x - 120) - (8x - 74) = 0$ ;
  - $10(2 - 3x) + 6(5x - 2) - 14(4 - x) = 0$ ;
  - $12(0.44 - 2x) = -2.88$ .
26. Riješi jednadžbe:
- $\frac{2x+1}{5} + \frac{3x-2}{4} = \frac{2x-5}{2} - \frac{x+1}{10} - \frac{37}{20}$ ;
  - $10\left(x + \frac{2}{3}\right) - 4(6x - 1) = 6$ ;
  - $\frac{x-3}{8} + 3 = \frac{3x+127}{20} - \frac{x+9}{12}$ .
27. Vožnja od kuće do škole trajala je 48 minuta. Povratak je trajao 15 minuta dulje. Koliko je trajao povratak kući?
28. Matija je prodao svoju nogometnu loptu za  $61.50 \text{ kn}$ . To je  $17.50 \text{ kn}$  manje od cijene koju je platio za novu loptu. Kolika je bila cijena nove lopte?
29. Vlak prevali  $95 \text{ km}$  za jedan sat. Koliko traje putovanje od  $855 \text{ km}$ ?
30. Luka ima  $21$  bod, što je  $\frac{1}{4}$  bodova potrebnih da pobijedi u igri. Koliko mu je bodova potrebno za pobjedu?
31. Lukina baka je šest puta starija od njega. Baka i Luka zajedno imaju  $77$  godine. Koliko godina ima svatko od njih?
32. Dva para cipela koštaju  $680.98 \text{ kn}$ . Jedan par košta  $99.12 \text{ kn}$  više nego drugi. Koliko košta svaki par cipela?
33. U 6.b razredu ima  $28$  učenika. Djevojčica ima za  $2$  manje nego dječaka. Koliko je djevojčica, a koliko dječaka u tom razredu?
34. Bazen se jednom cijevi može napuniti za  $5$  sati, a drugom isprazniti za  $6$  sati. Za koje vrijeme će se bazen napuniti, ako se istodobno otvore obje cijevi?
35. Duljine stranica pravokutnika izražene u centimetrima su dva uzastopna parna prirodna broja. Opseg tog pravokutnika je  $300 \text{ cm}$ . Kolike su duljine stranica?
36. U nekom trokutu je jedan unutarnji kut veličine  $\alpha$ . Drugi unutarnji kut je peterostruko veći od kuta  $\alpha$ , a treći trostruko veći. Koliki su unutarnji kutovi tog trokuta?
37. Sljemenska žičara je dugačka  $4017 \text{ m}$ . Kojom brzinom treba voziti žičara da bismo na vrhu bili za  $20$  minuta.
38. Udaljenost između Zagreba i Kopenhagena je  $1600 \text{ km}$ . U isto vrijeme, jedan prema drugom krenu dva automobila. Automobil koji je krenuo iz Zagreba vozi  $70 \text{ km/h}$ . Automobil koji je krenuo iz Kopenhagena vozi  $90 \text{ km/h}$ .
- Koliku udaljenost će svaki od njih prijeći za sat vremena?
  - Nakon koliko vremena će se automobili sresti?
  - Koliko će biti udaljeni od Zagreba i Kopenhagena u trenutku susreta?

# 1. Koordinatni sustav u ravnini

## Važni pojmovi:

ishodište  
jedinična dužina  
brojevni pravac  
koordinata točke  
uređeni par  
koordinatne osi  
koordinatni sustav  
os apscisa  
os ordinata  
kvadrant

Od prvog razreda osnovne škole matematika se razdvaja na dvije velike grane: aritmetiku i geometriju. Čak se i bilježnice za aritmetiku i geometriju razlikuju. I u povijesti matematike dugo je vladala ista podjela: na **aritmetiku i geometriju**.

Matematika koja je razvijena u doba starogrčke civilizacije (od 6. st. *prije Kr.* do 5. st. *poslije Kr.*) većinom se oslanjala na geometriju i na tvrdnje koje se dokazuju strogim matematičkim pravilima. S druge strane, matematika koju su razvijali Arapi (od 8. do 13. st. *poslije Kr.*) najviše se oslanjala na brojeve i aritmetičke operacije.



ARITMETIKU SMO UZELI  
OD ARAPA, A GEOMETRIJU  
OD GRKA. OD GRKA U  
MATEMATIKU DOLAZE I  
TVRDNJE I TEOREMI KOJE  
TREBA DOKAZATI.



starogrčka matematika	arapska matematika
bavi se prvenstveno geometrijom	bavi se prvenstveno aritmetikom
matematika se temelji na strogoo definiranim tvrdnjama, svaki zaključak mora se dokazati	matematika je u službi praktičnih problema

Kasnije, u 15. i 16. st., Europljani su potpuno preuzeli arapsku i grčku matematiku. Današnja suvremena matematika zasniva se na temeljima koje su postavili stari Grci, a od Arapa smo preuzeli računske operacije i brojevni sustav, pa se zato brojke 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 i 9 nazivaju **arapskim brojkama**.



Francuski matematičar i filozof iz 17. st. **René Descartes** (čitamo: René Dekar) povezao je aritmetiku i geometriju uvođenjem koordinatnog sustava. Upravo o tome važnom matematičkom otkriću naučit ćemo više u poglavlju Koordinatni sustav u ravnini.

*U ovom poglavlju ćeš, primjerice, naučiti:*

- Kako nastaje brojevni pravac te kako točkama na njemu pridružujemo brojeve
- Kako nastaje koordinatni sustav na pravcu, a zatim i koordinatni sustav u ravnini
- Kako parovima racionalnih brojeva pridružujemo točke, koristeći koordinatni sustav u ravnini
- Kako povezujemo zemljopisnu kartu s matematikom
- Zašto je važno u kino-dvorani razlikovati retke i stupce

René Descartes



### Brzinski usmeni zadaci za ponavljanje

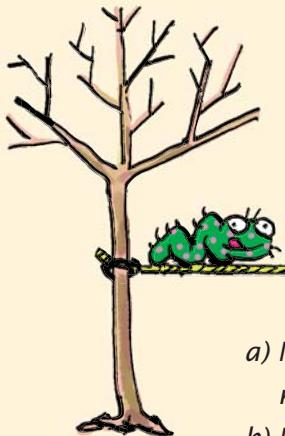
1. Između kojih se cijelih brojeva nalaze decimalni brojevi: 2.3, 0.9, 7.6, 12.1 i 13.13?
2. Između kojih se cijelih brojeva nalaze decimalni brojevi: -2.3, -0.9, -0.6, -3.1 i -5.13?

3. Između kojih se cijelih brojeva nalaze brojevi:

$$11.3, \frac{4}{9}, 2\frac{3}{5}, -0.99, \frac{4}{2}, -3.11, -1\frac{1}{2} ?$$

4. Navedi postupke kako od pravca nastaje brojevni pravac.

## 1.1. Koordinatni sustav na pravcu



*Gusjenica*

Gusjenica na slici hoda po užetu. U jednoj minuti ona prijeđe 2 cm.



- Na užetu na slici nacrtaj gdje će se gusjenica nalaziti nakon 2 min te nakon 3 min.
- Nakon koliko će vremena gusjenica prijeći 3 cm?
- Nakon koliko će vremena gusjenica prijeći 4.5 cm?

Kretanje gusjenice po užetu iz uvodnog zadatka možemo usporediti sa smještajem točaka na brojevni pravac. Iz prethodnih razreda znamo da se svakom racionalnom broju može pridružiti po jedna točka brojevnog pravca. Prisjetimo se kako.

ishodište  
jedinična točka  
jedinična dužina  
brojevni pravac

Nacrtajmo pravac, na njemu odaberimo neku točku i označimo je slovom  $O$ . Ta se točka naziva **ishodištem**.

Zdesna od točke  $O$  istaknimo još jednu točku i označimo je slovom  $E$ . Točki  $O$  pridružimo broj 0, a točki  $E$  pridružimo broj 1. Točka  $E$  naziva se **jediničnom točkom**. Dužina  $\overline{OE}$  naziva se **jediničnom dužinom**, a pripadajući pravac naziva se **brojevnim prvcem**.



### Primjer 1. Pridruživanje decimalnih brojeva točkama pravca

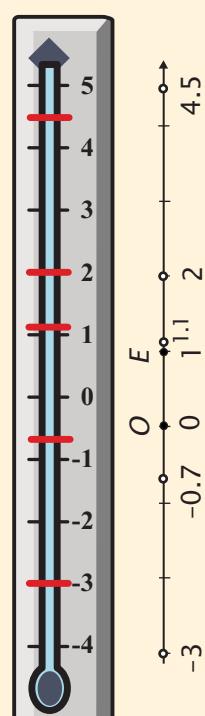
Na termometru na slici odredi točke pridružene temperaturama  $2^{\circ}\text{C}$ ,  $-3^{\circ}\text{C}$ ,  $4.5^{\circ}\text{C}$ ,  $-0.7^{\circ}\text{C}$  i  $1.1^{\circ}\text{C}$ .



Na tako određen pravac možemo smjestiti svaki racionalni broj. Pomoću nekoliko primjera prisjetimo se kako pridružujemo racionalne brojeve točkama brojevnog pravca.

### Rješenje:

Za pridruživanje decimalnih brojeva  $4.5$ ,  $-0.7$  i  $1.1$  jediničnu dužinu termometra treba podijeliti na deset jednakih dijelova jer su zadani brojevi prikazani u desetinkama. Pritom se možemo služiti ravnalom iz školskog pribora.

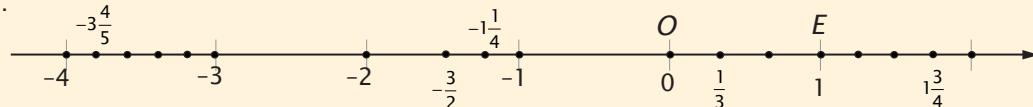


## Primjer 2. Pridruživanje razlomaka točkama pravca

Na brojevnom pravcu jedinične duljine 2 cm približno odredi točke pridružene brojevima  $\frac{1}{3}, -\frac{3}{2}, 1\frac{3}{4}, -2, -3\frac{4}{5}$  i  $-1\frac{1}{4}$ .

### Rješenje:

Prisjetimo se, za pronalaženje trećina jediničnu duljinu dijelimo na tri jednakih dijela, za polovine na dva jednakih dijela, za četvrtine na četiri itd. Znamo li da se broj  $\frac{1}{3}$  nalazi između cijelih brojeva 0 i 1, broj  $-\frac{3}{2} = -1\frac{1}{2}$  između -1 i -2, broj  $1\frac{3}{4}$  između 1 i 2 itd., neće biti teško pronaći tražene točke:



## Primjer 3.

### Koordinatni sustav na pravcu

Na brojevnom pravcu jedinične duljine  $|OE| = 16$  mm pronađi točke  $A, B, C$  i  $D$  tako da je točka  $A$  pridružena broju  $\frac{5}{4}$ , točka  $B$  pridružena  $-0.5$ , točka  $C$  broju  $-3$ , a točka  $D$  broju  $2\frac{7}{16}$ .

### Rješenje:

Kako je  $|OE| = 16$  mm, polovina jedinične duljine bit će 8 mm, četvrtina će biti 4 mm, a šesnaestina će biti duga 1 mm.

Pridruživanje brojeva točkama pravca zapisujemo kao  $A(\frac{5}{4}), B(-0.5), C(-3)$  i  $D(2\frac{7}{16})$ .

U zapisu  $A(\frac{5}{4})$  broj  $\frac{5}{4}$  zove se **koordinata točke  $A$** .

Isto je tako  $-0.5$  koordinata točke  $B$ ,  $-3$  je koordinata točke  $C$ , a  $2\frac{7}{16}$  je koordinata točke  $D$  na brojevnom pravcu.

Ako je broju  $x$  pridružena točka  $T$  na brojevnom pravcu, kažemo da je  $x$  koordinata točke  $T$  i pišemo  $T(x)$ .

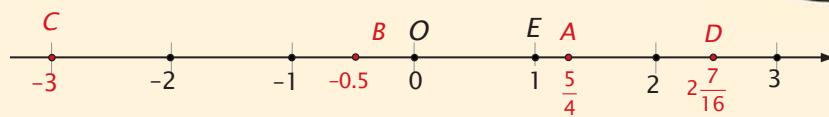
koordinata  
točke



Pripadni brojevni pravac nazivamo i koordinatnim pravcem.

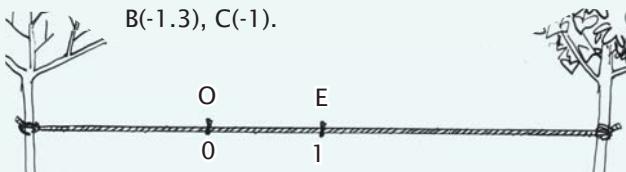
Odabirom ishodišta i jedinične duljine na pravcu kazujemo da smo uveli **koordinatni sustav na pravcu**. Tada svakom racionalnom broju možemo pridružiti jednu točku s toga brojevnog pravca.

koordinatni  
sustav na  
pravcu



## Zadaci

1. Nacrtaj ovakvu sliku u bilježnicu, pa postavi kvačice na uže sa slike na koordinate A(2.5), B(-1.3), C(-1).



2. Nacrtaj termometar i na njemu odredi točke pridružene temperaturama  $-1.2^{\circ}\text{C}$ ,  $-3.5^{\circ}\text{C}$ ,  $4.8^{\circ}\text{C}$ ,  $-2.5^{\circ}\text{C}$  i  $0.1^{\circ}\text{C}$ .
3. Na brojevnom pravcu jedinične dužine 1 cm pronađi točke pridružene brojevima  $2.2$ ,  $-0.9$ ,  $3.5$ ,  $1.8$ ,  $0.3$ ,  $-2$ ,  $-1.5$ .
4. Na brojevnom pravcu približno pronađi točke pridružene brojevima  $\frac{1}{5}$ ,  $-\frac{1}{5}$ ,  $-\frac{4}{5}$ ,  $\frac{11}{5}$ ,  $-\frac{15}{5}$ .
5. Na brojevnom pravcu jedinične dužine 1 cm pronađi točke pridružene brojevima  $\frac{1}{4}$ ,  $-\frac{3}{4}$ ,  $\frac{1}{2}$ ,  $-\frac{5}{2}$ ,  $\frac{8}{4}$ ,  $1\frac{3}{4}$ ,  $-2\frac{1}{2}$ .
6. Na brojevnom pravcu pronađi točke pridružene brojevima  $\frac{1}{3}$ ,  $-2$ ,  $2\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{4}$  i  $-3.5$ .
7. Koja je koordinata točke  $O$  na brojevnom pravcu?  
Koja je koordinata točke  $E$  na brojevnom pravcu?
8. U koordinatnom sustavu na pravcu približno pronađi točke  $V(-3\frac{1}{5})$ ,  $A(\frac{1}{8})$ ,  $R(-\frac{1}{4})$ ,  $I(3\frac{2}{7})$ ,  $C(\frac{11}{4})$ ,  $P(\frac{2}{4})$  i  $\tilde{C}(\frac{15}{3})$ .
9. U koordinatnom sustavu na pravcu približno pronađi točke s koordinatama  $-\frac{1}{10}$ ,  $3\frac{1}{6}$ ,  $-0.1$ ,

$$2.25, \frac{3}{4}, -\frac{7}{8} \text{ i } -4\frac{1}{10}.$$

10. Nacrtaj koordinatni sustav na pravcu jedinične dužine  $|OE|=16$  mm. Na njemu istakni točke  $U(\frac{13}{8})$ ,  $A(-4.5)$ ,  $L(-1\frac{7}{16})$ ,  $B(-1)$  i  $M(3\frac{3}{4})$ .

Ako u zadatku nije zadana duljina jedinične dužine, odaberite je tako da jednostavno možeš prikazati zadane razlomke.



11. Na brojevnom pravcu odaberite prikladnu jediničnu dužinu i istakni točke:
- $A(\frac{2}{3})$ ,  $B(-3\frac{2}{3})$ ,  $C(-\frac{13}{3})$ ,  $D(\frac{5}{3})$ ;
  - $K(-0.6)$ ,  $L(-2.1)$ ,  $M(\frac{4}{10})$ ,  $N(3.3)$ ;
  - $A(2\frac{3}{4})$ ,  $N(-\frac{14}{2})$ ,  $T(\frac{11}{4})$ ,  $S(-1.5)$ ;
  - $X(-\frac{7}{3})$ ,  $Y(\frac{13}{6})$ ,  $Z(2\frac{5}{6})$ ,  $W(\frac{1}{2})$ .
12. Nacrtaj koordinatni sustav na pravcu jedinične dužine  $|OE|=2$  cm. Na njemu istakni točke  $N(0.2)$ ,  $A(\frac{7}{10})$ ,  $U(-1\frac{1}{2})$ ,  $J(-3.5)$  i  $K(3\frac{3}{4})$ .
13. Na brojevnom pravcu istakni točke  $A(\frac{7}{10})$  i  $B(-0.9)$ . Zatim istakni tri točke koje se nalaze između točaka  $A$  i  $B$  i odredi njihove koordinate.

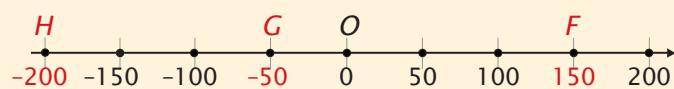
### Primjer 4.

U koordinatnom sustavu na pravcu pronađi točke  $F(150)$ ,  $G(-50)$  i  $H(-200)$ .

### Rješenje:

Koordinate zadanih točaka nalaze se daleko od ishodišta. Zato u ovom slučaju pravac zadajemo

dužinom 50 puta većom od jedinične jer su zadane koordinate  $150$ ,  $-50$  i  $-200$ .



### Primjer 5.

Pogledaj brojevni pravac na slici. Koje su koordinate točaka  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  i  $E$ ?



### Rješenje:

Pogledajmo jediničnu dužinu  $\overline{OE}$  na slici. Ona je podijeljena na četiri jednakaka dijela. Stoga je koordinata točke  $A$  jednaka  $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ . Pišemo  $A(\frac{1}{2})$ . Na isti način čitamo i ostale koordinate:  $B(-\frac{1}{2})$ ,  $C(-1)$ ,  $D(1\frac{1}{4})$  i  $E(1)$ .

## Zadaci

14. Na brojevnom pravcu istakni točke:

- a) A(-100), B(300), C(500), D(-300);
- b) F(75), G(125), H(-50), I(-150);
- c) J(40), K(100), L(-20), M(-80);
- d) N(500), P(-50), R(250), S(650).

15. Na brojevnom pravcu istakni točke:

- a) A(65), B(-45), C(-15), D(-20);
- b) A(300), B(-150), C(250), D(400);
- c) A(-0.75), B(-4.5), C(-2), D(-1.5);
- d) A(1.25), B(0.5), C(-3.75), D(-1.50).

16. U koordinatnom sustavu na pravcu istakni točke P(50) i R(75). Zatim pronađi točke A(-25), B(-200) i C(-275).

17. U koordinatnom sustavu na pravcu istakni točke A(-80) i B(100). Zatim približno pronađi točke K(-11), L(105) i F(-76).

18. Odredi koordinate istaknutih točaka sa slike:

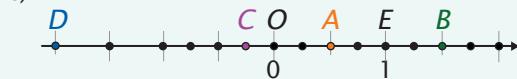
a)



b)



c)



19. Odredi koordinate istaknutih točaka na slikama:

a)



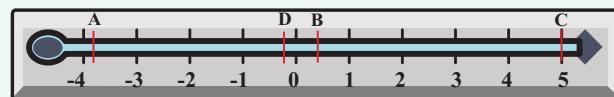
b)



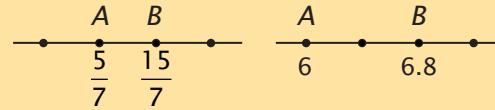
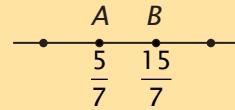
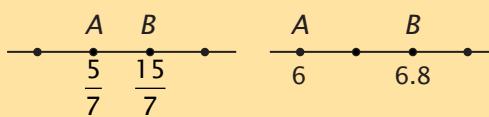
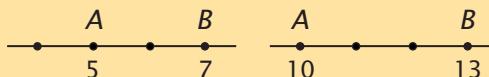
c)



20. Pročitaj i zapiši koordinate točaka A, B, C i D na slici:



Pogledaj ove slike. Na svakoj slici pronađi i ucrtaj polovište P dužine  $\overline{AB}$ . Koje su koordinate polovišta na svakoj slici?



Neka točke A i B imaju koordinate  $A(a)$  i  $B(b)$ .

Uvjeri se da tada polovište dužine  $\overline{AB}$  ima koordinatu  $\frac{a+b}{2}$ .

To zapisujemo u obliku  $P\left(\frac{a+b}{2}\right)$ .

21. Na pravcu nađi polovište  $P_1$  dužine  $\overline{AB}$  i polovište  $P_2$  dužine  $\overline{CD}$

ako su zadane koordinate točaka:

$$A(-4), \quad B(0), \quad C(7), \quad D(-3).$$

22. Na pravcu nađi polovište  $P_1$  dužine  $\overline{AB}$

i polovište  $P_2$  dužine  $\overline{CD}$  ako su zadane

koordinate točaka:

$$A\left(\frac{1}{4}\right), \quad B(0), \quad C\left(\frac{7}{4}\right), \quad D\left(\frac{-3}{4}\right).$$

23. Na pravcu nađi polovište  $P_1$  dužine  $\overline{AB}$  i

polovište  $P_2$  dužine  $\overline{CD}$  te izračunaj udaljenost  $|P_1P_2|$  ako su zadane koordinate točaka:

$$A(12.5), \quad B(-0.5), \quad C(-2.8), \quad D(-4.1).$$



## 1.2. Uređeni par



### Kino-ulaznice

Pogledaj ilustraciju. Sjede li Matija i Luka na istom sjedalu? Objasni svoj odgovor i nacrtaj položaj Matijina i Lukina sjedala u kino-dvorani.

Iako se u uvodnom zadatku na Matijinoj i Lukinoj ulaznici pojavljuju isti brojevi, 3 i 5, zaključit će da dječaci ne sjede na istom sjedalu. Često u životu moramo prikazati parove brojeva ili drugih objekata kod kojih se točno mora znati koji je prvi, a koji drugi. Takvi se parovi nazivaju **uređenim parovima**. Lukin uređeni par je (3, 5), a Matijin (5, 3).

UREĐENIM PAROVIMA POTPUNO ODREĐUJEMO NEKI POLOŽAJ.  
RECITE MI PRIMERE IZ ŽIVOTA.

ZAGREB SE NALAZI NA 45 STUPNJEVA SZŠ I 16 STUPNJEVA IZD. TO JE UREĐENI PAR (45,16)

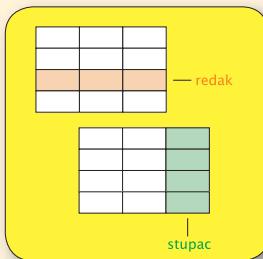
Uređeni par brojeva je par kod kojeg se zna koji je prvi, a koji drugi član para. Uređeni par brojeva  $a$  i  $b$  označavamo sa  $(a, b)$ . Broj  $a$  naziva se prvim članom, a broj  $b$  drugim članom uređenog para.

$(a, b)$  čitamo: „uređeni par a b“  
 $(a, b) \neq (b, a)$



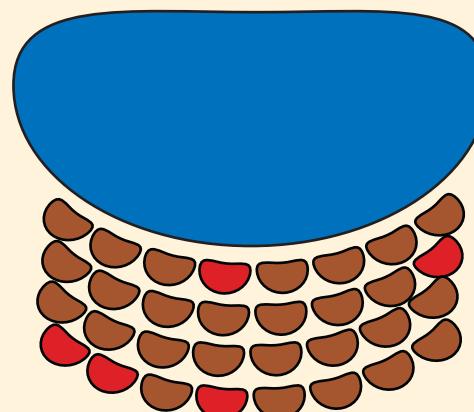
### Primjer 1. Uređeni par

a) Nacrtaj kazališnu dvoranu u kojoj su sjedala složena u 4 reda, a u svakom redu ima 8 stolaca;



b) Mjesto u dvorani možemo prikazati u obliku uređenog para (red, sjedalo). Na slici oboji sjedala (1, 4), (4, 1), (2, 8), (4, 4) i (4, 2).

### Rješenje:



## Primjer 2. Uređeni par

Nađi sve uređene parove kojima je prvi član 6, a drugi član je prosti broj manji od 12.

## Rješenje:

Prvi član uređenog para mora biti 6. Prosti brojevi manji od 10 su 2, 3, 5, 7 i 11. Stoga su traženi uređeni parovi (6, 2), (6, 3), (6, 5), (6, 7) i (6, 11).

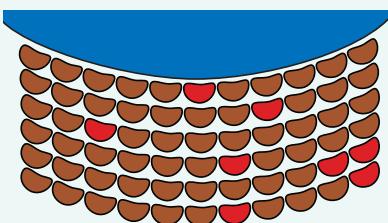
## Zadaci

1. Dvorana Malog kina ima 5 redova, a u svakom je redu 8 sjedala. Nacrtaj tlocrt te dvorane. Na slici su prodane ulaznice.

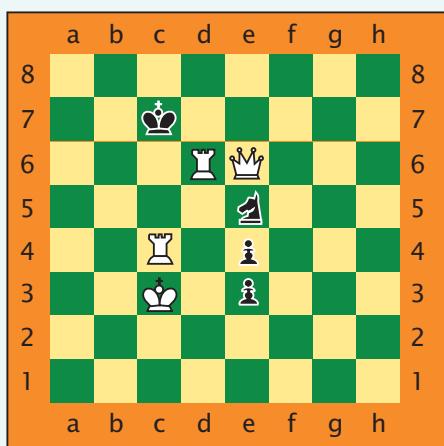


Crvenom bojom oboji zauzeta sjedala.

2. Crvenom bojom označena su zauzeta sjedala. Pogledaj sliku i pročitaj koja su sjedala zauzeta.



3. Odigrajte u razredu igru potapanja brodova (cijeli razred protiv učiteljice/učitelja). Učiteljica prije sata složi svoje brodove na kvadratični papir  $10 \times 10$ . Učenici na ploči nacrtaju polje  $10 \times 10$  i jedan učenik na njemu razmješta brodove (učiteljica ne gleda). Kada cijeli razred precrta tabelu, ona se briše s ploče i igra počinje.  
4. I razmještaj figura na šahovskoj ploči možemo promatrati kao uređene parove u kojima je prva koordinata stupac, a druga redak.

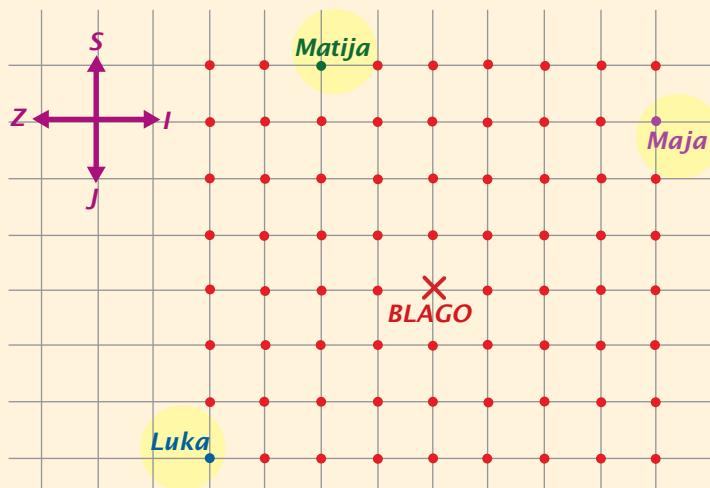


- a) Prepoznaćeš li figure na slici?  
b) Pogledaj sliku i pročitaj na kojim se poljima nalaze dane figure.  
c) Ako poznaješ šahovska pravila, razmisli kako bi bijeli matirao crnog u 2 poteza. Prvi je na potezu bijeli igrač.  
5. Nacrtaj šahovsku ploču i na njoj ucrtaj:  
a) Bijeli kralj se nalazi na G2, crni pješaci su na E2, G3 i H4. Crni skakač je na F3, a crni kralj je na G4.  
b) Kako će crni u 2 poteza matirati bijelog igrača? Prvi je na potezu crni.  
6. Nađi sve uređene parove koji se mogu sastaviti od brojeva  $-1, 2$  i  $-3$ .  
7. Nađi sve uređene parove koji se mogu sastaviti od brojeva  $0, 1, 2, \dots, 9, 10$  i kojima je prvi član jednak drugom članu.  
8. Nađi sve uređene parove koji se mogu sastaviti od parnih jednoznamenkastih brojeva i kojima je drugi član dvostruko manji od prvoga.  
9. Nađi sve uređene parove kojima je prvi član prosti jednoznamenkasti broj, a drugi član za 6 veći od prvog člana.  
10. Nađi sve uređene parove koji se mogu napisati pomoću brojeva  $3, 1, 7$  i  $5$  u kojima je zbroj prvog i drugog člana jednak 8.  
11. Nađi sve uređene parove koji se mogu napisati pomoću brojeva  $2, 4, -3, 0$  i  $-1$  u kojima je zbroj prvog i drugog člana jednak 1.  
12. Nađi sve uređene parove prirodnih brojeva čiji zbroj daje 5.  
13. Nađi sve uređene parove u kojima je drugi član jednak 12, a prvi je član djelitelj drugog člana.  
14. Nađi sve uređene parove prirodnih brojeva  $(a, b)$ , takve da je:  
a)  $a + b = 8$ ; b)  $a \cdot b = 12$ ;  
c)  $a : b = 1$ ; d)  $a + b \cdot 2 = 7$ .

## 1.3. Koordinatni sustav u ravnini

### Potraga za blagom

Luka, Maja i Matija igraju se potrage za blagom koje je zakopano negdje na livadi. Svaki je igrač dobio upute kako doći do blaga. Udaljenost između dvije susjedne točke na karti odgovara jednom koraku. Slijedi njihove upute i doznaj tko je pronašao škrinju s blagom!



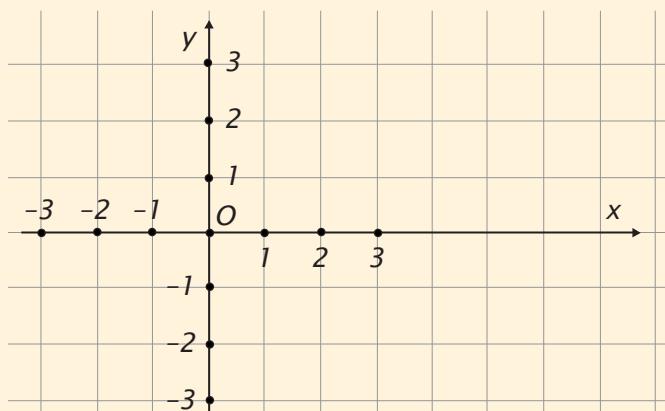
**LUKA ide:** 2 koraka na istok, 5 koraka na sjever, 1 korak na zapad, 4 koraka na istok, 2 koraka na jug

**MAJA ide:** 1 korak na jug, 1 korak na zapad, 5 koraka na jug, 3 koraka na zapad, 4 koraka na sjever, 1 korak na istok, 1 korak na jug

**MATIJA ide:** 2 koraka na zapad, 2 koraka na jug, 3 koraka na istok, 1 korak na sjever, 1 korak na istok, 3 koraka na jug

koordinatni  
sustav u ravnini  
koordinatna  
ravnina

Prisjetimo se gusjenice iz uvodnog zadatka u poglavlju 1.1 koja se kretala po pravcu. Primijetimo da se Maja, Luka i Matija ne kreću po pravcu, nego po ravnini. Kao što postoji koordinatni sustav na pravcu gdje brojevima pridružujemo točke pravca, ovdje ćemo promatrati **koordinatni sustav u ravnini** gdje uređenim parovima pridružujemo točke ravnine. Ravninu u koju smo uveli takav koordinatni sustav nazivamo **koordinatnom ravninom**.

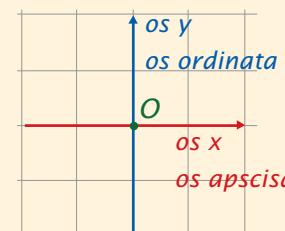


Nacrtajmo u ravnini dva okomita brojevna pravca koja se sijeku u točki  $O$  koja će biti ishodište obaju brojevnih pravaca. Tako smo dobili koordinatni sustav u ravnini. Jedan brojevni pravac označimo sa  $x$ , a drugi sa  $y$ . Neka ti brojevni pravci imaju jedinične dužine jednakih duljina.

Točku  $O$  nazivamo **ishodištem** koordinatnog sustava u ravnini. Pravce  $x$  i  $y$  nazivamo **koordinatnim osima**.

koordinatne osi  
os x ili os apscisa  
os y ili os ordinata

Pravac  $x$  nazivamo **os x ili os apscisa**. Pravac  $y$  nazivamo **os y ili os ordinata**.

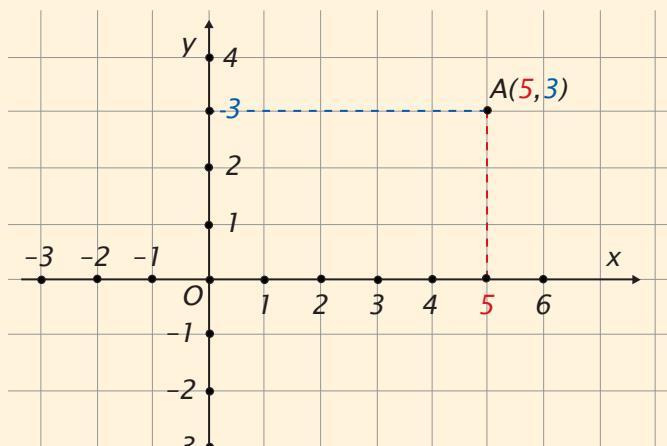


## Primjer 1. Pridruživanje uređenih parova točkama ravnine

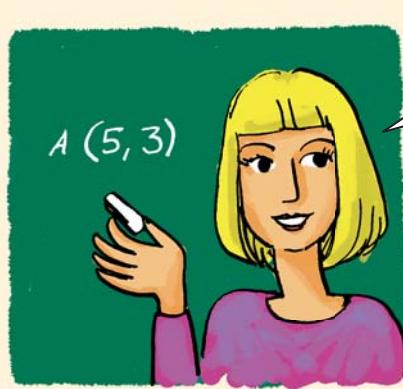
Uređenom paru  $(5, 3)$  pridruži točku A u koordinatnoj ravnini.

### Rješenje:

Zadan je uređeni par  $(5, 3)$ . Nacrtajmo koordinatni sustav u ravnini. Prvi član  $5$  uređenog para potražimo na osi x, a drugi član  $3$  na osi y. Pitamo se gdje je točka pridružena paru  $(5, 3)$ . Nađemo li točke  $5$  i  $3$  na koordinatnim osima, nije teško pronaći točku A kao na slici:

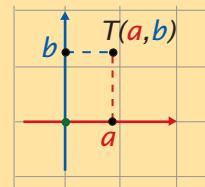


Članove uređenog para  $5$  i  $3$  nazivamo koordinatama točke A i pišemo  $A(5, 3)$ . Prvi član  $5$  nazivamo x-koordinatom točke A, a drugi član  $3$  nazivamo y-koordinatom točke A.



x-koordinata  
točke ili  
apscisa točke  
y-koordinata  
točke ili  
ordinata točke

Uređenom paru  $(a, b)$  pridružimo točku T u koordinatnoj ravnini.



x-koordinata ili  
apscisa točke T      y-koordinata ili  
ordinata točke T

Članove uređenog para  $(a, b)$  nazivamo koordinatama točke T i pišemo  $T(a, b)$ . Prvi član nazivamo x-koordinatom (1. koordinatom ili apscisom) točke T, a drugi član nazivamo y-koordinatom (2. koordinatom ili ordinatom) točke T. Točka T se u koordinatnoj ravnini nalazi na sjecištu pravaca usporednih s koordinatnim osima.

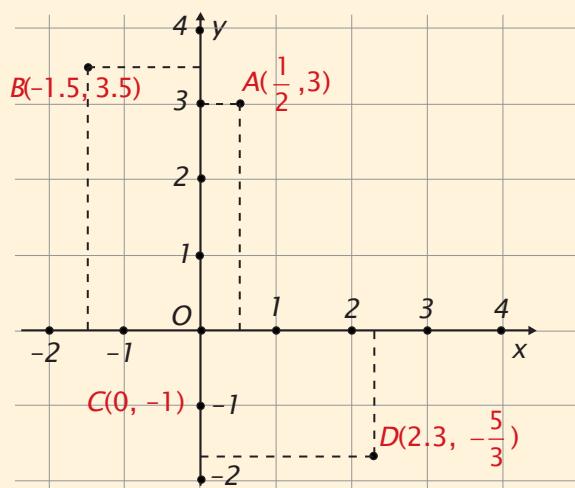
## Primjer 2.

### Točke s racionalnim koordinatama

U koordinatnoj ravnini istakni točke  $A(\frac{1}{2}, 3)$ ,  $B(-1.5, 3.5)$ ,  $C(0, -1)$  i  $D(-2.3, -\frac{5}{3})$ .

### Rješenje:

Točke s racionalnim koordinatama pronalazimo na isti način kao u Primjeru 1. Prvi član uređenog para potražimo na osi x, a drugi član na osi y.





## Zadaci

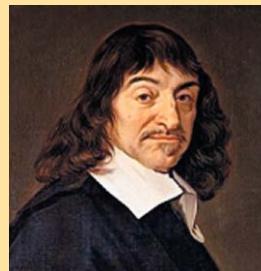
1. Uređenom paru  $(-4, 1)$  pridruži točku  $C$  u koordinatnoj ravnini.
2. U koordinatnoj ravnini istakni točke  $A(2, 3)$ ,  $B(-5, 5)$ ,  $C(1, -1)$  i  $D(-2, 4)$ .
3. U koordinatnoj ravnini istakni točke  $K(-3, 3)$ ,  $L(3, -3)$ ,  $M(3, 3)$  i  $N(-3, -3)$ .
4. U koordinatnoj ravnini istakni točke  $V(-6, 1)$ ,  $L(5, -2)$ ,  $A(-4, -4)$ ,  $T(-3, 3)$ ,  $K(0, -2)$ ,  $I(2, 3)$ ,  $C(-1, 4)$  i  $M(7, -3)$ .
5. Ucrtaj u koordinatni sustav ove točke. Spojiš li susjedne točke, dobit ćeš zanimljiv lik. Koji?  
 $A(-1, -2)$ ,  $B(1, -2)$ ,  $C(1, 0)$ ,  $D(4, 0)$ ,  $F(1, 2)$ ,  $G(3, 2)$ ,  $H(1, 4)$ ,  $I(2, 4)$ ,  $J(0, 6)$ ,  $K(-2, 4)$ ,  $L(-1, 4)$ ,  $M(-3, 2)$ ,  $N(-1, 2)$ ,  $P(-4, 0)$ ,  $R(-1, 0)$ .
6. Ucrtaj u koordinatni sustav točke i spoji redom:  
 $A(-5, 1)$ ,  $B(-3, -1)$ ,  $C(2, -1)$ ,  $D(4, 1)$ ,  $M(-1, 1)$  i  $A$ . Zatim spoji  $M$  i  $F(-1, 8)$ . Na kraju spoji redom  $H(-1, 2)$ ,  $I(-3, 2)$ ,  $F$ ,  $G(3, 2)$  i  $H$ .
7. Nacrtaj u koordinatnom sustavu točke od  $A$  do  $V$  i spoji ih redom. Dobit ćeš sliku jedne ptice. Koje?  
 $A(8, 5)$ ,  $B(3, 4)$ ,  $C(1, 3)$ ,  $D(0, 1)$ ,  $E(-1, 1)$ ,  $F(-2, 0)$ ,  $G(0, -1)$ ,  $H(1, -3)$ ,  $I(3, -4)$ ,  $J(8, -5)$ ,  $K(5, -4)$ ,  $L(3, -3)$ ,  $M(2, -1)$ ,  $N(5, -1)$ ,  $O(11, -2)$ ,  $P(6, 0)$ ,  $R(12, 2)$ ,  $S(5, 1)$ ,  $T(2, 1)$ ,  $U(2, 2)$  i  $V(3, 3)$ .
8. Nacrtaj u koordinatnom sustavu točke od  $A$  do  $R$  i spoji ih redom. Zatim nacrtaj točku  $S$ . Dobit ćeš sliku jedne životinje.  
 $A(-5, 0)$ ,  $B(-4, 1)$ ,  $C(-2, 2)$ ,  $D(-1, 2)$ ,  $E(0, 3)$ ,  $F(3, 3)$ ,  $G(2, 2)$ ,  $H(5, 1)$ ,  $I(8, 2)$ ,  $J(6, 0)$ ,  $K(9, -2)$ ,  $L(5, -1)$ ,
- $M(2, -2)$ ,  $N(1, -2)$ ,  $O(2, -3)$ ,  $P(-1, -3)$ ,  $Q(-2, -2)$  i  $R(-4, -1)$ . Točka  $S$  ima koordinate  $S(-3, 0.5)$ .
9. U koordinatnoj ravnini istakni točke  $A(2.5, -2)$ ,  $B(1.5, -2.5)$ ,  $C(1, 0.5)$  i  $D(4.5, -0.5)$ .
10. U koordinatnoj ravnini istakni točke  $A(-0.4, -1.1)$ ,  $B(0, -3.2)$ ,  $C(1.3, -4.8)$  i  $D(-1.4, 0.4)$ .
11. Zadane su točke  $M(-2.4, -1)$ ,  $N(0, -4.2)$ ,  $P(2.2, -3.5)$  i  $R(-5.1, 1)$ .
  - Ucrtaj ih u koordinatnu ravninu;
  - Procijeni koja je od tih točaka najudaljenija od ishodišta, a koja mu je najbliža;
  - Ravnalom provjeri točnost svoje procjene iz zadatka b.
12. U koordinatnoj ravnini istakni točke  $A(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ ,  $B(\frac{3}{2}, 0)$ ,  $C(-1\frac{1}{2}, -3\frac{1}{2})$  i  $D(-\frac{7}{2}, \frac{1}{2})$ .
13. U koordinatnoj ravnini istakni točke  $A(-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2})$ ,  $B(1\frac{1}{4}, \frac{5}{4})$ ,  $C(-4\frac{1}{4}, -\frac{2}{4})$  i  $D(-\frac{11}{4}, 4)$ .
14. U koordinatnoj ravnini otprilike istakni točke  $K(\frac{2}{3}, \frac{1}{6})$ ,  $B(-\frac{7}{5}, 0)$ ,  $M(-1\frac{1}{3}, -3\frac{1}{2})$  i  $H(-\frac{12}{3}, \frac{1}{5})$ .
15. U koordinatnoj ravnini otprilike istakni točke  $X(-5.2, -\frac{5}{6})$ ,  $Y(0, 0.9)$ ,  $W(-3\frac{1}{7}, 7.1)$  i  $Q(-\frac{22}{5}, 4.2)$ .
16. U koordinatnoj ravnini otprilike istakni točke  $R(-0.25, -\frac{3}{4})$ ,  $T(0.75, 1.5)$ ,  $S(-2.25, 0)$  i  $V(-\frac{17}{4}, 4.25)$ .
17. U koordinatnoj ravnini nacrtaj dužinu  $\overline{CD}$  ako je zadano  $C(-2.75, 5.5)$ ,  $D(-\frac{3}{2}, -\frac{13}{4})$ .

18. U koordinatnoj ravnini nacrtaj trokut čiji vrhovi imaju koordinate  $A(-4, 1.5)$ ,  $B(-2, -3)$  i  $C(1, -3)$ . Kojoj vrsti pripada taj trokut:
- s obzirom na duljine stranica;
  - s obzirom na veličine kutova.
19. Nacrtaj četverokut  $ABCD$ , takav da je  $A(-0.5, -1)$ ,  $B(3, -1)$ ,  $C(4, 3)$  i  $D(0.5, 3)$ . Kojoj vrsti pripada taj četverokut?



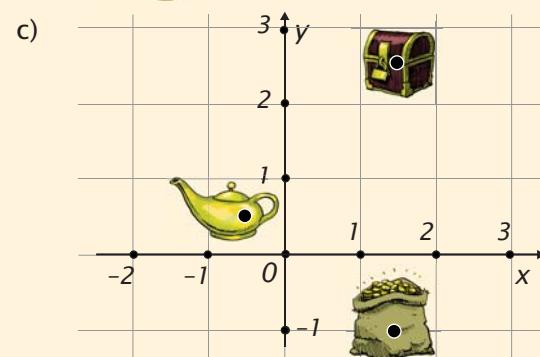
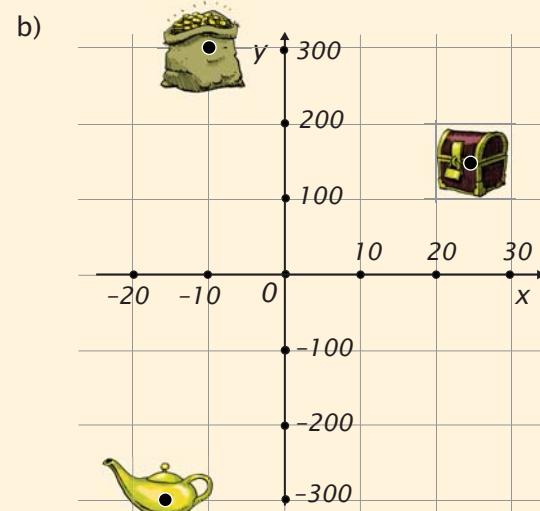
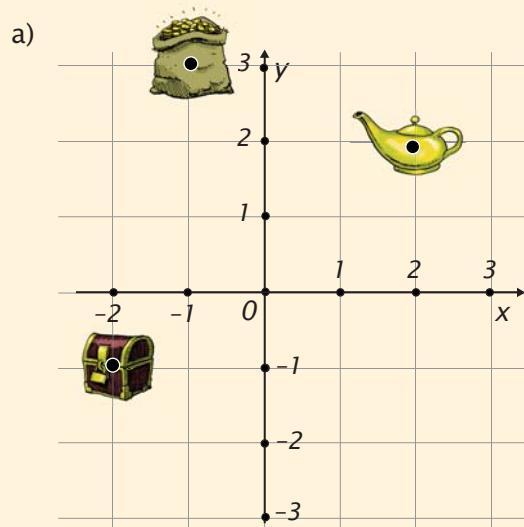
Koordinatni sustav uveo je francuski matematičar i filozof René Descartes (čitamo: Rene Dekar) u 17. stoljeću. On je jedan od najvažnijih matematičara u povijesti jer je povezao dvije grane matematike: geometriju i aritmetiku. Povezao ih je upravo uvođenjem koordinatnog sustava! Nacrtamo li u koordinatnoj ravnini bilo koju **točku** (a točka je *geometrijski objekt*), možemo joj pridružiti **uređeni par** brojeva (a brojevi pripadaju *aritmetici*). Na isti način povezujemo skupove točaka s aritmetikom: pravac ima svoju jednadžbu, kružnica ima svoju jednadžbu, kao i svaka krivulja.

Kako su u 17. st. znanstvenici pisali svoja djela na latinskom jeziku, bilo je uobičajeno da svaki matematičar prevede i svoje ime i prezime na latinski jezik. Tako je francusko ime René Descartes prevedeno u latinsko Renatus Cartesuis (čitamo: Kartezijus). Po njemu koordinatni sustav nazivamo i **Kartezijevim koordinatnim sustavom**.



### Primjer 3. Pridruživanje točaka ravnine uređenim parovima

Pogledaj slike i pronađi koordinate škrinje s blagom, čarobne svjetiljke i vreće sa zlatnicima.



### Rješenje:

Prvu koordinatu zadane točke tražimo na osi  $x$ , a drugu na osi  $y$ .

- a) Škrinja ima koordinate  $(-2, -1)$ , svjetiljka ima koordinate  $(2, 2)$ , a vreća s blagom ima koordinate  $(-1, 3)$ ;

b) Škrinja ima koordinate  $(25, 150)$ , svjetiljka ima koordinate  $(-15, -300)$ , a vreća s blagom ima koordinate  $(-10, 300)$ .

c) Škrinja ima koordinate  $(1.5, 2.5)$ , svjetiljka ima koordinate  $(-0.5, 0.5)$ , a vreća s blagom ima koordinate  $(1.5, -1)$ ;

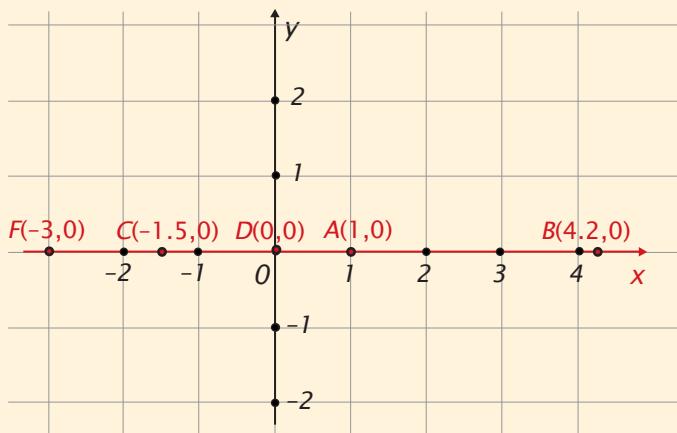
### Primjer 4: Koordinatne osi

U koordinatnoj ravnini pronađi ove točke:

- a)  $A(1, 0)$ ,  $B(4.2, 0)$ ,  $C(-1.5, 0)$ ,  $D(0, 0)$ ,  $F(-3, 0)$ ;  
 b)  $K(0, -2)$ ,  $L(0, -1.1)$ ,  $M(0, 0)$ ,  $N(0, 2.5)$ ,  
 $P(0, 1.25)$ .

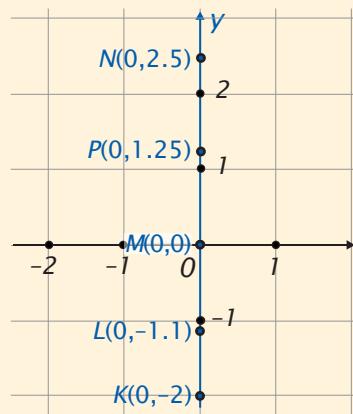
### Rješenje:

- a) Primijetimo da sve zadane točke imaju  $y$ -koordinatu 0. Pronađimo ih u ravnini.



Zaključujemo da točke s  $y$ -koordinatom 0 leže na osi  $x$ .

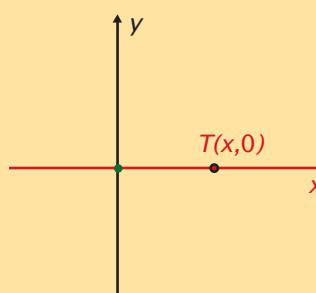
- b) Primijetimo da sve zadane točke imaju  $x$ -koordinatu 0. Pronađimo ih u ravnini.



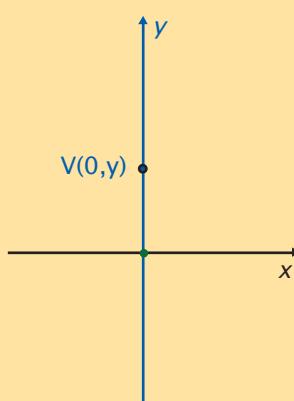
Zaključujemo da točke koje imaju  $x$ -koordinatu 0 leže na osi  $y$ . Također, primjetimo da ishodište pripada i osi  $x$  i osi  $y$ .

Koordinate ishodišta su  $(0, 0)$ .

Sve točke s  $x$ -osi imaju drugu koordinatu ili ordinatu jednaku 0. One su oblika  $T(x, 0)$ .



Sve točke sa  $y$ -osi imaju prvu koordinatu ili apscisu jednaku 0. One su oblika  $V(0, y)$ .

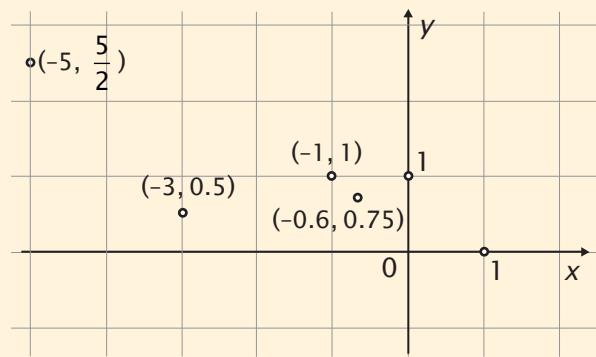


### Primjer 5: Kvadranti

Što je zajedničko ovim točkama:  $(-3, 0.5)$ ,  $(-1, 1)$ ,  $(-0.6, 0.75)$ ,  $(-5, \frac{5}{2})$ ? Nacrtaj ih u koordinatnoj ravnini.

### Rješenje:

Svaka od zadanih točaka ima prvu koordinatu negativnog predznaka, dok im je druga koordinata pozitivna. U ravnini to izgleda ovako:

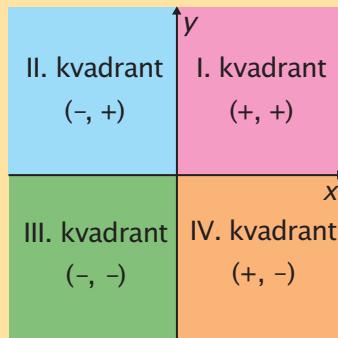


Sve zadane točke nalaze se u istoj četvrtini ravnine koju određuju negativna grana osi  $x$  i

pozitivna grana osi  $y$ . Kažemo da se sve zadane točke nalaze u drugom **kvadrantu**.

**kvadrant**

Koordinatne osi koje su međusobno okomite dijele ravninu na četiri jednaka dijela. Svaki taj dio naziva se **kvadrant**. Kvadranti se označavaju rednim brojevima kao na slici:



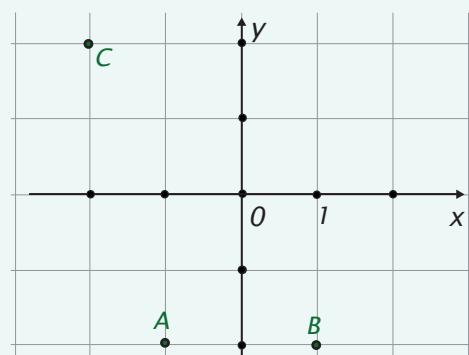
BEZ CRTANJA  
ODGOVORITE: U KOJEM  
SE KVADRANTU NALAZI  
TOČKA  $(233, -1208)$ ?



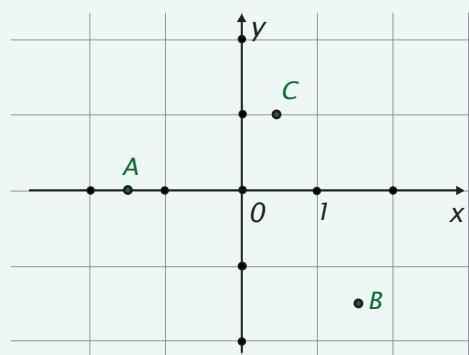
## Zadaci

20. Odredi koordinate točaka  $A$ ,  $B$  i  $C$  na slikama:

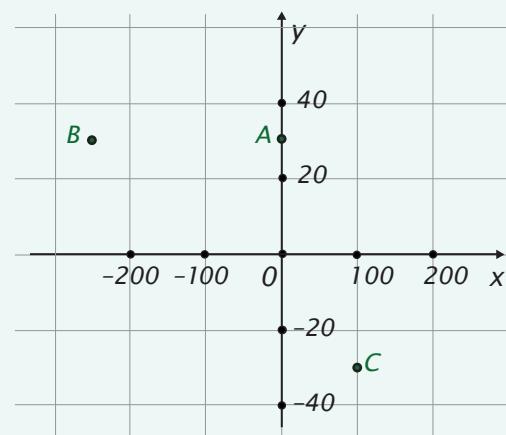
a)



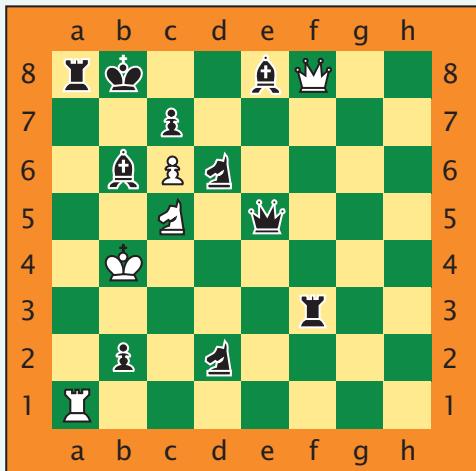
b)



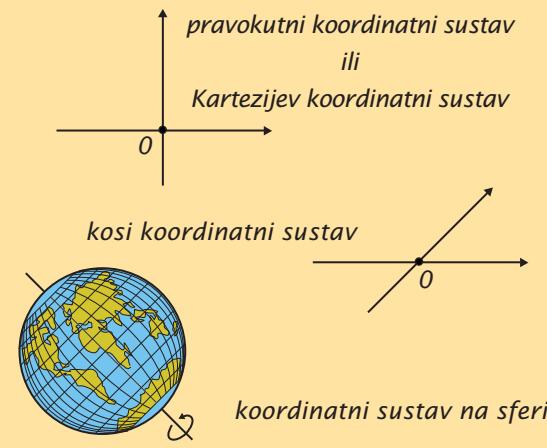
c)



21. Pogledaj ponovo uvodni zadatak o potrazi za blagom. Zamisli da se Luka nalazi u ishodištu koordinatnog sustava.
- Koje su početne i završne Lukine koordinate?
  - Koje su koordinate blaga?
  - Koje su početne i završne Matijine koordinate?
  - Koje su početne i završne Majine koordinate?
22. Nalaziš se na točki s koordinatama  $(-2, 1)$ . Kreni dva koraka prema zapadu, zatim jedan prema jugu, zatim 3 prema istoku i jedan prema sjeveru. Koje su tvoje koordinate? (Jedinična dužina duga je kao jedan korak)
23. Prisjeti se slike životinja u koordinatnoj ravnini iz zadataka 5, 6, 7 i 8 koje se dobiju spajanjem točaka. Nacrtaj i ti neki svoj lik u koordinatnoj ravnini i ispiši njegove točke. Zatim daj prijatelju iz klupe da riješi zadatak.
24. a) Koje su koordinate ishodišta u koordinatnoj ravnini?  
b) Koje su koordinate jediničnih točaka u koordinatnoj ravnini?
25. Luka je zamislio jednu točku na osi  $y$ . Možeš li točno odrediti bar jednu njezinu koordinatu?
26. Pogledaj sliku i odgovori:
- Na kojem polju se nalazi crni kralj ?
  - Na kojem polju se nalazi bijeli skakač ? Na koja sve polja on može skočiti?



Postoje razni koordinatni sustavi, primjerice:

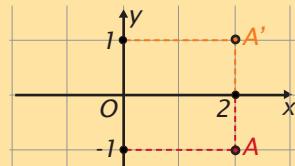


27. Otvori geografsku kartu Hrvatske i pronađi koje su koordinate Zagreba, Samobora, Varaždina, Ludbrega, Ivanić Grada, Korčule i Osijeka.
28. Iz atlasa pročitaj koordinate ovih gradova: New York, Budimpešta, Berlin, London, Bruxelles i Rio de Janeiro.
29. Kojem kvadrantu pripadaju točke  $A(1, -200)$ ,  $B(4.2, 3)$ ,  $C(-1.5, -30)$ ,  $D(0.001, 0.001)$ ,  $F(-3\frac{5}{7}, 0.3)$ ?
30. Kojem kvadrantu pripadaju točke  $A(-21, -3)$ ,  $B(0, -3.3)$ ,  $C(1, 0)$ ,  $D(-25, 26)$ ,  $F(\frac{1}{4}, 0.25)$ ?
31. Zaokruži točke koje pripadaju osi  $x$ :  $P(0, -3)$ ,  $R(0, 4)$ ,  $S(10, 0.001)$ ,  $T(-25, 0)$ ,  $U(0, 0)$ .
32. U koordinatnoj ravnini nacrtaj po tri točke koje pripadaju:
- I. kvadrantu;
  - II. kvadrantu;
  - III. kvadrantu;
  - IV. kvadrantu.
- Pronađi koordinate svake od nacrtanih točaka.
33. Nacrtaj pet točaka koje pripadaju osi  $x$ . Pronađi njihove koordinate.
34. Nacrtaj pet točaka koje pripadaju osi  $y$ . Pronađi njihove koordinate.
35. Nacrtaj dvije točke na osi  $x$  i dvije na osi  $y$  tako da one čine vrhove kvadrata.

## Zadaci

### Osnova simetrija u koordinatnoj ravnini

U koordinatnoj ravnini nacrtana je točka  $A(2, -1)$ . Pogledajmo na slici gdje se nalazi njezina osnosimetrična slika s obzirom na os  $x$ .



Pogledajmo što se dogodilo s koordinatama nakon osne simetrije s obzirom na os  $x$ . Slika točke  $A(2, -1)$  je točka  $A'(2, 1)$ . Prva koordinata ostala je ista, dok je druga promjenila predznak.

Nacrtaj osnosimetričnu sliku točke  $A$  s obzirom na os  $y$  i pogledaj što se dogodilo s koordinatama nakon osne simetrije.

36. Točkama  $A(-6, -8)$ ,  $B(1.5, -\frac{5}{2})$  i  $C(-2, 0.4)$  odredi osnosimetrične slike s obzirom na:

- os apscisu;
- os ordinatu.

37. U koordinatnoj ravnini nacrtaj trokut s vrhovima  $A(-1, -7.5)$ ,  $B(5, -2.5)$  i  $C(0, 0.2)$ . Kojoj vrsti pripada taj trokut s obzirom na duljine stranica?

Nađi njegovu osnosimetričnu sliku s obzirom na os  $x$ . Zatim nađi osnosimetričnu sliku novog trokuta s obzirom na os  $y$ .

38. U koordinatnoj ravnini nacrtaj četverokut s vrhovima  $A(1, 3)$ ,  $B(3, 1)$ ,  $C(5, 3)$  i  $D(3, 5)$ . Kako se zove taj četverokut? Nađi njegovu osnosimetričnu sliku s obzirom na os  $y$ .

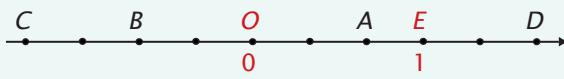
## 1.4. Ponavljanje

### Pitanja za ponavljanje:

- Koje su koordinate ishodišta u koordinatnom sustavu na pravcu?
- Koje su koordinate ishodišta u koordinatnom sustavu u ravnini?
- Koje su koordinate jedinične točke na brojevnom pravcu?
- Koje su koordinate jediničnih točaka u koordinatnom sustavu u ravnini?
- Koje od ovih točaka pripadaju koordinatnom sustavu na pravcu, a koje koordinatnom sustavu u ravnini:  
 $A(2, 0)$ ,  $B(9)$ ,  $C(-3.2)$ ,  $D(-3, 2)$ ,  $E(1, 0)$ ,  $F(4)$ ?
- Kako se zove točka u kojoj se sijeku koordinatne osi u ravnini?
- Prepiši u bilježnicu, pa dopuni:  
os  $x$  ili \_\_\_\_\_
- Prepiši u bilježnicu, pa dopuni:  
os  $y$  ili \_\_\_\_\_
- Prepiši u bilježnicu, pa dopuni:  
Dio ravnine omeđen s dvije okomite koordinatne osi naziva se  
\_\_\_\_\_
- Na koliko kvadrantata dijelimo koordinatnu ravninu?
- Kako bez crtanja možemo odrediti kojem kvadrantu pripada neka točka kojoj su zadane samo koordinate?  
Navedi primjere.

## Zadaci za ponavljanje:

- Zamisli brojevni pravac s točkama  $A(3)$  i  $B(-3)$ . Napamet odredi koje se od zadanih točaka  $D(-2.8)$ ,  $F(14)$ ,  $G(1.4)$ ,  $H(0.14)$ ,  $I(-9.9)$ ,  $J(\frac{7}{2})$  nalaze između točaka  $A$  i  $B$  na brojevnom pravcu.
- Na brojevnom pravcu jedinične dužine 1 cm pronađi točke pridružene brojevima  $0.2, -0.1, 6.0, -4.8, -5, -2.9, -1.5$ .
- Na brojevnom pravcu jedinične dužine 1.5 cm pronađi točke pridružene brojevima  $-\frac{1}{5}, \frac{7}{5}, 2\frac{3}{5}, -\frac{16}{5}, \frac{15}{5}$ .
- Na brojevnom pravcu jedinične dužine 2 cm pronađi točke pridružene brojevima  $-\frac{9}{10}, 0.3, 2\frac{3}{10}, 2.3, \frac{3}{4}$ .
- Na brojevnom pravcu istakni točke  $A(-\frac{17}{10})$  i  $B(1.1)$ . Zatim istakni tri točke koje se nalaze između točaka  $A$  i  $B$  i odredi njihove koordinate.
- Odredi koordinate točaka na slici:



- Odredi koordinate istaknutih točaka sa slike:



- Na brojevnom pravcu istakni točke  $A(500)$ ,  $L(-350)$ ,  $K(-150)$ ,  $U(-250)$ .
- Odredi koordinate istaknutih točaka na slici:
  - 
  -
- Nadi sve uređene parove kojima je prvi član 1, a drugi član prosti broj manji od 10.
- Zapiši uređeni par kojem je prvi član jednak broju tvojih godina, a drugi član jednak broju tvojih cipela.
- Nadi sve uređene parove koji se mogu sastaviti od brojeva  $-1, 0$  i  $1$ . Pronadi ih u koordinatnoj ravnini.

- Nadi sve uređene parove prirodnih brojeva  $(a, b)$ , takve da je:
  - $a + b = 10$ ;
  - $a \cdot b = 20$ ;
- U koordinatnoj ravnini istakni točke  $K(-2, 3)$ ,  $L(1, -2)$ ,  $M(5, 0)$  i  $N(-1, -3)$ .
- U koordinatnoj ravnini istakni točke  $A(-2.5, 1)$ ,  $B(1.5, -0.5)$ ,  $C(5, 3.5)$  i  $D(-4.5, -4.5)$ .
- U koordinatnoj ravnini istakni točke  $A(2.25, -2)$ ,  $B(1.75, -2.5)$ ,  $C(1.5, 0.25)$  i  $D(4.25, -0.25)$ .
- U koordinatnoj ravnini istakni točke  $A(-\frac{9}{4}, -\frac{1}{2})$ ,  $B(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ ,  $C(-4\frac{1}{4}, -\frac{2}{4})$  i  $D(-\frac{13}{4}, 4)$ .
- U koordinatnoj ravnini nacrtaj dužinu  $\overline{CD}$  ako je zadano  $C(-2.25, -\frac{3}{2})$ ,  $D(5, -\frac{13}{4})$ .
- Otvori geografsku kartu. Koje su koordinate tvojega grada?
- Kojem kvadrantu pripadaju točke  $A(11, -20)$ ,  $B(-0.2, -3)$ ,  $C(1.5, 30)$ ,  $D(-0.007, 0.007)$ ,  $F(-3\frac{5}{7}, -6)$ ?
- Zaokruži točke koje pripadaju osi  $x$ :  $P(0, 8)$ ,  $R(0, 99)$ ,  $S(10.0, 0.001)$ ,  $T(-13, 0)$ ,  $U(0, 0)$ .
- Zaokruži točke koje pripadaju osi  $y$ :  $P(0, 0)$ ,  $R(0, -17)$ ,  $S(10, 0.001)$ ,  $T(10, 0)$ ,  $U(-\frac{9}{4}, 0)$ .
- Točkama  $A(2.3, -0.9)$ ,  $B(1, \frac{5}{2})$  i  $C(-2, 0)$  odredi osnosimetrične slike s obzirom na:
  - os apscisu;
  - os ordinatu.
- U koordinatnoj ravnini nacrtaj trokut s vrhovima  $A(2.5, 7.5)$ ,  $B(-2.5, -2.5)$  i  $C(4, 0.2)$ . Kojoj vrsti pripada taj trokut s obzirom na duljine stranica? Nadi njegovu osnosimetričnu sliku s obzirom na os  $x$ .
- U koordinatnoj ravnini nacrtaj četverokut s vrhovima  $A(2, 1)$ ,  $B(3, 2)$ ,  $C(0, 4)$  i  $D(-1, 3)$ . Kako se zove taj četverokut? Nadi njegovu osnosimetričnu sliku s obzirom na os  $y$ .

## Primjerak oglednog testa:

1. Na brojevnom pravcu jedinične dužine 2 cm prikaži brojeve  $-3.4$ ,  $0.7$ ,  $2$ ,  $1.25$ ,  $3\frac{2}{5}$ .

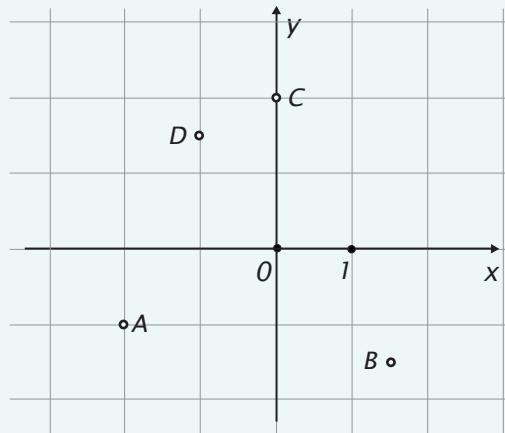
2. Odredi koordinate točaka na slici:



3. Prikaži u koordinatnom sustavu u ravnini točke:

$$A(4, -3), \quad B(-1, -\frac{3}{4}), \quad C(0, 1.5), \quad D(-2, -\frac{1}{2}).$$

4. Pročitaj koordinate točaka na slici:



5. Zapiši sve uređene parove  $(x, y)$  za koje vrijedi:

a)  $x$  je prosti broj manji od  $9$ ,  $y = 0$ ;

b)  $x \cdot y = 14$ ,  $x, y$  cijeli brojevi.

6. Kojem kvadrantu pripadaju točke  $A(5, -0.9)$ ,  $B(-1, \frac{3}{2})$  i  $C(-2, -4.5)$ ? Nacrtaj u koordinatnoj ravnini trokut  $ABC$ .

7. U koordinatnoj ravnini nacrtaj trokut s vrhovima  $A(1, -3.5)$ ,  $B(-4.5, 0.2)$  i  $C(-2.5, -2.5)$ . Kojoj vrsti pripada taj trokut s obzirom na veličine kutova? Nađi njegovu osnosimetričnu sliku s obzirom na os  $y$ .

# 2. Proporcionalne i obrnuto proporcionalne veličine

## Važni pojmovi

omjer

proporcija (razmjer)

proporcionalnost  
(razmjernost)

koeficijent proporcionalnosti

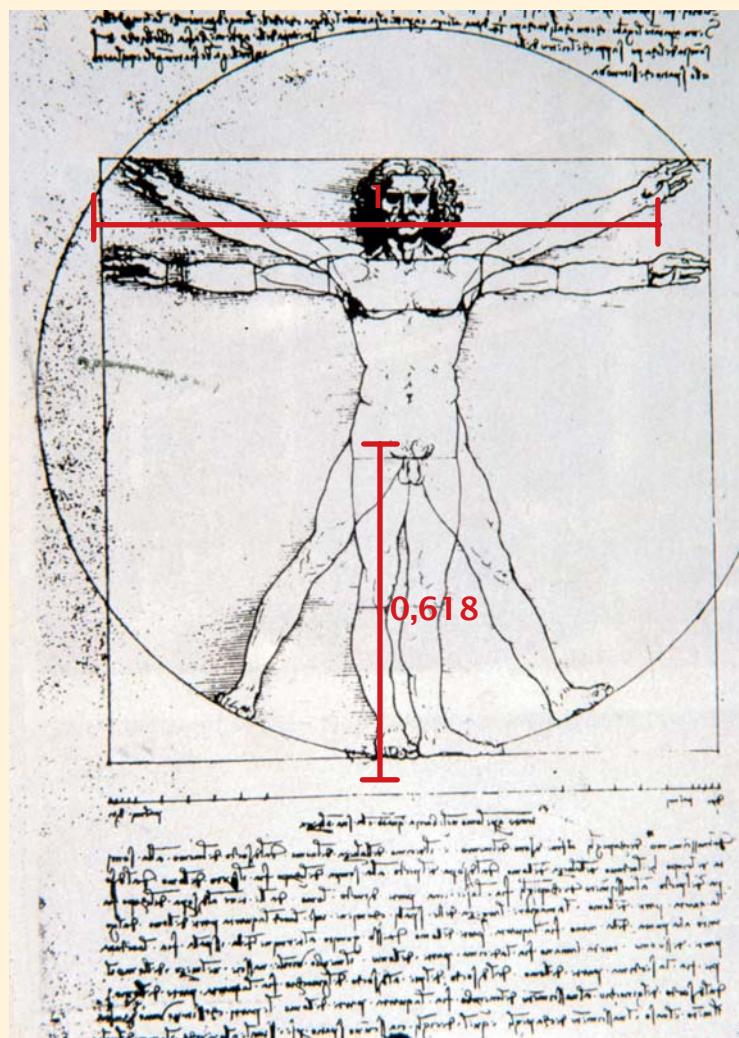
proporcionalne veličine

grafički prikaz proporcionalnosti

obrnuto proporcionalne veličine

**Zlatni rez** predstavlja odnos dvaju nejednakih dijelova neke dužine kod koje se manji dio odnosi prema većem dijelu kao što se veći dio odnosi prema ukupnoj duljini. Omjer zlatnog reza, koji često srećemo u umjetnosti, potječe iz matematike, odnosno iz geometrije. Za mnoge je ljudi zlatni rez zapravo proporcija najugodnija oku. Čini se da je time uspostavljen jedinstven kriterij ljepote jer zlatni rez možemo naći i u prirodi.

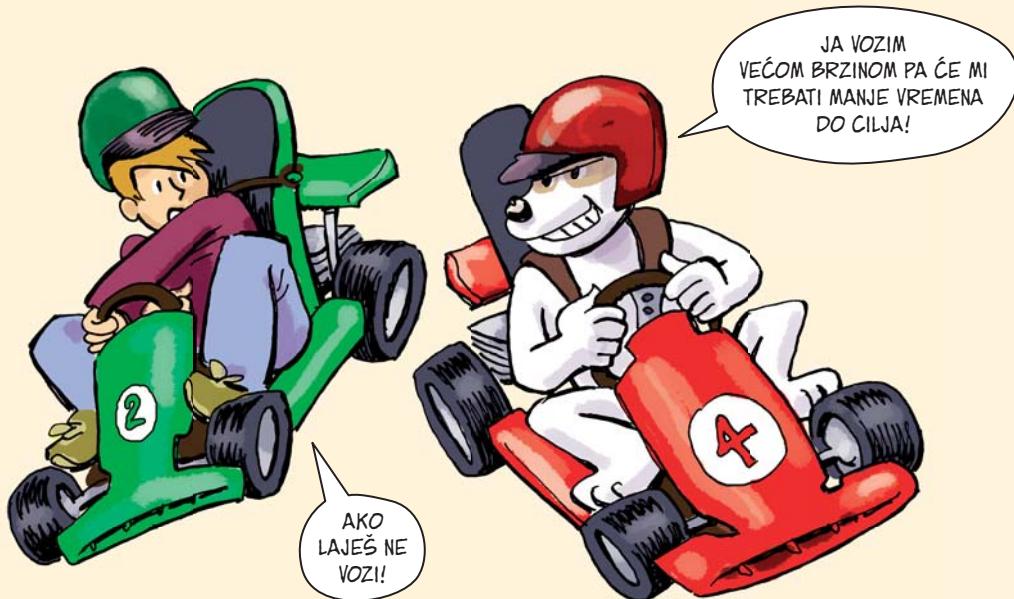
Zlatni rez datira najranije iz 300. godine pr. Kr., kada ga je Euklid opisao u svom glavnom djelu Elementi. Euklid podjelu dužine u omjeru zaključuje omjerom  $0.6180399 : 1$ .



Platimo li 1 kg jabuka 5 kn, koliko bismo platili 2 kg jabuka? Naravno, 10 kn. Količina jabuka i cijena koju za nju plaćamo su **proporcionalne ili razmjerne**. To znači da ako kupimo više jabuka, moramo platiti više – jednostavno, zar ne?

Suprotno od toga – radi li neki posao zajednički više ljudi, on će biti gotov za manje vremena. Takve su veličine **obrnuto proporcionalne** – jedna se povećava, druga se smanjuje.

**Vitruvijanski čovjek** – ilustracija Leonarda da Vincia iz 1492. godine. Prikazuje čovjeka upisanog u kružnicu odnosno kvadrat. Crtеж se čuva u Gallerie dell' Accademia u Veneciji. Na slici su naznačene veličine koje se odnose u omjeru zlatnog reza.



U ovom poglavlju ćeš, primjerice, naučiti:

- Kako odrediti omjere raznih veličina
- Kako točno izračunati količinu pojedinih sastojaka recepta ako ne želiš promijeniti njihov omjer
- Kako izračunati potrebnu količinu vode i boje ako znaš u kojem ih omjeru moraš pomiješati
- Kako prepoznati jesu li neke veličine proporcionalne ili obrnuto proporcionalne
- Kako izračunati potrebnu količinu benzina znajući potrošnju automobila

### Brzinski usmeni zadaci za ponavljanje

1. Luka je dva puta viši od svoga brata. Luka je visok 156 cm. Koliko je visok njegov brat?
2. U receptu za pecivo piše da su za 4 osobe potrebna 2 jajeta i 500 g brašna. Koliko je jaja i brašna potrebno ako želimo napraviti peciva za 2 osobe?

3. Cijena 3 kg krušaka je 21 kn. Koliko treba platiti 12 kg krušaka?
4. Luka treba složiti drva za ogrjev u podrum. Ako mu Matija pomogne, hoće li prije završiti posao?
5. Za 2 eura dobije se 15 kn. Koliko ćemo kuna dobiti za 20 eura?

## 2.1. Omjeri

### Koliko sam veći

Palcem i kažiprstom desne ruke izmjerite duljinu kažiprsta lijeve ruke. Zadržite tako razmaknute prste te duljinom svog kažiprsta izmjerite duljinu svoje lijeve ruke.

Koliko je puta ruka dulja od kažiprsta?

Usporedite dobivene rezultate s rezultatima prijatelja u razredu.

### Primjer 1. Tajanstvena sfinga



Luka je u enciklopediji pronašao ove podatke o Sfingi.

Sfingina usta dugačka su 210 cm, a duljina svakog njezina oka je 180 cm.

Mjereći, Luka je otkrio da je duljina njegova oka 3 cm.

Koliko je puta Sfingino oko dulje od Lukina?

#### Rješenje:

Da bismo odredili koliko je puta Sfingino oko dulje od Lukina, moramo te dvije veličine podijeliti, tj. staviti u omjer.

Duljina Sfingina oka : Duljina Lukina oka

$$180 : 3 = 60.$$

Dakle, Sfingino je oko šezdeset puta dulje od Lukina.

omjer

Kada govorimo koliko je puta jedna veličina veća od druge, zapravo govorimo o omjeru tih veličina. Naravno, možemo promatrati i koliko je puta jedna veličina manja od druge.

#### Važno

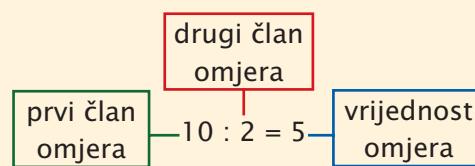
Izraz oblika  $a : b$  zovemo omjerom.

Čitamo ga "a naprema b".

Omjer dvaju brojeva jednak je količniku tih brojeva  $a : b = \frac{a}{b}$ .

U omjeru  $180 : 3 = 60$ . Broj 180 je **prvi član omjera**, broj 3 je **drugi član omjera**, a broj 60 je **vrijednost omjera**.

Drugi član omjera ne smije biti 0 jer se s nulom ne dijeli!



### Primjer 2. Čitanje omjera

a) Broj deset je pet puta veći od broja dva.

$$a : b = \frac{a}{b}$$

a naprema b

Kažemo da je omjer brojeva deset i pet jednak dva.

Pišemo:  $10 : 2 = 5$ . Čitamo "deset naprema dva jednako je pet".

b) Broj četiri je dva puta manji od broja osam.

Kažemo da je omjer brojeva četiri i osam jednak jedna polovina.

Pišemo:  $4 : 8 = \frac{1}{2}$  ili  $4 : 8 = 0.5$ . Čitamo "četiri naprema osam jednako je jedna polovina".

### Primjer 3. Omjer televizora

Omjeri se često upotrebljavaju u svakodnevnom životu, primjerice omjer širine i visine ekrana klasičnog televizora je  $4 : 3$ . Osim te vrste ekrana danas se izrađuju i vrlo su popularni tzv. *widescreen* televizori (eng. *wide screen* = širok ekran), kojima je omjer širine i visine ekrana  $16 : 9$ .



Izračunaj vrijednosti omjera za klasični i široki televizijski ekran.

### Rješenje:

Vrijednost omjera izračunavamo dijeljenjem.

$4 : 3 = \frac{4}{3} = 1.33333\dots$  S obzirom na to da je količnik beskonačan decimalni broj, možemo za vrijednost omjera uzeti vrijednost zaokruženu na dvije decimale, tj. 1.33 ili za preciznije računanje razlomak  $\frac{4}{3}$ .

Vrijednost omjera širokog ekrana je  $16 : 9 = \frac{16}{9} = 1.77777\dots$  Dakle, vrijednost omjera je približno 1.78 ili, preciznije  $\frac{16}{9}$ .

### Primjer 4. Udaljenost na karti

Geografska karta nacrtana je u omjeru (mjerilu)  $1 : 250\,000$ . To znači da je udaljenost između dvaju gradova u prirodi 250 000 puta veća nego njihova udaljenost na karti.

Ako je udaljenost između dvaju gradova na karti 2 cm, kolika je njihova udaljenost u prirodi?

### Rješenje:

Omjer udaljenost u prirodi : udaljenost na karti =  $250\,000$ .

Označimo li sa  $x$  udaljenost u prirodi, tada vrijedi:  $x : 2 = 250\,000$

$$x = 2 \cdot 250\,000 = 500\,000 \text{ cm} = 5\,000 \text{ m} = 5 \text{ km.}$$

Stvarna udaljenost između tih gradova je 5 km.

### Primjer 5. Rep

Zelembaćev rep čini  $\frac{2}{3}$  njegove ukupne duljine. Ako je cijeli zelembać dugačak 12 cm, kolika je duljina njegova repa?



### Rješenje:

Omjer duljina repa: duljina zelembaća =  $\frac{2}{3}$ .

Označimo li sa  $x$  duljinu zelembaćeva repa, tada vrijedi:

$$x : 12 = \frac{2}{3}.$$

$$x = 12 \cdot \frac{2}{3} = 8 \text{ cm.}$$

Rep toga zelembaća dugačak je 8 cm.

Zelembać je gušter. Energiju crpi od sunca pa je ljeti vrlo živahan, a zimi spava zimski san. Rep mu je lomljiv pa često ostane bez njega u nekoj borbi. No ubrzo mu naraste novi rep.

## Zadaci

1. Izračunaj vrijednost omjera

- a)  $20 : 5 = x$ ;
- b)  $471.06 : 52.34 = x$ ;
- c)  $\frac{2}{5} : \frac{10}{3} = x$ .

2. Izračunaj prvi član omjera

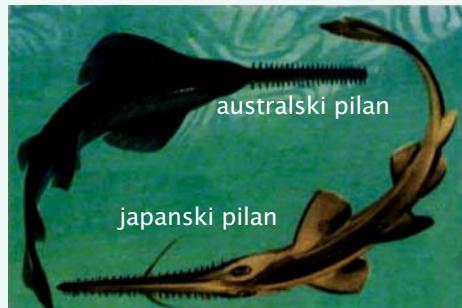
- a)  $x : 14 = 5$ ;
- b)  $x : 32.21 = 52.34$ ;
- c)  $x : \frac{2}{9} = \frac{3}{4}$ .

**3. Izračunaj drugi član omjera**

- a)  $36 : x = 9$ ;
- b)  $392.55 : x = 52.34$ ;
- c)  $\frac{7}{12} : x = \frac{5}{6}$ .

4. Pilanova pila čini  $\frac{1}{3}$  njegove ukupne duljine. Ako je cijeli pilan dugačak 9.36 m, koliko je dugačka njegova pila?

Pilan je riba koja živi u svim morima svijeta pa se jedna vrsta može naći i u Sredozemnom moru. Pila mu služi za napad na ribe i rovanje po muljevitom dnu u potrazi za rakovima.



5. Čudovište u filmu napravljeno je tako da je slika običnog malog skakavca povećana 80 puta. Ako

je duljina čudovišta 564 cm, kolika je duljina skakavca?

6. Udaljenost u prirodi između Vinkovaca i Đakova je 750 000 puta veća nego na geografskoj karti. Ako je udaljenost između ta dva grada na karti 4 cm, kolika je njihova udaljenost u prirodi? Je li toliko i cestovna udaljenost? Što misliš zašto?
7. Udaljenost u prirodi između Stuttgarta i Münchena je 4 000 000 puta veća nego na geografskoj karti. Ako je udaljenost između ta dva grada na karti 47 mm, kolika je njihova udaljenost u prirodi?
8. Udaljenost u prirodi između Zagreba i Ljubljane je 9 000 000 puta veća nego na geografskoj karti. Ako je udaljenost između ta dva grada 117 km zračne linije, koliko bi to centimetara bilo na karti?
9. Najkraća udaljenost od Zagreba do Splita na karti je 16.2 cm. Kolika je ta udaljenost u prirodi (u km) ako je karta izrađena u mjerilu  $1 : 1 500 000$ ?

### Primjer 6. Recept

Majin tata kupio je posudu boje za zidove od 4 l, na kojoj piše da je treba razrijediti vodom u omjeru 4 : 1.

- a) Što to znači?
- b) Koliko vode treba umiješati u 8 l boje? Koliko ćemo smjese vode i boje dobiti?
- c) Koliko vode treba umiješati u 12 čaša boje?
- d) Koliko vode treba umiješati u 4 dl boje?
- e) Koliko vode treba umiješati u 1 l boje?

### Rješenje:

a) Pri kupnji boje, ljepila, zaštitnih sredstava za bilje ili lijekova često nalazimo uputu da se oni trebaju razrijediti (pomiješati) s vodom u određenom omjeru. Zadani omjer u ovom primjeru govori nam da 4 l boje trebamo pomiješati s 1 l vode. Tako dobivenu smjesu (mješavinu) upotrijebit ćemo za bojenje zidova.

b) Za dvostruko veću količinu boje trebamo i dvostruko veću količinu vode, dakle za 8 l boje potrebne su 2 l vode. Miješanjem ćemo dobiti  $8 \text{ l boje} + 2 \text{ l vode} = 10 \text{ l smjese}$ .

c) Za trostruko veću količinu boje trebamo i trostruko veću količinu vode, dakle za 12 čaša boje potrebne su 3 čaše vode. Pritom uvijek moramo paziti da su mjerne jedinice iste - tj. oba broja u litrama, metrima, čašama, žlicama i sl.

d) Broj 1 je 4 puta manji od broja 4. Dakle upotrijebit ćemo četiri puta manju količinu boje - to znači da nam je potrebna i četiri puta manja količina vode. Potrebno je  $\frac{1}{4} \text{ l}$  ili 0.25 l vode.

### Važno

Omjer se neće promijeniti ako oba člana omjera pomnožimo ili podijelimo istim brojem, različitim od nule.

## Zadaci



10. Navedi tri omjera koja su jednaka zadanim omjeru:  
a)  $5 : 9$ ;  
b)  $200 : 40$ .
11. Prepiši, pa dopuni:  
a)  $5 : 10 = 1 : \underline{\quad}$ ;  
b)  $3 : 7 = \underline{\quad} : 56$ ;  
c)  $6 : \underline{\quad} = 3 : 8$ .
12. Samobor je grad poznat, između ostalog, i po kremšnitama. Za izradu samoborskih kremšnita potrebno je: 6 jaja, 20 dag šećera, 2 pudinga od vanilije, 4 žlice glatkog brašna, 1.4 litre mlijeka. Maja je imala dovoljne količine namirnica, osim jaja, kojih je imala 3. Ako želi da kremšnите budu kao u receptu, kako treba promijeniti originalne količine namirnica da omjeri, a time i okus kremšnita ostanu jednaki?
13. Na vrećici pudinga piše da 1 pakovanje pudinga treba pomiješati s  $\frac{1}{2}$  l mlijeka i  $2\frac{1}{2}$  žlica šećera. Ana je zamolila mamu da skuha puding za sve njih. Mama je odlučila skuhati puding od 3 litre mlijeka. Koliko pakovanja pudinga i koliko šećera joj je potrebno?
14. Na pakiranju omekšivača za rublje piše da na 5 kilograma rublja treba staviti 1 čep omekšivača. Koliko omekšivača treba staviti u stroj za rublje ako se u jednom pranju pere 2.5 kg rublja?
15. Na kutiji gnojiva za zalijevanje cvijeća piše da na 10 litara vode treba staviti 1 čajnu žličicu gnojiva.  
a) Napiši u kojem se omjeru miješaju voda i gnojivo;  
b) Lukin djed ima prskalicu u koju stane 5 l vode. Koliko gnojiva treba staviti na tu količinu vode?  
c) Majin ujak je uzbudljivo cvijeća, on prilikom jednog zalijevanja potroši oko 120 litara vode. Koliko gnojiva tada potroši?
16. Za palačinke se miješa brašno i mlijeko u omjeru  $2 : 3$ . Koliko brašna treba staviti u 6 l mlijeka?
17. Mjed je slitina u kojoj su cink i bakar pomiješani u omjeru  $3 : 7$ . Koliko bakra treba pomiješati sa 600 kg cinka da se dobije mjed?

### Primjer 7. Pravedna podjela zarade

Dva radnika, Ante i Branko, zajedno su radili jedan posao. Ante je radio 2 dana, a Branko 3 dana. Zajedno su zaradili 600 kn.

Kako će ih pravedno podijeliti?

#### Rješenje:

Pravedno podijeliti zaradu znači podijeliti je u skladu s odrađenim poslom. Budući da je Ante radio 2 dana, a Branko 3, oni zaradu trebaju podijeliti u omjeru  $2 : 3$ .

Označimo sa  $a$  Antinu zaradu, a sa  $b$  Brankovu zaradu. Zadani omjer nam govori da postoji broj  $k$ , takav da vrijedi:

$$a = 2 \cdot k;$$

$$b = 3 \cdot k.$$

Zbroj njihovih zarada treba biti 600. Dakle vrijedi  $a + b = 600$ . U tu jednakost uvrstimo izraze sa  $k$  i dobivamo:

$$2 \cdot k + 3 \cdot k = 600;$$

$$5 \cdot k = 600;$$

$$k = 600 : 5 = 120.$$

Sad nam još preostaje da s tim brojem izračunamo pripadne zarade.

$$a = 2 \cdot 120 = 240 \text{ kn};$$

$$b = 3 \cdot 120 = 360 \text{ kn}.$$

Ante je zaradio 240 kn, a Branko 360 kn.

## Zadaci

18. Dva radnika, Marko i Darko, zajedno su radili jedan posao. Marko je radio 3 dana, a Darko 4 dana. Zajedno su zaradili 700 kn. Kako će ih pravedno podijeliti?
19. Broj 1239 treba rastaviti na dva pribrojnika tako da se oni odnose kao 5 : 2.
20. Spomenik mase 700 kg izrađen je od bronce, koja je slitina bakra i kositra, u omjeru 47 : 3. Kolika je masa svake kovine u spomeniku?
21. Mjed je slitina u kojoj su cink i bakar pomiješani u omjeru 3 : 7. Koliko treba cinka, a koliko bakra da se dobije 125 kg mjedi?
22. U omjerima se mogu koristiti i više od dva člana, takve omjere nazivamo produženi omjeri. Primjerice omjer  $2 : 5 : 11$  za unutarnje kutove u trokutu nam govori da vrijedi:  $\alpha = 2 \cdot k$ ,  $\beta = 5 \cdot k$ ,  $\gamma = 11 \cdot k$ . Znajući da je zbroj unutarnjih kutova trokuta  $180^\circ$  dolazimo do  $k = 10$ , pa vrijedi  $\alpha = 20^\circ$ ,  $\beta = 50^\circ$  i  $\gamma = 110^\circ$ . Izračunaj kutove trokuta koji se odnose kao:  
a)  $3 : 5 : 10$ ;  
b)  $2 : 1 : 6$ .
23. Izračunaj kutove četverokuta koji se odnose kao:  
a)  $1 : 2 : 3 : 4$ ;  
b)  $5 : 4 : 7 : 2$ ;  
c)  $4 : 7 : 1 : 1$ .
24. Stranice trokuta su u omjeru  $3 : 4 : 5$ . Odredi duljine tih stranica ako je opseg trokuta 24 cm.
25. Broj 252 treba rastaviti na tri pribrojnika tako da se oni odnose kao  $3 : 7 : 8$ .
26. Otac je džeparac od 140 kn podijelio Luki i Ani u omjeru njihovih godina. Koliko je kuna dobio svaki od njih ako Ana ima 15, a Luka 13 godina?
27. U jednoj fotoradnji imaju dva pisača za ispis fotografija. Dok prvi ispiše 5 fotografija, drugi ih ispiše 9.  
a) Dok prvi pisač ispiše 20 fotografija, koliko ih ispiše drugi?  
b) Dok drugi pisač ispiše 81 fotografiju, koliko ih ispiše prvi?  
c) Na oba pisača zajedno je ispisano 560 fotografija. Koliko ih je ispisano na prvom, a koliko na drugom pisaču?

Uvježbaj omjere rješavajući zadatke na CD-u



### Primjer 8. Pojednostavljanje omjera

Pojednostavi omjere :

a)  $\frac{3}{4} : \frac{5}{6}$ ; b)  $\frac{3}{5} : 6 : 2.5$ ; c)  $20 : 25 : 30$ .

#### Rješenje:

Pomnožimo li ili podijelimo sve članove omjera najmanjim zajedničkim višekratnikom (kao da

proširujemo/skraćujemo razlomke), vrijednost omjera neće se promjeniti. Tako ćemo dobiti omjer s cijelim brojevima.

a)  $\left(\frac{3}{4} \cdot 12\right) : \left(\frac{5}{6} \cdot 12\right) = 9 : 10$ ;

b)  $\left(\frac{3}{5} \cdot 10\right) : (6 \cdot 10) : (2.5 \cdot 10) = 6 : 60 : 25$ ;

c)  $(20 : 5) : (25 : 5) : (30 : 5) = 4 : 5 : 6$ .



## Zadaci

### 28. Pojednostavi omjere

a)  $14 : 7$ ; b)  $\frac{3}{7} : \frac{5}{6}$ ; c)  $4.6 : 2.3$ ;  
d)  $\frac{3}{4} : 1.5$ ; e)  $5 : 25$ ; f)  $\frac{4}{5} : \frac{7}{10}$ .

### 29. Pojednostavi omjere

a)  $4 : 8 : 12$ ; b)  $\frac{1}{2} : \frac{3}{4} : \frac{5}{4} : \frac{3}{8}$ ; c)  $2.5 : 3 : \frac{2}{5}$ .

### 30. Pet rođaka, Ante, Borna, Filip, Josip i Tomislav dijele imovinu bogatog strica iz Amerike koja

iznosi 455 625 dolara. U oporuci piše da je moraju podijeliti u omjeru  $\frac{5}{24} : \frac{1}{24} : \frac{1}{8} : \frac{1}{6} : \frac{7}{12}$  po abecednom redu. Koliko će svaki od njih dobiti?



31. Svetlozelena boja za zid dobije se miješanjem bijele boje te oker i zelenog pigmenta u omjeru  $15 : \frac{1}{3} : \frac{1}{3}$ . Koliko treba kupiti pojedine boje ako nam treba 50 litara boje?

**Primjer 9. Složeni recept**

Prhko tjesto radi se od mješavine brašna, šećera i margarina u omjeru 3 : 2 : 1.

Koliko treba šećera i margarina za tjesto napravljeno od 300 g brašna?

**Rješenje:**

$$3 : 2 : 1 = 300 : x : y$$

Proširiti ćemo omjere, kao u Primjeru 8, tako da prvi članovi budu jednaki. Prvi omjer proširujemo sa 100 i traženi je omjer  $300 : 200 : 100$ . Dakle potrebno je 200 g šećera i 100 g margarina.

**Zadaci**

32. Za beton se miješaju cement, pjesak i voda u omjeru 1 : 4 : 5. Koliko treba cementa i vode ako beton pravimo od 500 kg pjeska?

33. Četvorica prijatelja među sobom trebaju podijeliti zbirku sličica među sobom. Dogovorili su se da će ih podijeliti u omjeru 2 : 3 : 4 : 6. Ako drugi dobije 42 sličice, koliko će dobiti ostali? Koliko je sličica sadržavala zbirka?

34. Tri kćeri, Ana, Iva i Marija, dijele naslijede u omjeru  $\frac{3}{14} : \frac{8}{21} : \frac{3}{7}$ . Ako je Marija dobila 1800 kn, koliko je dobila Ana, a koliko Iva?

35. Broj 820 podijeli na tri dijela  $x$ ,  $y$  i  $z$  tako da vrijedi  $x : y = 3 : 4$  i  $y : z = 3 : 5$ . Koji su to brojevi?



## 2.2. Proporcije ili razmjeri

**Visina**

Omjer visina Maje i njezine sestre je 1 : 2. Koliko je visoka Maja ako je njezina sestra visoka 71 cm?

**Primjer 1. Orlando kip**

Orlando kip u Dubrovniku ima lakat duljine 51.2 cm. Kolika je duljina njegova kažiprsta?

**Rješenje:**

Problem na prvi pogled izgleda nerješivo bez odlaska u Dubrovnik i mjerjenja duljine Orlandova kažiprsta. Matematičari su ipak smislili način rješavanja tog problema a da se ne morate uputiti na put do Dubrovnika.

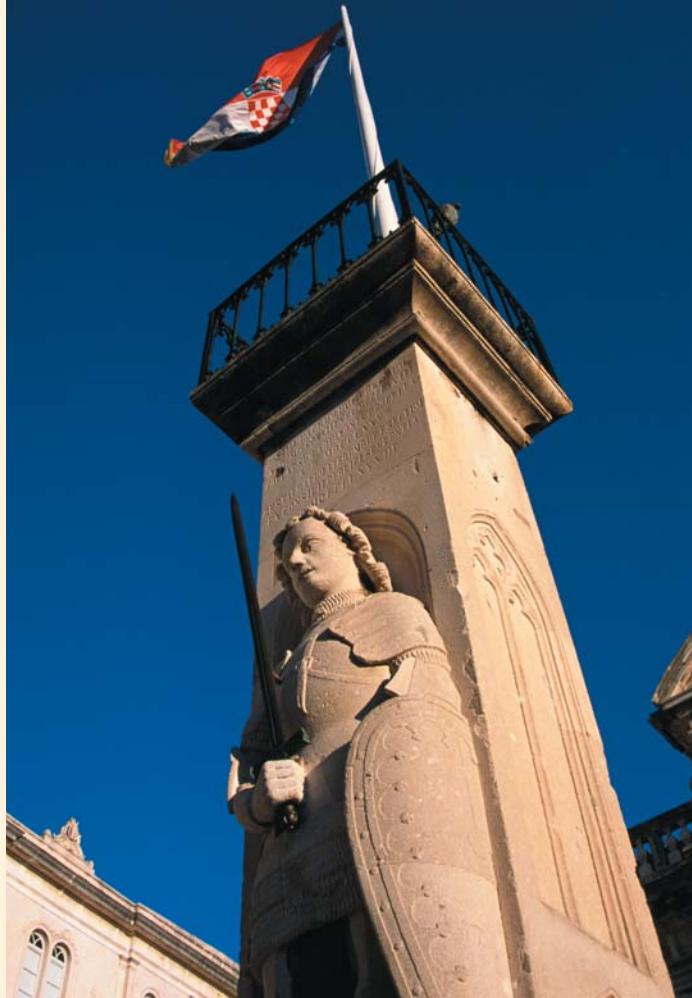
*Ideja:* Orlando kip predstavlja čovjeka

- kažemo da je kip sličan čovjeku. Dakle omjer duljina lakti i prstiju trebao bi biti kao i kod čovjeka. Podatak koji nam je potreban za rješavanje problema duljine Orlandova kažiprsta omjer je duljine lakti i duljine kažiprsta čovjeka.

Izmjerite duljinu svojeg lakti tj. podlaktice od vrha srednjeg prsta do lakti i duljinu svoga kažiprsta. Zapišite te podatke u bilježnicu.

Luka je izmjerio duljinu lakti 40 cm i duljinu kažiprsta 6 cm.

Orlandov kip u Dubrovniku. Djelo talijanskog kipara Bonina iz Milana iz 1418.g.



Možemo postaviti ove omjere:

duljina lakta kipa : duljina kažiprsta kipa

duljina Lukina lakta : duljina Lukina kažiprsta

Pretpostavljamo da su vrijednosti tih omjera jednake. Dakle vrijedi

$$\frac{\text{duljina lakta}}{\text{kipa}} : \frac{\text{duljina kažiprsta}}{\text{kipa}} = \frac{\text{duljina Lukina lakta}}{\text{lakta}} : \frac{\text{duljina Lukina kažiprsta}}{\text{kažiprsta}}$$

proporcija ili razmjer

$$6 : 2 = 3 : 1$$

$$3.6 : 0.9 = 4 : 1$$

$$a : b = c : d$$

Jednakost omjera, koju smo upravo napisali, naziva se **proporcijom ili razmjerom**.

Iz te propocije možemo izračunati duljinu Orlandova kažiprsta.

Podaci su:

- duljina lakta kipa 51.2 cm
- duljina kažiprsta kipa  $x$
- duljina Lukina lakta 40 cm
- duljina Lukina kažiprsta 6 cm

Uvrstimo podatke u proporciju i dobit ćemo:

$$51.2 : x = 40 : 6$$

Dabismo mogli izračunati vrijednost nepoznanice  $x$  u postavljenoj proporciji, najprije moramo naučiti neka svojstva proporcija.

Lakat (*Cubit*) jedna je od najstarijih jedinica za duljinu, a upotrebljavala se već 2500.g. prije Krista. Lakat iznosi približno 43 do 56 cm, što je otprilike duljina ljudske podlaktice mjerene od laka do vrha srednjega prsta.

Orlandov kip nalazi se na dubrovačkom Stradunu, a izradio ga je kipar Bonino iz Milana u XV. st. Duljina laka njegove desne ruke uzeta je kao mjera za duljinu, tzv. dubrovački lakat. Na podnožju Orlandova kipa nalazi se i posebno istaknuta dužina te duljine (51.2 cm).



### Važno

Jednakost omjera naziva se proporcijom ili razmjerom.

Općenito proporciju pišemo u obliku  $a : b = c : d$ , gdje su  $a, b, c, d \in Q$  te  $b \neq 0$  i  $d \neq 0$ .

Članove  $a$  i  $d$  nazivamo vanjskim članovima, a članove  $b$  i  $c$  unutarnjim članovima proporcije.

Unutarnji članovi

$$a : b = c : d$$

Vanjski članovi

### Važno

Umnožak vanjskih članova proporcije jednak je umnošku unutarnjih članova proporcije.

$$a \cdot d = b \cdot c$$

## Primjer 2. Nastavak priče o Orlandovu kipu

Koristeći se naučenim svojstvima proporcija možemo izračunati duljinu Orlandova kažiprsta.

$$51.2 : x = 40 : 6.$$

### Rješenje:

Najprije upotrijebimo svojstvo proporcija i zadanu proporciju napišemo u obliku dvaju umnožaka.

$$51.2 \cdot 6 = x \cdot 40$$

Nepoznati član proporcije dobivamo ovako:

$$x = \frac{51.2 \cdot 6}{40}$$

$$x = 7.68 \text{ cm.}$$

Dakle, prema Lukinim mjerama Orlandov kažiprst trebao bi biti dugačak 7.68 cm.

Stvarna duljina kažiprsta na Orlandovu kipu u Dubrovniku iznosi 8.4 cm.

Kolika je duljina Orlandova kažiprsta prema tvojim mjerama?

Proporcije su u umjetnosti uvijek imale važno mjesto. Jedna često spominjana proporcija je Zlatni rez. Želite li saznati više o toj temi, pogledajte sadržaje na CD-u.



## Primjer 3.

### Odredi nepoznati član proporcije

Zadana je proporcija  $25 : 12 = f : 3$ .

Izračunaj njezin nepoznati član.

### Rješenje:

Prikažemo proporciju pomoću umnoška:

$$25 \cdot 3 = 12 \cdot f.$$

$$\text{Dalje slijedi } f = \frac{25 \cdot 3}{12} = 6.25.$$

Nepoznati član proporcije je 6.25.

## Zadaci

1. Izračunaj nepoznati član proporcije:

- a)  $x : 6 = 2 : 3$ ;
- b)  $y : 8 = 21 : 24$ ;
- c)  $y : 3 = 24 : 36$ ;
- d)  $y : 24 = 5 : 8$ ;
- e)  $x : 23 = 42 : 7$ ;
- f)  $x : 30 = 12 : 5$ .

2. Izračunaj nepoznati član proporcije:

- a)  $8 : x = 1 : 2$ ;
- b)  $5 : y = 20 : 28$ ;
- c)  $4 : x = 80 : 100$ .

3. Izračunaj nepoznati član proporcije:

- a)  $2 : 3 = x : 18$ ;
- b)  $3 : 5 = y : 25$ ;
- c)  $3 : 4 = x : 100$ ;
- d)  $144 : 9 = y : 3$ ;
- e)  $216 : 6 = x : 2$ ;
- f)  $147 : 3 = x : 4$ .

4. Izračunaj nepoznati član proporcije:

- a)  $1 : 4 = 2 : x$ ;
- b)  $5 : 6 = 10 : x$ ;
- c)  $7 : 8 = 42 : y$ .

5. Izračunaj nepoznati član proporcije:

- a)  $y : 2 = 12 : 8$ ;
- b)  $5 : 8 = x : 1000$ ;
- c)  $3 : 4 = 36 : y$ .

6. Izračunaj nepoznati član proporcije:

- a)  $25.3 : 5.5 = 34.5 : y$ ;
- b)  $4.5 : 1 = x : 5.3$ ;
- c)  $25 : 23 = 150 : y$ ;
- d)  $7.5 : 6.9 = 75 : x$ ;
- e)  $325 : 5 = x : 7$ ;
- f)  $325 : 5 = y : 0.5$ ;
- g)  $500 : 362.5 = 1850 : x$ ;
- h)  $96 : 120 = x : 140$ ;
- i)  $10 : 80000 = 65 : y$ .



## Primjer 4. Visina tornja

Luka i Maja posjetili su Zagrebačku katedralu. Luka je zamišljeno gledao u toranj i pitao Maju kolika je njegova visina. Maja je rekla: "Ne znam, ali znam kako možemo izračunati." Imaš li ti ideju kako izračunati visinu tornja Zagrebačke katedrale?



### Rješenje:

Maja se sjetila priče koju je čitala o slavnom grčkom matematičaru Talesu iz Miletu. Tales je mjerio visinu piramide tako da je usporedio njezinu visinu s visinom štapa te duljinu sjene piramide s duljinom sjene štapa.

$$\frac{\text{visina}}{\text{tornja}} : \frac{\text{visina}}{\text{štapa}} = \frac{\text{sjena}}{\text{tornja}} : \frac{\text{sjena}}{\text{štapa}}$$

Luka i Maja uzeli su štap visine 1 m, postavili ga uspravno i izmjerili duljinu njegove sjene koja je iznosila 20 cm tj. 0.2 m. Zatim su izmjerili duljinu sjene tornja koja je bila 21 m.

Označimo li sa  $x$  nepoznatu visinu tornja i uvrstimo izmjerene veličine u proporciju, dobivamo:

$$x : 1 = 21 : 0.2$$

Prijedemo na umnožak:

$$x \cdot 0.2 = 1 \cdot 21$$

Izrazimo nepoznatu veličinu pomoću poznatih:

$$x = \frac{1 \cdot 21}{0.2}$$

$$x = 105 \text{ m.}$$

Dakle visina tornja Zagrebačke katedrale je 105 m.

## Primjer 5. Jabuke

Koliko se kilograma jabuka može kupiti za 81 kn ako se za 4.5 kg jabuka plati 20.25 kn?

### Rješenje:

Možemo postaviti ovu proporciju:

$$\text{količina 1 : cijena 1} = \text{količina 2 : cijena 2}$$

Označimo sa  $x$  količinu jabuka koju možemo kupiti za 81 kn i uvrstimo zadane veličine u proporciju:

$$x : 81 = 4.5 : 20.25$$

$$x \cdot 20.25 = 81 \cdot 4.5$$

$$x = \frac{81 \cdot 4.5}{20.25} = 18 \text{ kg.}$$

Za 81 kn može se kupiti 18 kg jabuka.

## Zadaci



Pazi na redoslijed pri postavljanju proporcija!

7. Koristeći se Talesovim načinom uspoređivanja sa sjenom, izračunaj visinu crkvenog tornja koji se nalazi u blizini škole.
8. Jela visoka 18 m baca sjenu dugačku 1.6 m. Koliko je visoka breza koja u isto vrijeme baca sjenu dugu 0.4 m?
9. Štap visok 14 cm baca sjenu dugačku 0.007 m. Kolika će u isto vrijeme biti sjena drveta visokog 10 m?

10. Koliko je visoka zgrada čija je sjena duga 0.9 m ako je sjena štapa dugog 15 dm u to vrijeme duga 0.9 dm?



11. Ako 7 olovaka stoji 24.5 kn, koliko olovaka možemo kupiti za 14 kn?



12. Maja je s 35 dag fimo-mase napravila 21 perlicu za ogrlicu. Koliko bi takvih perlica napravila od 70 dag?



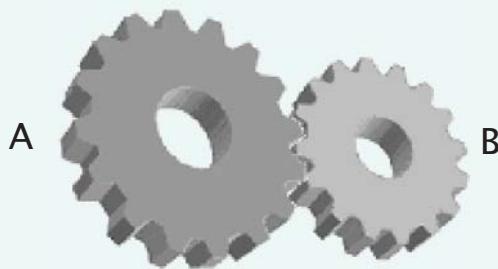
13. Luka je za 10 sličica dobio 2 figurice. Za koliko bi sličica dobio 7 figurica?



## Zadaci



14. Koliko je visok Matija ako je njegova sjena duga 44 cm? Istovremeno je sjena olovke koja стоји okomito na podlogu 4 cm, a njezina visina 15 cm.
15. Okretanje dvaju zupčanika je povezano.



Dok se zupčanik A okreće jednom, zupčanik B okrenut će se dva puta.

Ako je zupčanik B napravio 6 okreta, koliko ih je napravio zupčanik A?

Ako je zupčanik A napravio 30 okreta, koliko ih je napravio zupčanik B?

16. Dok se zupčanik A okreće 4 puta, zupčanik B okreut će se 14 puta.

Ako je zupčanik A napravio 12 okreta, koliko ih je napravio zupčanik B?

Ako je zupčanik B napravio 84 okreta, koliko ih je napravio zupčanik A?

17. Dok se zupčanik A okreće 3 puta, zupčanik B okreut će se 4 puta.

Ako je zupčanik A napravio 90 okreta, koliko ih je napravio zupčanik B?

Ako je zupčanik B napravio 56 okreta, koliko ih je napravio zupčanik A?

Ako je zupčanik B napravio 76 okreta, koliko ih je napravio zupčanik A?

Uvježbaj proporcije rješavajući zadatke sa CD-a



### Primjer 6. Složeniji zadatak

Zadana je proporcija  $(23 - x) : 6 = 3x : 5$ . Odredi vrijednost nepoznanice  $x$ .

#### Rješenje:

Nepoznanicu  $x$  izračunavamo tako da najprije proporciju zapišemo u obliku umnoška, a

onda dalje rješavamo kao linearnu jednadžbu s jednom nepoznanicom.

$$(23 - x) : 6 = 3x : 5$$

$$5 \cdot (23 - x) = 6 \cdot 3x$$

$$115 - 5x = 18x$$

$$-5x - 18x = -115$$

$$-23x = -115$$

$$x = -115 : (-23) = 5.$$



## Zadaci

18.  $(x - 5) : (x + 1) = 1 : 4$
19.  $(15 - 3x) : (4 - 5x) = 3 : 2$
20.  $(x - 2) : 1 = (5x - 13) : 4$

21.  $2 : 3 = (5x + 4) : (9x + 3)$
22.  $1 : x = 3 : (x + 10)$



## 2.3. Proporcionalne veličine

Koje su rečenice istinite? Uza svaku rečenicu napiši DA ako je točna ili NE ako nije točna.

- a) Što više bilježnica kupiš, to više moraš platiti;
- b) Što više pjevača zajedno pjevaju pjesmu, to pjesma dulje traje;
- c) Što se brže voziš biciklom, to manje vremena treba da dođeš do škole;
- d) Što je čovjek viši, to je stariji;

Da bismo lakše određivali veličine kao u uvodnom primjeru, moramo prepoznati matematičke veze među njima. Takve primjere često čujete u svakodnevnom životu – u trgovini, na putovanju, u banci i sl.



### Primjer 1. Proporcionalne veličine

Prepiši, pa dopuni rečenice:

- a) Ako 1 kilogram šljiva stoji 7 kuna, za 2 kilograma šljiva treba platiti \_\_\_\_\_ kuna.  
Za dvostruko veću količinu šljiva trebamo platiti \_\_\_\_\_ više novca.

- b) Ako automobil troši 6 litara goriva na 100 km, za 300 km potrošit će \_\_\_\_\_ litara.  
Za trostruko dulji put automobil će potrošiti \_\_\_\_\_ više goriva.

- c) Ako je Luki potrebno 12 min da pretrči 16 krugova oko igrališta, za 3 minute pretrčati će \_\_\_\_\_ krugova.

Za četverostruko kraće vrijeme Luka će pretrčati \_\_\_\_\_ manje krugova oko igrališta.

### Rješenje:

- a) Ako 1 kilogram šljiva stoji **7 kuna**, za 2 kilograma šljiva treba platiti **14 kuna**.

Za dvostruko veću količinu šljiva trebamo platiti **dvostruko više** novca.

- b) Ako automobil troši **6 litara** goriva na 100 km, za 300 km potrošit će **18 litara**.

Za trostruko dulji put automobil će potrošiti **trostruko više** goriva.

- c) Ako je Luki potrebno 12 min da pretrči **16 krugova** oko igrališta, za 3 minute prijeći će **4 kruga**.

Za četverostruko kraće vrijeme Luka će pretrčati **četverostruko manje** krugova.

U tom smo primjeru vidjeli da:

- **dvostrukom povećanju jedne veličine odgovara dvostruko povećanje druge veličine** proporcionalne veličine
- peterostrukom povećanju jedne veličine odgovara peterostruko povećanje druge veličine
- **trostrukom smanjenju jedne veličine odgovara trostruko smanjenje druge veličine**
- deseterostrukom smanjenju jedne veličine odgovara deseterostruko smanjenje druge veličine, itd.

Matematički kažemo: povećanju jedne veličine odgovara proporcionalno povećanje druge veličine, odnosno smanjenju jedne veličine odgovara proporcionalno smanjenje druge veličine.

Veličine koje ovise jedna o drugoj kao u ovom primjeru, nazivaju se **proporcionalnim ili razmernim veličinama**.

**Važno**

Dvije su veličine međusobno **proporcionalne** ako iz **povećanja** (**smanjenja**) jedne veličine slijedi proporcionalno **povećanje** (**smanjenje**) druge veličine.

**Zadaci**

- Prepiši, pa dopuni rečenice riječima više ili manje:
  - Što se dulje voziš automobilom, to trebaš \_\_\_\_\_ benzina;
  - Što više džeparca dobiješ, to \_\_\_\_\_ možeš štedjeti;
  - Što manje brašna upotrijebimo, to \_\_\_\_\_ kruha možemo napraviti;
  - Što manje boje imamo, to \_\_\_\_\_ površinu zida možemo obojiti.
- Prepiši, pa dopuni rečenice:
  - Ako 1 kilogram salate stoji 9 kuna, za 3 kilograma salate treba platiti \_\_\_\_\_ kuna.  
Za trostruko veću količinu salate trebamo platiti \_\_\_\_\_ više novca.
  - Ako automobil troši 7 litara goriva na 100 km, za 600 km potrošit će \_\_\_\_\_ litara.  
Za šesterostruko dulji put automobil će potrošiti \_\_\_\_\_ više goriva.
  - Ako je Luki potrebno 12 min da prijeđe 1 km, za 60 minuta prijeći će \_\_\_\_\_ kilometara.  
Za peterostruko dulje vrijeme Luka će prijeći \_\_\_\_\_ više kilometara.
  - Ako za 500 eura trebamo platiti 3750 kn, za 50 eura platit ćemo \_\_\_\_\_ kuna.  
Za deseterostruko manje eura platit ćemo \_\_\_\_\_ manje kuna.
  - Ako za popločavanje terase površine  $12 \text{ m}^2$  treba 48 kulir-ploča, za terasu površine  $6 \text{ m}^2$  treba \_\_\_\_\_ kulir-ploča.  
Za dvostruko manju površinu terase treba \_\_\_\_\_ manje ploča.
  - Ako se za 40 plastičnih boca pri povratu ambalaže dobije 20 kn, za 10 takvih boca dobije se \_\_\_\_\_ kn.



Za četverostruko manje boca dobije se \_\_\_\_\_ manje kuna.

- Označi veličine koje su proporcionalne:
  - količina salate i njezina cijena;
  - količina boje i površina zida koji možemo obojiti;
  - broj godina i visina čovjeka;
  - količina benzina i duljina puta;
  - razina znanja i ocjena iz matematike;
  - iznos eura i iznos kuna prema tečajnoj listi;
  - površina pločice i broj pločica za popločavanje terase;
  - brzina vožnje i duljina putovanja.
- Označi veličine koje jesu proporcionalne:
  - cijena kruha i njegova količina;
  - broj predmeta u svjedodžbi i broj ocjena u svjedodžbi;
  - visina stupa i njegova sjena;
  - broj opranih tanjura i količina vremena utrošena na pranje;
  - broj djece koja Peru tanjure i vrijeme za koje će oprati istu hrpu tanjura;
  - duljina kose i ocjena iz matematike;
  - količina benzina i njegova cijena;
  - broj učenika u razredu i broj školskih torbi u razredu.

5. Majina mama je 3 m platna platila 66 kn. Koliko bi platila 6 m toga platna?
6. Luka je 10 olovaka platio 5 kn. Koliko bi platio 5 takvih olovaka?
7. Matija je 18 sličica nogometara zamijenio za 12 sličica pasa. Koliko sličica pasa može zamijeniti za 6 sličica nogometara?
8. Ana za 4 sata hoda prijeđe 16 km. Koliko je prešla za 2 sata hoda?
9. Za izradu čokoladne torte potrebno je 6 jaja. Koliko jaja treba za 4 takve torte?
10. Kamion u dvije vožnje preveze 3 tone šljunka. Koliko tona šljunka preveze u jednoj vožnji?

## Primjer 2.

### Koefficijent proporcionalnosti

U tablici su prikazane količine jabuka i odgovarajuće cijene.

količina jabuka	x	10 kg	15 kg	50 kg
iznos novca	y	25 kn	37.50 kn	125 kn
količnik	$y : x$			

- a) Jesu li prikazane veličine proporcionalne?
- b) Izračunaj količnik u posljednjem redu tablice.
- c) Što nam govori taj količnik? Kakav je taj količnik?

### Rješenje:

a) Zadane su veličine proporcionalne.

b)	količina jabuka	x	10 kg	15 kg	50 kg
	iznos novca	y	25 kn	37.50 kn	125 kn
	količnik	$y : x$	2.5	2.5	2.5

## Primjer 3. Značenje koeficijenta proporcionalnosti

- a) Maja je 9 kilograma maslina platila 90 kuna. Kolika je cijena 1 kilograma maslina?
- b) Za bojenje  $21 \text{ m}^2$  potrebne su 3 l boje. Kolika se površina može obojiti s 1 litrom boje?
- c) Automobilu je za put duljine 500 km potrebno 5 sati. Koliki put prijeđe za 1 sat?

c) Taj nam količnik govori kolika je cijena 1 kg jabuka. Količnik je stalno jednak 2.5.

U tom primjeru računali smo količnik dviju veličina. Kod veličina koje su proporcionalne taj je količnik stalan, a nazivamo ga **koeficijentom proporcionalnosti** i označavamo sa  $k$ .

koeficijent proporcionalnosti

Ako proporcionalne veličine označimo sa  $x$  i  $y$ , onda koeficijent proporcionalnosti zapisujemo ovako:  $k = \frac{y}{x}$ .

### Važno

Količnik dviju proporcionalnih veličina je stalан.  $k = \frac{y}{x}$  ili  $k = y : x$ .

Veličina  $y$  je proporcionalna veličini  $x$  s koeficijentom proporcionalnosti  $k$ ,  $k > 0$  ako vrijedi  $y = k \cdot x$ .

### Rješenje:

- a) Da bismo izračunali cijenu 1 kg maslina, iznos trebamo podijeliti s brojem kilograma, tj.  $90 : 9 = 10$ . Cijena 1 kg maslina je 10 kn.
- b) Da bismo izračunali površinu koju možemo obojiti 1 litrom, veličinu površine trebamo podijeliti s brojem litara, tj.  $21 : 3 = 7$ . 1 litrom boje može se obojiti  $7 \text{ m}^2$ .
- c) Da bismo izračunali duljinu puta koji automobil prijeđe za 1 sat, duljinu puta trebamo podijeliti s brojem sati, tj.  $500 : 5 = 100$ . Automobil za 1 sat prijeđe 100 km.



Uvijek podijeli s onom veličinom za koju želiš saznati jedinični iznos.

Za 1 m dijeli s brojem metara.

Za 1 kg dijeli s brojem kilograma.

Za 1 h dijeli s brojem sati.

Količnik proporcionalnih veličina govori nam o vezi između jedinične količine jedne veličine i neke količine druge veličine, primjerice:

- cijena 1 kilograma
- veličina površine za 1 litru
- duljina puta za 1 h
- potrebno vrijeme za 1 km.

## Zadaci

11. Odredi cijenu 1 kilograma ili 1 litre ako je cijena za:
  - a) 5 kg šljiva 30 kn;
  - b) 30 l benzina 240 kn;
  - c) 8 kg naranči 56 kn;
  - d) 12 kg rajčice 60 kn;
  - e) 10 l boje 350 kn.
12. Ako je Ana prešla 16 km za 4 sata, koliko km prijeđe za 1 sat? Kolika je onda brzina njezina hoda? Je li to prosječna brzina čovjekova hoda?
13. Je li povoljnije kupiti pakovanje od 6 kg praška za rublje za 90 kn ili 3 kg praška za rublje po cijeni od 48 kn?
14. Je li povoljnije kupiti 50 olovaka za 40 kn ili 15 olovaka za 13.5 kn?
15. Što se više isplati? Voziti automobil koji za 186 km potroši 30 l benzina ili onaj koji za 170 km potroši 25 litara?

16. Tko je prošao bolje? Maja koja je za 53 kn kupila 10 kg mandarina ili Ana koja je za 87 kn kupila 15 kg mandarina?

17. Je li povoljnije kupiti pakovanje hrane za psa od 2500 g po cijeni od 50 kn ili pakovanje od 1500 g po cijeni od 30 kn?

18. Prepiši, pa izračunaj koeficijent proporcionalnosti i napiši njegovo značenje (prvi redak je riješen).

veličina x	veličina y	koeficijent proporcionalnosti k	značenje
25 kg	160 kn	$k = y : x = 160 : 25 = 6.4$	cijena 1 kg
5 l	80 km		
10 komada kruha	4 kg		
18 l	149.40 kn		
1.5 h	24 km		

### Primjer 4.

#### Izračunavanje proporcionalnih veličina pomoću koeficijenta

Vozeći stalnom brzinom, automobil je za 3.5 sati prešao 227.5 km.

a) Kolikom se brzinom kretao?

b) Vozeći tom brzinom, koliki će put prijeći za 5 sati?

#### Rješenje:

Označimo sa  $x$  vrijeme vožnje (h), a sa  $y$  označimo duljinu puta (km).

Zadano je  $x_1 = 3.5$  h;  $y_1 = 227.5$  km.

a) Brzina vožnje ujedno je i koeficijent proporcionalnosti zadanih veličina:

$k = y : x = 227.5 : 3.5 = 65 \text{ km/h}$ . Dakle automobil za 1 sat prijeđe 65 km.

b) Da bismo dobili koliki je put automobil prešao za 5 sati, duljinu puta što ga automobil prijeđe za 1 sat trebamo pomnožiti sa 5. Označimo novi podatak o vremenu vožnje sa  $x_2$ :

$$x_2 = 5 \text{ h}.$$

Dobivamo da je prijeđeni put

$$y_2 = k \cdot x_2 = 65 \cdot 5 = 325 \text{ km}.$$

$$y_2 = k \cdot x_2$$

### Primjer 5.

#### Izračunavanje proporcionalnih veličina pomoću koeficijenta

Matijina mama kupila je 15 kg paprike za zimnicu i platila je 45 kn. Matijina baka zamolila je mamu da i njoj kupi paprike za 105 kn.

- a) Kolika je cijena jednog kilograma paprike?
- b) Koliko se kilograma paprike može kupiti za 105 kn?

$$x_2 = y_2 : k$$

### Rješenje:

Označimo sa  $x$  količinu paprike (kg), a sa  $y$  označimo iznos novca (kn).

Zadano je  $x_1 = 15$  kg;  $y_1 = 45$  kn.

a) Cijena jednog kilograma ujedno je i koeficijent proporcionalnosti zadanih veličina:  $k = y : x = 45 : 15 = 3$ . Dakle za 1 kg paprike treba platiti 3 kn.

b) Da bismo dobili koliko se paprike može kupiti za 105 kn, iznos novca trebamo podijeliti s cijenom jednog kilograma. Označimo novi podatak o iznosu novca s  $y_2$ :

$$y_2 = 105 \text{ kn.}$$

$$\text{Dobivamo } x_2 = y_2 : k = 105 : 3 = 35 \text{ kg.}$$

## Zadaci

 19. Vozeći stalnom brzinom, automobil je za 5.3 sata prešao 609.5 km.

- a) Kolikom se brzinom kretao?
- b) Vozeći tom brzinom, koliki će put prijeći za 7 sati?
- c) Gdje je dopušteno voziti takvom brzinom?

 20. Vozeći stalnom brzinom, autobus je za 4 sata i 30 min prešao 279 km.

- a) Kolikom se brzinom kretao?
- b) Vozeći tom brzinom, koliki će put prijeći za 6 sati?

 21. 17 kg krumpira treba platiti 42.5 kn.

- a) Kolika je cijena 1 kg krumpira?
- b) Koliko treba platiti za 25 kg krumpira?

 22. 12.5 kg luka treba platiti 43.75 kn.

- a) Kolika je cijena 1 kg luka?
- b) Koliko treba platiti za 9 kg luka?

 23. Prepiši, pa dopuni tablicu. Najprije izračunaj cijenu 1 litre, a onda ostale cijene.

Benzin	Cijena
1 l	
3 l	24.90 kn
25 l	
42 l	
52 l	

 24. Prepiši, pa dopuni tablicu. Najprije izračunaj cijenu 1 komada, a onda ostale cijene.

Bilježnice	Cijena
1 kom	
6 kom	13.80 kn
24 kom	
28 kom	
44 kom	

 25. Dubina mora mjeri se zvučnom sondom.

Prepiši, pa izračunaj vrijednosti koje nedostaju u tablici:

Dubina mora (u metrima)	1200	1650			300	1500
Vrijeme potrebno da se zvuk vrati do sonde (u sekundama)		2.2	1.2	5.2		

 26. Prepiši, pa dopuni tablicu. Najprije izračunaj cijenu 1 kg, a onda ostale cijene.

Jagode	Cijena
1 kg	
4.2 kg	61.32 kn
6.9 kg	
18 kg	
24.7 kg	

**Primjer 6.****Izračunavanje proporcionalnih veličina pomoću proporcije**

Za 4.5 kg šećera plaćeno je 25.20 kn.

- a) Koliko treba platiti 9.4 kg šećera?  
b) Koliko se šećera može kupiti za 66.08 kn?

**Rješenje:**

proporcionalne veličine

$$x_1 : x_2 = y_1 : y_2$$

Najprije označimo zadane veličine:  
 $x$  - masa (kg),  
 $y$  - cijena (kn)

a) Zatim ispišimo zadane podatke i podatke koji se traže.

$$\begin{array}{ll} x_1 = 4.5 \text{ kg} & y_1 = 25.20 \text{ kn} \\ x_2 = 9.4 \text{ kg} & y_2 = ? \end{array}$$

Budući da, kod proporcionalnih veličina, iz **povećanja (smanjenja)** jedne veličine slijedi proporcionalno **povećanje (smanjenje)** druge veličine - vrijedi ova proporcija:

$$x_1 : x_2 = y_1 : y_2$$

Upotrijebimo je za rješavanje primjera.

$$x_1 : x_2 = y_1 : y_2$$

Uvrstimo zadane podatke, a za veličinu koja je nepoznata ostavimo slovnu oznaku.

$$4.5 : 9.4 = 25.20 : y_2$$

Primijenimo svojstva proporcija i zapišemo tu proporciju u obliku umnoška.

$4.5 \cdot y_2 = 9.4 \cdot 25.20$ . Iz te jednakosti ovako izračunavamo  $y_2$ :  $y_2 = \frac{9.4 \cdot 25.20}{4.5} = 52.64$  kn  
Dakle 9.4 kg šećera treba platiti 52.64 kn.

**Važno**

Za proporcionalne veličine vrijedi jednakost  
 $x_1 : x_2 = y_1 : y_2$



b) Na isti način, pomoću proporcija rješimo i zadatak b) - naravno, početni su podaci zajednički i za a) i za b) zadatak.

$x$  - masa (kg),  $y$  - cijena (kn)

$$\begin{array}{ll} x_1 = 4.5 \text{ kg} & y_1 = 25.20 \text{ kn} \\ x_2 = ? & y_2 = 66.08 \text{ kn} \end{array}$$

$$x_1 : x_2 = y_1 : y_2$$

$$4.5 : x_2 = 25.20 : 66.08$$

$$4.5 \cdot 66.08 = x_2 \cdot 25.20$$

$$x_2 = \frac{4.5 \cdot 66.08}{25.20} = 11.8 \text{ kg}$$

Za 66.08 kn može se kupiti 11.8 kg krumpira.

**Zadaci**

27. Krojač sašije 5 odijela za 12 dana.  
a) Koliko mu dana treba da sašije 23 odijela?  
b) Koliko odijela sašije za 7.2 dana?
28. Za bojenje  $100 \text{ m}^2$  unutarnjeg zida potrebno je 15 l boje.  
a) Koliko je litara potrebno za bojenje  $55 \text{ m}^2$  zida?  
b) Ako kod kuće imamo 11 l boje, koliku površinu zida možemo obojiti?

29. Matijina baka treba 2.5 klupka vune za tri para rukavica.  
a) Koliko će trebati klupka za 6 takvih parova?  
b) Koliko parova može naštikati od 15 klupka vune?

Ne zaboravi najprije označiti zadane veličine.

Pazi na redoslijed - nemoj pomiješati različite veličine!





## Zadaci

30. Za 20 jednakih drvenih kutija treba platiti 346 kn.  
 a) Koliko стоји 11 takvih kutija?  
 b) Koliko се kutija може kupiti за 467.10 kn?
31. 8 kg mahuna стоји 100 kn.  
 a) Koliko стоји 5.7 kg mahuna?  
 b) Koliko се kg mahuna може dobiti za 78.75 kn?
32. Jela visoka 2.4 m baca sjenu 1.5 m.  
 a) Koliku sjenu u to doba dana ima čovjek visok 1.60 m?  
 b) Koliko je visoko drvo kestena čija je sjena 175 cm?
33. Stan površine 35 m<sup>2</sup> стојi 59500 eura.  
 a) Kolika je cijena stana površine 44.5 m<sup>2</sup> u istoj zgradi ako je investitor odlučio prodavati sve stanove po istoj cijeni?  
 b) Provjeri na tečajnoj listi koliko oba stana stoje u kunama.
34. U slastičarnici 4 kremšnите stoje 34 kune. Koliko prijatelja Ana може počastiti za rođendan ako ima 127.50 kn? Koliko ћe stajati tri kremšnите za njezine roditelje i baku?
- proporcionalne veličine**  

$$x_1 : x_2 = y_1 : y_2$$
35. U 125 ml soka ima 47.5 kcal.  
 a) Koliko kcal ima u 250 ml soka?  
 b) Koliko soka sadrži 190 kcal?
36. Žičara prijeđe put od 21250 m za 1 sat i 25 minuta.  
 a) Za koliko ћe vremena prijeći 5000 m?  
 b) Koliko ћe joj vremena trebati da istom brzinom prijeđe 11000 m?  
 c) Koliki ћe put prijeći za 45 minuta?
37. Stroj obradi 26 stabala za 4 sata i 20 minuta.  
 a) Koliko mu treba sati i minuta za 23 stabla?  
 b) Za koliko je vremena obradio 42 stabala?  
 c) Kakav mu je radni učinak?  
 d) Koliko stabala obradi istim učinkom za 3 sata i 10 minuta?
38. Nagibni vlak prijeđe 630 km za 4 sata i 12 minuta.  
 a) Koliko mu sati i minuta treba za 600 km?  
 b) Koliko km prijeđe za 3 sata i 48 min?  
 c) Koliko sati i minuta mu treba za 712.5 km?
39. Turistički autobus prijeđe 255 km za 3 sata i 24 min.  
 a) Koja mu je prosječna brzina?  
 b) Koliko kilometara prijeđe tom brzinom za 2 sata i 30 minuta?  
 c) Koliko mu vremena treba za 195 km?
40. Avion prijeđe put od 1400 km za 1 sat i 36 min.  
 a) Odredi brzinu aviona;  
 b) Koliki put prijeđe istom brzinom za 3 sata i 42 min?  
 c) Koliko mu je sati i minuta trebalo da prijeđe 2275 km?
41. 5 litara soka od jabuke стојi 43 kune.  
 a) Koliko stoje 3 litre toga soka?  
 b) Koliko се litara soka може kupiti za 94.60 kn?

Uvježbaj proporcionalne veličine rješavajući zadatke sa CD-a



## 2.4. Grafički prikaz proporcionalnosti

### Povezivanje točaka

Nacrtaj pravokutni koordinatni sustav u ravnini, zatim nacrtaj zadane točke i spoji ih.

$A(2, 6); B(3, 9); C(4, 12), D(0,0)$ . Opiši spojnicu tih točaka.

Već smo ranije naučili da spajanjem točaka u koordinatnom sustavu možemo prikazati razne zagonetne likove, a sad nas zanima što ćemo dobiti ako u koordinatnom sustavu prikažemo točke čije koordinate određuju proporcionalne veličine.

### Primjer 1. Pravac

Cijena 1 kilograma smokava je 12 kn. Popuni tablicu cijenama za zadane količine smokava.

Prikaži grafički vezu između količine smokava i iznosa koji treba platiti.

količina ( kg )	0	1	2	3	5
cijena (kn)		12			

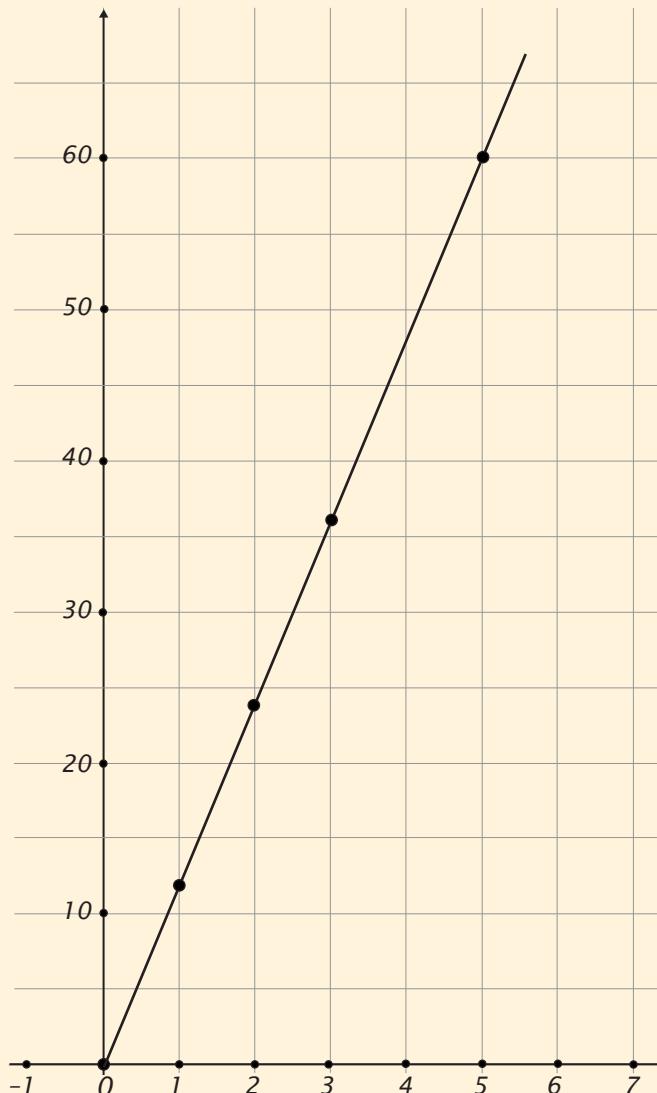
### Rješenje:

količina ( kg )	0	1	2	3	5
cijena (kn)	0	12	24	36	60

Primjećujemo da sve točke leže na pravcu kroz ishodište.

### Važno

Grafički prikaz proporcionalnih veličina je pravac kroz ishodište koordinatnog sustava.



## Zadaci

- Kilogram krumpira prodaje se za 2 kn. Nacrtaj tablicu i izračunaj koliko treba platiti 0, 2, 3, i 5 kg krumpira. Nacrtaj grafički prikaz.
- Luka može za 3 min pretrčati 300 m. Koliko bi Luka pretrčao za 1, 4, 6 i 10 minuta? Zapiši te podatke u obliku tablice pa nacrtaj grafički prikaz.
- Avion leti brzinom 750 km/h. Prepiši, popuni tablicu i grafički prikaži.

vrijeme (h)	0	2	4	6	8
prijeđeni put (km)					

- Za izradu jednog kruha potrebno je 500 g brašna. Koliko je brašna potrebno za 2, 4, 6, i 10 komada kruha? Grafički prikaži vezu između potrošnje brašna i proizvodnje kruha.
- BMW troši 8 l benzina na 100 km, a mercedes 9 l na 100 km. Prepiši, popuni tablicu o potrošnji benzina za ta dva automobila, a zatim grafički prikaži njihovu potrošnju i odgovori na pitanja.

prijeđeni put (km)		100	200	400	600	1000
potrošeni benzin (l)	BMW					
	Mercedes					

- Koji automobil više troši na 100 km, a koji više trošina 200 km?
- Koliko je litara benzina potrebno svakom automobilu za dionicu od 300 km?
- Kolika je razlika u potrošnji na dionici od 1000 km?
- Koliko kilometara može prijeći svaki automobil sa 72 l benzina?

- Za 40 plastičnih boca pri povratu ambalaže dobije se 20 kuna. Koliko se kn dobije za 1, 4, 6 i 10 boca? Zapiši te podatke u obliku tablice pa nacrtaj grafički prikaz.
- Dva kilograma grožđa u Opatiji stoje 60 kn, a u Zagrebu 3 kg stoje 51 kn. Prepiši, popuni tablicu:

kg grožđa		1	3.5	4.2	5.6	11
ukupna cijena	u Opatiji					
	u Zagrebu					

- Prikaži grafički podatke iz tablice;
  - Gdje je cijena grožđa povoljnija?
  - Koliko se grožđa za 76.5 kn dobije u Zagrebu, a koliko u Opatiji?
  - Kolika je razlika u cijeni grožđa ako se pravi sok od 100 kg grožđa?
- Dubina mora mjeri se zvučnom sondom. Prepiši, pa izračunaj vrijednosti koje nedostaju u tablici i prikaži ih grafički u pravokutnom koordinatnom sustavu:

Dubina mora (u metrima)	1500	1125		750
Vrijeme potrebno da se zvuk vrati do sonde (u sekundama)	2		2.5	

- Za 25 jednakih ukrasnih kutija treba platiti 95 kn. Nacrtaj tablicu, izaberi i izračunaj podatke koji ti trebaju te nacrtaj grafički prikaz cijene kutija.
- Provjeri na tečajnoj listi koliko je kuna 1 euro. Nacrtaj tablicu, izaberi i izračunaj podatke koji ti trebaju te nacrtaj grafički prikaz.

## 2.5. Obrnuto proporcionalne veličine

Koje su rečenice istinite? Uza svaku rečenicu napiši DA ako je točna ili NE ako nije točna.

- a) Što više radnika radi, to će posao prije biti gotov;
- b) Što manje tkanine kupiš, to ćeš veći iznos platiti;
- c) Što se brže voziš bicikлом, to više vremena treba da dođeš do škole;
- d) Što je više gostiju na rođendanu, to će dobiti veće kriške torte.

Pogledaj još jednom rečenice u uvodnom zadatku - u kojima prepoznaćeš proporcionalne veličine, a kakve su veličine u preostalim zadacima?

### Primjer 1.

#### Obrnuto proporcionalne veličine

Prepiši, pa dopuni rečenice:

- a) Ako automobil vozeći brzinom od 60 km/h prijeđe neki put za 2 sata, onda će vozeći brzinom od 120 km/h taj put prijeći za \_\_\_\_ sat. Vozeći dvostruko većom brzinom automobil, će prijeći put za \_\_\_\_\_ manje vremena.
- b) Ako 6 radnika može obaviti neki posao za 15 dana, onda će 18 radnika taj posao obaviti za \_\_\_\_ dana.

Trostruko više radnika završit će posao za \_\_\_\_\_ manje vremena.

- c) Ako razred podijelimo na 8 grupa, u svakoj će biti 3 učenika. Podijelimo li isti razred na 2 grupe, u svakoj će biti \_\_\_\_ učenika.

Podijelimo li razred na četverostruko manje grupe, u svakoj će biti \_\_\_\_\_ više učenika.

#### Rješenje:

- a) Ako automobil vozeći brzinom od 60 km/h prijeđe neki put za **2 sata**, onda će vozeći brzinom od 120 km/h taj put prijeći za **1 sat**. Vozeći dvostruko većom brzinom, automobil će prijeći put za **dvostruko manje** vremena.
- b) Ako 6 radnika može obaviti neki posao za

**15 dana**, onda će 18 radnika taj posao obaviti za **5 dana**.

Trostruko više radnika završit će posao za **trostruko manje** vremena.

- c) Ako razred podijelimo na 8 grupa, u svakoj će biti **3 učenika**. Podijelimo li isti razred na 2 grupe, u svakoj će biti **12 učenika**.

Podijelimo li razred na četverostruko manje grupe, u svakoj će biti **četverostruko više** učenika.

U tom smo primjeru vidjeli da:

- **dvostrukom povećanjem jedne veličine odgovara dvostruko smanjenje druge veličine**
- peterostrukom povećanju jedne veličine odgovara peterostruko smanjenje druge veličine
- **četverostrukom smanjenju jedne veličine odgovara četverostruko povećanje druge veličine**
- deseterostrukom smanjenju jedne veličine odgovara deseterostruko povećanje druge veličine, itd.

obrnuto proporcionalne veličine

Matematički kažemo: **povećanju** jedne veličine odgovara **smanjenje** druge veličine, odnosno smanjenju jedne veličine odgovara povećanje druge veličine sa istim faktorom.



Veličine koje ovise jedna o drugoj kao u ovom primjeru nazivaju se **obrnuto proporcionalnim** ili **obrnuto razmjernim veličinama**.

### Važno

Dvije su veličine međusobno **obrnuto proporcionalne** ako iz **povećanja** (**smanjenja**) jedne veličine slijedi **smanjenje** (**povećanje**) druge veličine sa istim faktorom.

## Zadaci

1. Prepiši, pa dopuni rečenice riječima više ili manje:
  - a) Što se brže voziš automobilom, to treba \_\_\_\_\_ vremena da stigneš na cilj;
  - b) Što manje tereta stane u prikolicu, to \_\_\_\_\_ puta treba prevoziti da bismo prevezli neku hrpu zemlje;
  - c) Ako dasku izrežemo na manje dijelove, to \_\_\_\_\_ dijelova možemo napraviti;
  - d) Što manje radnika imamo, to će \_\_\_\_\_ vremena trebati da se posao dovrši.
2. Prepiši, pa dopuni rečenice:
  - a) Da bismo ispraznili bazen kantama od 15 l, potrebno nam je 9 sati. Ako taj bazen želimo isprazniti za 3 sata, moramo ga prazniti kantama od \_\_\_\_\_ litara.  
Da bismo bazen ispraznili za trostruko manje vremena, trebamo \_\_\_\_\_ veće kante.
  - b) Ako tortu podijelimo na 4 prijatelja, svaki će dobiti krišku od 500 g. Ako istu tortu podijelimo na 20 prijatelja, svaki će dobiti krišku od \_\_\_\_\_ grama.  
Peterostruko veći broj prijatelja dobit će \_\_\_\_\_ manje kriške torte.
  - c) Ako Luka trčeći brzinom 5 km/h pretrči stazu za 2 sata, onda će trčeći brzinom 10 km/h tu stazu pretrčati za \_\_\_\_\_ sat.  
Trčeći dvostruko brže, Luki će trebati \_\_\_\_\_ manje vremena.
  - d) Traktor preore njivu za 40 dana. Deset takvih traktora preorat će njivu za \_\_\_\_\_ dana.

Deseterostruko više istih traktora preorat će njivu za \_\_\_\_\_ manje dana.

e) Ako dva učenika pomognu učiteljici skidati stare plakate s panoa, posao će trajati 20 minuta, a ako joj pomogne 10 učenika, posao će trajati \_\_\_\_\_ minute ako prepostavimo da svi jednako rade.

Da bi za obavljanje posla trebalo peterostruko manje vremena, treba jednako raditi \_\_\_\_\_ više učenika.

f) Za popločavanje neke terase treba 200 pločica površine  $2 \text{ dm}^2$  ili 100 pločica površine \_\_\_\_\_  $\text{dm}^2$ .

Dvostruko manje pločica treba za \_\_\_\_\_ veće površine.

3. Označi veličine koje su obrnuto proporcionalne:

- a) broj pumpi i vrijeme za punjenje bazena;
- b) broj radnika i vrijeme za završetak radova;
- c) broj godina i masa čovjeka;
- d) količina benzina i duljina puta;
- e) broj koraka za određenu udaljenost i duljina koraka;
- f) iznos eura i iznos kuna prema tečajnoj listi;
- g) površina pločice i broj pločica za popločavanje terase;
- h) brzina vožnje i duljina putovanja.

4. Označi veličine koje su obrnuto proporcionalne:

- a) broj maminih pomagača i vrijeme završetka spremanja kuće;

- b) broj osoba koje su iznajmile jedan autobus i cijena iznajmljivanja po osobi;  
 c) nosivost kamiona i broj kamiona za istu količinu tereta;  
 d) duljina puta i broj prijeđenih kilometara;  
 e) duljina puta i brzina vožnje;  
 f) količina i cijena paprike na tržnici;  
 g) duljina i širina pravokutnika iste površine;  
 h) broj pobjednika i dobitak po pobjedniku na lutriji.
5. Vrijednosti A i B obrnuto su proporcionalne. Prepiši pa dopuni tablicu:

A postaje:	Tada B postaje:
4 puta veća	
dvostruko manja	
dvostruko veća	
4 puta manja	

6. Prepiši, pa dopuni dobitak na lutriji iznosi 8 000 000 kn. Kako će se pravedno razdijeliti dobitak ako je broj pobjednika:

Broj pobjednika	10	8	4	2	1
Dobitak po pobjedniku					

## Primjer 2. Koeficijent obrnute proporcionalnosti

U tablici su prikazane brzine automobila i odgovarajuće vrijeme potrebno za prelazak istog puta.

- a) jesu li prikazane veličine obrnuto proporcionalne?  
 b) Izračunaj umnožak u posljednjem redu tablice;  
 c) Što nam govori taj umnožak? Kakav je taj umnožak?

brzina automobila	x	50 km/h	100 km/h	150 km/h
vrijeme vožnje	y	6 h	3 h	2 h
umnožak	$y \cdot x$			

### Rješenje:

- a) Zadane su veličine obrnuto proporcionalne.  
 b)

brzina automobila	x	50 km/h	100 km/h	150 km/h
vrijeme vožnje	y	6 h	3 h	2 h
umnožak	$y \cdot x$	300	300	300

Što zaključuješ? Prepiši pa dopuni:

Što je više pobjednika, to je \_\_\_\_\_ dobitak po pobjedniku.

Što je manje pobjednika, to je \_\_\_\_\_ dobitak po pobjedniku.

7. Ana je uštedjela džeparac za more. Bit će na moru 6 dana i ima toliko novca da svakog dana može potrošiti 255 kn. No ona možda produlji svoj boravak na više dana. Koliko će tada moći trošiti? Prepiši pa ispuni tablicu:

Broj dana	6	9	10	12	15
Može potrošiti u jednom danu					

8. Učiteljica je podijelila 7.b na 6 grupa po 4 učenika. Koliko će učenika biti u grupi ako razred treba podijeliti na 8 grupa?  
 9. Zalihe hrane dovoljne su da 6 slonova može jesti 10 dana. Koliko bi potrajale te zalihe ako bi ih trošilo 12 slonova?  
 10. 10 radnika sagradilo je zid za 3 dana. Za koliko bi dana taj zid sagradila 2 radnika?

c) Taj nam umnožak govori kolika je duljina puta. Umnožak je stalno jednak 300.

U tom primjeru računali smo umnožak dviju veličina. Kod veličina koje su obrnuto proporcionalne taj je umnožak stalni, a nazivamo ga koeficijentom obrnute proporcionalnosti i označavamo sa  $k$ .

Ako obrnuto proporcionalne veličine označimo sa  $x$  i  $y$ , onda koeficijent obrnute proporcionalnosti zapisujemo ovako:  $k = x \cdot y$ .

koeficijent  
obrnute  
proporcionalnosti

### Važno

Umnožak dviju obrnuto proporcionalnih veličina je stalni.  $k = x \cdot y$ .

Veličina  $y$  obrnuto je proporcionalna veličini  $x$  s koeficijentom obrnute proporcionalnosti  $k$ ,  $k > 0$  ako vrijedi  $y = k : x$ .

### Primjer 3. Značenje koeficijenta obrnute proporcionalnosti

- a) Automobil vozeći brzinom od 70 km/h prijeđe neki put za 2 sata. Kolika je duljina tog puta?
- b) Za prijevoz nekog tereta potrebno je 8 kamiona nosivosti 5 tona. Koliku količinu tereta treba prevesti?
- c) Da bi završili neki posao, 12 radnika treba raditi 10 sati. Koliko je radnih sati potrebno za završetak toga posla?

#### Rješenje:

- a) Da bismo izračunali duljinu puta, brzinu trebamo pomnožiti s vremenom,  
 $70 \cdot 2 = 140$  km. Put je dugačak 140 km.

b) Da bismo izračunali ukupnu količinu tereta, broj kamiona trebamo pomnožiti s njihovom nosivošću,  $8 \cdot 5 = 40$  t. Ukupna količina tereta je 40 t.

c) Da bismo izračunali ukupan broj radnih sati, broj radnika trebamo pomnožiti s brojem sati. Sto ih svaki od njih odradi,  $12 \cdot 10 = 120$  h.

Umnožak obrnuto proporcionalnih veličina ima različita značenja ovisno o zadanim veličinama. Taj umnožak, tj. koeficijent obrnute proporcionalnosti može, primjerice značiti: duljinu puta, ukupnu količinu tereta, ukupan broj radnih sati, količinu vode u bazenu i sl.

## Zadaci

11. Prepiši, pa izračunaj koeficijent obrnute proporcionalnosti i napiši njegovo značenje (prvi je redak riješen).

veličina x	veličina y	koeficijent obr. prop. k	značenje
25 radnika	16 sati	$k=x \cdot y = 25 \cdot 16 = 400$	ukupan broj radnih sati
50 km/h	6 h		
10 kamiona	nosivost 3 t		
18 koraka	duljina koraka 65 cm		
15 kanti	20 l vode u svakoj kanti		

12. Prepiši, pa izračunaj koeficijent obrnute proporcionalnosti i napiši njegovo značenje.

veličina x	veličina y	koeficijent obr. prop. k	značenje
14 gostiju	2 kriške torte		
25 km/h	7 h		
23 labuda	11 kg hrane		
5 pumpi	3 sata punjenja		
4 grupe	6 učenika		

### Primjer 4. Izračunavanje obrnuto proporcionalnih veličina pomoću koeficijenta

Vozeći brzinom 65 km/h automobil je za 3.5 sati prešao put od Zagreba do mora.

- a) Koliki je put prešao?
- b) Da je vozio brzinom 70 km/h, koliko bi mu vremena trebalo da prijeđe isti put?

#### Rješenje:

Označimo sa  $x$  brzinu automobila (km/h), a sa  $y$  označimo vrijeme (h).

Zadano je  $x_1 = 65$  km/h;  $y_1 = 3.5$  h.

- a) Duljina puta ujedno je i koeficijent obrnute proporcionalnosti zadanih veličina:

$k = x \cdot y = 65 \cdot 3.5 = 227.5$  km. Dakle automobil je prešao 227.5 km.

- b) Da bismo dobili koliko vremena treba automobilu da prijeđe taj put vozeći brzinom 70 km/h, duljinu puta trebamo podijeliti s novom brzinom. Označimo novi podatak o brzini sa  $x_2$ ;  $x_2 = 70$  km/h.

Dobivamo da je potrebno vrijeme

$$y_2 = k : x_2 = 227.5 : 70 = 3.25 \text{ h.}$$

## Primjer 5. Izračunavanje obrnuto proporcionalnih veličina pomoću koeficijenta

Matijina mama angažirala je majstore za obnavljanje kupaonice. Majstor je rekao da 2 radnika mogu taj posao završiti za 40 sati.

- Koliko je ukupno radnih sati potrebno za taj posao?
- Matijina bi mama željela da taj posao bude završen za 10 sati. Koliko radnika treba angažirati?

### Rješenje:

Označimo sa  $x$  broj radnika, a sa  $y$  označimo vrijeme trajanje posla (h).

Zadano je  $x_1 = 2$ ;  $y_1 = 40$  h.

a) Ukupan broj radnih sati ujedno je i koeficijent obrnute proporcionalnosti zadanih veličina:  $k = x \cdot y = 2 \cdot 40 = 80$ . Dakle ukupno je potrebno 80 radnih sati.

b) Da bismo dobili koliko je radnika potrebno da bi posao bio gotov za 10 sati, ukupan broj radnih sati trebamo podijeliti s vremenom trajanja posla. Označimo novi podatak o vremenu trajanja posla sa  $y_2$ ;  $y_2 = 10$  h.

$$x_2 = k : y_2$$

Dobivamo  $x_2 = k : y_2 = 80 : 10 = 8$  radnika.



## Zadaci

- Jedan posao 12 radnika može završiti za 15 sati, a drugi posao 9 radnika za 16 sati. Koji je posao zahtjevniji?
- Vozeći brzinom 120 km/h, automobil prijeđe udaljenost između gradova Zlatopolje i Srebrnopolje za 3.5 h. Drugi automobil vozeći brzinom 105 km/h, prijeđe udaljenost između gradova Metalgrad i Drvograd za 4.5 h. Koji je automobil prešao veći put?
- Na Aninu rođendanu 15 gostiju pojelo je svaki po 3 kriške pizze, a na Majinu 12 gostiju po 4 jednakovelične kriške pizze. Na čijem je rođendanu pojedeno više pizze?
- Vozeći brzinom 60 km/h, automobil je za 1.3 sata prešao put od Zagreba do Varaždina.
  - Koliki je put prešao?
  - Da je vozio brzinom 65 km/h, koliko bi mu vremena trebalo da prijeđe isti put?
- Ravnatelj neke škole angažirao je majstore za bojenje sportske dvorane. Majstor je rekao da 6 radnika može taj posao završiti za 15 sati.
  - Koliko je ukupno radnih sati potrebno za taj posao?
  - Ravnatelj bi želio da taj posao bude završen za 10 sati. Koliko radnika treba angažirati?
- Bazene u nekim toplicama ispraznili su da bi ih obnovili. Sada ih treba ponovno napuniti. Ako uključe 5 pumpi, bit će puni za 21 sat. Za koliko će sati biti puni ako uključe 7 pumpi?
- Luka ima korak duljine 0.7 m i treba mu 264 koraka do škole. Kolika je duljina Anina koraka ako njoj treba 231 korak do škole? (Luka i Ana su brat i sestra i žive zajedno u kući).
- Učenici 8.a i 8.b idu na izlet i zajedno ih je 56. Na roditeljskom sastanku odabrane su tri različite ponude za autobus:
  - prva ponuda: 4480 kn
  - druga ponuda: 4200 kn
  - treća ponuda: 4760 kn
  - Odlučili su se za najpovoljniju ponudu. Koliko će svaki učenik platiti autobus ako se izabere najpovoljnija ponuda?
  - Kolika bi bila cijena vožnje po osobi kada bi 6 učenika odustalo?

### Primjer 6. Izračunavanje obrnuto proporcionalnih veličina pomoću proporcije

Knjiga ima 240 stranica, a na svakoj je stranici 50 redaka.

- Koliko bi redaka trebala imati svaka stranica da bi knjiga imala 200 stranica?
- Ako se broj redaka na stranici smanji na 40, koliko će onda ta knjiga imati stranica?

#### Rješenje:

obrnuto proporcionalne veličine

$$x_1 : x_2 = y_2 : y_1$$

Najprije označimo zadane veličine:

$x$  - broj stranica,  $y$  - broj redaka

- Zatim ispišimo zadane podatke i podatke koji se traže.

$$x_1 = 240 \quad y_1 = 50$$

$$x_2 = 200 \quad y_2 = ?$$

Budući da, kod obrnuto proporcionalnih veličina, iz povećanja (smanjenja) jedne veličine slijedi proporcionalno smanjenje (povećanje) druge veličine - vrijedi ova proporcija:

$$x_1 : x_2 = y_2 : y_1$$

Upotrijebimo je za rješavanje primjera.

$$x_1 : x_2 = y_2 : y_1$$

ODO JE VRLO SLIČNO PROPORCIONALnim VELIČINAMA.

DA, SAMO MORAŠ PRIPAZITI DA UPOTRIJEBIŠ ODGOVARAJUĆU PROPORCIJU NA POČETKU, A OSTATAK POSTUPKA JE ISTI.



Uvrstimo zadane podatke, a za veličinu koja je nepoznata ostavimo slovnu oznaku.

$$240 : 200 = y_2 : 50$$

Primijenimo svojstva proporcija i zapišemo tu proporciju u obliku umnoška.

$240 \cdot 50 = 200 \cdot y_2$ . Iz te jednakosti ovako izračunavamo  $y_2$ :

$$y_2 = \frac{240 \cdot 50}{200} = 60.$$

Dakle da bi knjiga imala 200 stranica, na svakoj stranici treba biti 60 redaka teksta.

#### Važno

Za obrnuto proporcionalne veličine vrijedi jednakost  $x_1 : x_2 = y_2 : y_1$

- Na isti način, pomoću proporcija riješimo i zadatak b) - naravno, početni su podaci zajednički i za a) i za b) zadatak.

$x$  - broj stranica,  $y$  - broj redaka

$$x_1 = 240 \quad y_1 = 50$$

$$x_2 = ? \quad y_2 = 40$$

$$x_1 : x_2 = y_2 : y_1$$

$$240 : x_2 = 40 : 50$$

$$240 \cdot 50 = x_2 \cdot 40$$

$$x_2 = \frac{240 \cdot 50}{40} = 300$$

Dakle ako je na stranici 40 redaka, onda će knjiga imati 300 stranica.

#### PROPORCIONALNE

$$x_1 : x_2 = y_1 : y_2$$

#### OBRNUTO PROPORCIONALNE

$$x_1 : x_2 = y_2 : y_1$$



## Zadaci

21. Bazen se napuni za 10 sati ako ga puni 6 jednakih pumpi.
- Za koliko bi vremena taj bazen napunile 4 pumpe?
  - Koliko je pumpi potrebno da bi bazen bio pun za 4 sata?
22. Razrežemo li deblo drveta na daske debljine 6 cm, dobit ćemo 14 dasaka.
- Kolika bi trebala biti debljina daske da od toga debla dobijemo 10 dasaka?
  - Koliko ćemo dasaka dobiti ako režemo daske debljine 7 cm?
23. Zalihe hrane dovoljne su za prehranu 12 konja 16 dana.
- Koliko će dana trajati zalihe ako ih upotrebljavamo za prehranu 16 konja?
  - Koliko konja možemo prehraniti tim zalihamama u 8 dana?
24. Tvornica čokolade ima 5 istovrsnih strojeva koji dnevnu količinu čokolade naprave za 18 sati.
- Koliko bi sati trajao posao sa 6 takvih strojeva?
  - Ako želimo da posao traje 10 sati, koliko nam treba strojeva?
  - Koliko bi strojeva taj posao obavilo za 3 sata?
- 25 Maja je razrezala kolač na manje komade. Ako dođe 8 gostiju, svaki će dobiti 3 komada kolača.
- Koliko će komada kolača dobiti svaki gost ako dođe 12 gostiju? Prepostavljamo da će svaki gost dobiti jednak broj komada kolača.
  - Ako želi svakom gostu dati po 4 komada kolača, koliko gostiju smije pozvati?
26. Most na rijeci 24 radnika mogu završiti za 16 dana.
- Koliko je radnika potrebno da taj most sagrade za 12 dana?
  - Za koliko bi dana most završilo 6 radnika?
27. Knjiga ima 156 stranica, a na svakoj je stranici 60 redaka.
- Koliko bi redaka trebala imati svaka stranica da bi knjiga imala 120 stranica?
  - Ako se broj redaka na stranici smanji na 40, koliko će onda ta knjiga imati stranica?
28. Jedna obitelj planira boraviti na moru 14 dana i ima toliko novca da svakoga dana može potrošiti 536 kn.
- Ako želi produljiti svoj boravak za 6 dana, koliko će tada moći dnevno potrošiti?
  - Ako bude trošila 938 kn na dan, za koliko će dana skratiti boravak?
29. U školi u Ogulinu pripremljeno je  $48 \text{ m}^3$  drva za 8 mjeseci zime. Zbog jače zime dnevna potrošnja drva povećala se na  $0.3 \text{ m}^3$ .
- Koliko će dugo potrajati pripremljena zaliha drva u toj školi?
  - Takva jaka zima potrajala je svih predviđenih 8 mjeseci. Koliko su još  $\text{m}^3$  drva morali nabaviti do kraja te jake zime?
  - Koliki je ukupni trošak za drva te godine bio u toj školi ako  $\text{m}^3$  drva stoji 285 kn?
30. Dvije radnice napune policu robom za 30 minuta. Koliko treba radnica da se ista polica napuni za 20 minuta? Vlasnik plaća 600 kn po polici. Koliko zaradi svaka radnica u prvom slučaju, a koliko u drugom?
31. Iz kamenoloma blizu Bjelolasice na dan se izveze kamena u 10 kamiona nosivosti 14.4 tone.
- Koliku nosivost treba imati 9 kamiona da bi izvezli istu količinu kamena iz toga kamenoloma?
  - Koliko šlepera nosivosti 24 tone treba za istu količinu kamena?
32. Radnici asfaltiraju cestu radeći 5 dana po 6.8 sati. Gradonačelnik želi da radovi budu gotovi za 2 dana. Koliko sati na dan moraju raditi ti radnici?
33. Učenici izrađuju plakat radeći 6 dana po 1.5 sati. Učitelj želi da plakat bude gotov za 4 dana. Koliko sati i minuta na dan moraju raditi ti učenici?

Ne zaboravi najprije označiti zadane veličine.  
Pazi na redoslijed - nemoj pomiješati različite veličine!



34. Razred od 25 učenika posadi cvijeće u školskom dvorištu za 6 sati. Koliko bi učenika trebalo raditi da bi vrt bio posađen za jedan sat manje? Prepostavimo da svi učenici rade jednakom brzo.
35. Na lutriji je bilo 15 ravnopravnih dobitnika. Dobitak je podijeljen i svaki je dobio 35 567.20 kn. Koliko bi svaki dobio da ih je bilo 8?
36. Ana i Luka sudjelovali su na biciklijadi. Ana je vozila brzinom od 24 km/h ukupno 4 sata i 20 min, a Luka je vozio brzinom od 26 km/h. Koliko je ranije Luka stigao na cilj?
37. Anina baka ispekla je kolač u pravokutnoj posudi dimenzija 24 cm i 15 cm. Ako želi duguljaste komade kolača, kolač će morati izrezati na duljinu 7.5 cm i širinu 3 cm. Kolike bi trebale biti dimenzije komada u obliku kvadrata? Kolike su površine tih komada? Kojih će kolača biti više?

38. Koliko crvenih pločica dimenzija 20 cm i 15 cm treba za popločavanje poda kupaonice površine 6 m<sup>2</sup>? Koliko su široke plave pločice duljine 25 cm, kojih treba 150 za prekrivanje toga poda?

Ako je cijena komada crvenih i plavih pločica ista, koje se pločice isplati kupiti za tu kupaonicu?

39. Koliko žutih kvadratnih pločica stranice 20 cm treba za popločavanje poda kupaonice površine 4.4 m<sup>2</sup>? Koliko su široke pravokutne, zelene pločice duljine 22 cm, kojih treba 125 za prekrivanje toga poda?

Ako je cijena komada žutih i zelenih pločica ista, koje se pločice isplati kupiti za tu kupaonicu?

Uvježbaj obrnuto proporcionalne veličine rješavajući zadatke sa CD-a



## 2.6. Primjena proporcionalnosti i obrnute proporcionalnosti



### Zadaci

1. Označi proporcionalne veličine sa P, a obrnuto proporcionalne veličine sa OP.
  - a) količina jabuka i iznos koji moramo platiti;
  - b) količina boje i površina zida koji možemo obojiti;
  - c) broj godina i visina čovjeka;
  - d) trajanje zaliha hrane i broj životinja;
  - e) razina znanja i ocjena iz matematike;
  - f) iznos eura i iznos dolara prema tečajnoj listi;
  - g) površina pločice i broj pločica za popločavanje terase;
  - h) brzina vožnje i duljina prijeđenog puta.
2. Označi proporcionalne veličine sa P, a obrnuto proporcionalne veličine sa OP.
  - a) broj pumpi i vrijeme za punjenje bazena;
  - b) broj radnika i vrijeme za završetak radova;
  - c) broj godina i masa čovjeka;

- d) količina benzina i duljina puta;
- e) broj koraka za određenu udaljenost i duljina koraka;
- f) iznos eura i iznos kuna prema tečajnoj listi;
- g) broj bilježnica i iznos koji moramo platiti;
- h) brzina vožnje i trajanje putovanja.

Proporcionalne

$$x_1 : x_2 = y_1 : y_2$$

Obrnuto

proporcionalne

$$x_1 : x_2 = y_2 : y_1$$

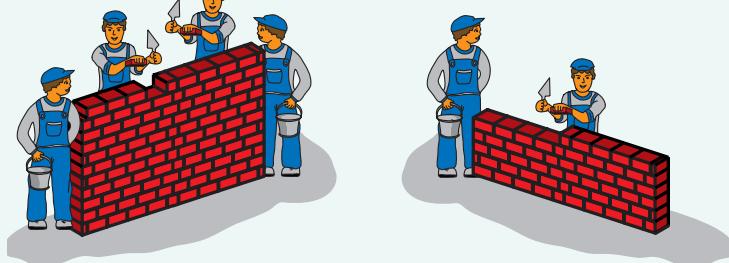


3. Ako 12 kg mandarina stoji 48 kn, koliko stoji 5 kg mandarina?
4. Automobil za 100 km potroši 8,2 litre benzina. Koliko kilometara može prijeći s punim spremnikom od 41 litre?
5. Ako 13 kg krušaka stoji 113.10 kn, koliko se kilograma krušaka može kupiti za 130.50 kn?

6. Dva soboslikara obojila su neki poslovni prostor za 6 dana. Za koliko bi dana taj posao obavila 3 soboslikara?
7. Neki posao 18 radnika obavi za 35 dana. Za koliko će dana posao obaviti 45 radnika?
8. Ana je 2.5 metra tkanine platila 195 kuna.
  - a) Koliko bi platila 3 m te tkanine?
  - b) Koliko se metara tkanine može kupiti za 390 kuna?
9. Maja i Luka išli su na izlet biciklima. Vozeći prosječnom brzinom od 20 km/h, došli su do tete Nele za 1 sat i 20 minuta. Kojom bi prosječnom brzinom trebali voziti da isti put prijeđu za 50 minuta?
10. Na putu do mora automobil je za 420 km potrošio 31.5 litre benzina. Koliko benzina taj automobil troši na 100 km?
11. Neki posao 9 radnika obavi za 35 dana. Za koliko će dana posao obaviti 45 radnika?
12. Biciklist vozi stalnom brzinom od 12.5 km/h.
  - a) Koliki put biciklist može prijeći za dva sata?
  - b) Koliko mu vremena treba da prijede put od 37.5 km?
13. Lukin tata angažirao je majstore za bojenje zidova u kući. Majstor je rekao da 4 radnika mogu taj posao završiti za 18 sati.
  - a) Koliko je ukupno radnih sati potrebno za taj posao?
  - b) Tata bi želio da taj posao bude završen za 12 sati. Koliko radnika treba angažirati?
14. Bazen se napuni s 5 cijevi za 4 sata i 30 min. Koliko će se dugo taj bazen puniti s 3 cijevi?
15. Učenici 7.a i 7.b idu na izlet i zajedno ih je 58. Odlučili su se za izlet u Vukovar, s cijenom autobusa od 5452 kn.
  - a) Koliko će vožnju platiti svaki učenik?
  - b) Kolika bi bila cijena vožnje po osobi kada bi 11 učenika odustalo?
16. Automobil za 100 km potroši 7.8 litara benzina. Koliko kilometara može prijeći s rezervom od 5 litara?
17. Ako u 1 dl mlijeka ima 64 kcal, koliko kcal ima u 2.5 dl mlijeka?
18. Da bi se isplelo 10 cm pletiva, na iglu treba navesti 14 očica.
  - a) Koliko očica trebamo navesti ako želimo da pletivo bude široko 55 cm?
  - b) Koliko će centimetara biti široko pletivo ako uzmemmo 98 očica?

19. Matija je 125 sličica nogometića zamijenio za 110 sličica pasa. Koliko sličica pasa može zamijeniti za 100 sličica nogometića?

### OBRNUTO PROPORCIONALNO



20. Razrežemo li deblo drveta na daske debljine 5.4 cm, dobit ćemo 17 dasaka.
  - a) Kolika bi trebala biti debljina daske da od tog debla dobijemo 18 dasaka?
  - b) Koliko ćemo dasaka dobiti ako režemo daske debljine 1.7 cm?
21. Tvornica papira ima 8 istovrsnih strojeva koji dnevnu količinu papira obrade za 12 sati.
  - a) Koliko bi sati trajao posao sa 16 takvih strojeva?
  - b) Ako želimo da posao traje 4 sata, koliko nam treba strojeva?
22. Zalihe hrane dovoljne su da 10 ribica može jesti 13 dana. Koliko bi potrajale te zalihe ako bi ih trošile 52 ribice?
23. Neki posao 12 radnika može završiti za 5 dana ako rade 6 sati na dan. Za koliko će dana taj posao biti gotov obavlja li ga 8 radnika 9 sati na dan?
24. Električni bojler za 2 sata i 20 min potroši 2.1 kW struje. Koliko će potrošiti za 5 sati i 15 minuta?

### PROPORCIONALNO



25. Cijev iz koje isteće 56 l vode u minuti napuni bazen za 7 sati. Za koje bi se vrijeme napunio bazen vodom iz cijevi iz koje isteće 49 l u minuti?

26. 6 morskih milja ima duljinu 11 112 m. Koliko kilometara ima 9 morskih milja?
27. Avion prijeđe put od 1200 km za 1 sat i 40 min leteći jednoliko. Za koliko sati prijeđe 7200 km?
28. Ako 23 srne imaju hrane za 3 dana, koliko bi se dugo tom hranom hranilo 30 srna?
29. 6 litara mlijeka stoji 27 kn.
  - a) Koliko se litara može kupiti za 9 kn?
  - b) Koliko stoji 18 litara mlijeka?
30. Asfaltiranje ceste 18 radnika može obaviti za 20 dana. Za koliko bi se dana skratio rok asfaltiranja te ceste ako se nakon 5 dana zaposli još 2 radnika?
31. Sjeću stabala u jednoj šumi može obaviti 15 radnika za 6 dana. Nakon dva dana rada 3 su se radnika razboljela. Za koliko će se dana produljiti sjeća šume?
32. Da bi se sagradila jedna zgrada, 60 radnika treba raditi 60 dana. Da bi zgrada bila sagrađena što prije, nakon 10 dana zaposleno je još 15 radnika. Koliko će dana ranije završiti zgradu?
33. 80 berača obralo bi voćnjak za 12 dana. Nakon 3 dana došlo je još 10 radnika. Za koliko će dana biti obran taj voćnjak?
34. Berbu maslina na plantaži 24 radnika mogu obaviti za 16 dana. Nakon 6 dana došlo je još 6 radnika. Koliko je dana trajala berba?
35. 30 radnika u tvornici košulja radi na jednom izvoznom paketu. Predviđeno je da rade 28 dana. Nakon 10 dana pokazalo se da paket treba isporučiti ranije pa je zaposleno još 6 radnika. Koliko je ranije isporučen paket?
36. Slastičar je kupio 10 strojeva da bi za 30 dana proizveo naručenu količinu sladoleda. Nakon 10 dana 2 su se stroja pokvarila. Za koliko se dana produžila proizvodnja?
37. Za popločavanje podova postoje kvadratne pločice sa stranicom 9 cm i pravokutne sa stranicama 15 cm i 10 cm. Koliko većih pločica treba za popločavanje poda neke kuće ako je manjih potrebno 8100 komada?
38. Za popločavanje podova postoje kvadratne pločice sa stranicom 12 cm i pravokutne sa stranicama 24 cm i 15 cm. Koliko manjih pločica treba za popločavanje poda neke terase ako je većih potrebno 1600 komada?
39. Da bi uništio ambroziju na velikom polju, Peri treba 15 sati, a Juri 25 sati ako rade svaki posebno. Za koliko bi sati uništili ambroziju kad bi radili zajedno?

## 2.7. Ponavljanje

### Pitanja za ponavljanje:

1. Kakva veza postoji između proporcionalnih veličina?
2. Kako računamo koeficijent proporcionalnosti?
3. Koje je značenje koeficijenta proporcionalnosti?
4. Koju proporciju upotrebljavamo za proporcionalne veličine?
5. Kakva veza postoji između obrnuto proporcionalnih veličina?
6. Kako računamo koeficijent obrnute proporcionalnosti?
7. Koje je značenje koeficijenta obrnute proporcionalnosti?
8. Koju proporciju upotrebljavamo za obrnuto proporcionalne veličine?
9. Što je omjer?
10. Što je proporcija ili razmjer?
11. Navedi neki primjer proporcionalnih veličina.
12. Navedi neki primjer obrnuto proporcionalnih veličina.
13. Navedi neki primjer omjera.
14. Navedi neki primjer proporcije.



## Zadaci za ponavljanje:

1. Napiši odgovarajuće omjere:
  - a) 7 golova od 9 pokušaja;
  - b) 15 djevojčica naprema 12 dječaka;
  - c) 3 učitelja za 72 učenika;
  - d) 5 stranica u 20 minuta;
  - e) 11 trica na 45 koševa;
  - f) 11 stolica za 2 stola.
2. Vlak može prijeći 240 km za 2 h. Nastavi li tom brzinom, koliki put će prijeći za 3 sata?
3. 8 kutija slatkiša treba platiti 60 kn. Koliko treba platiti za 12 kutija takvih slatkiša?
4. Jedan radnik pokosi livadu za 8 sati.
  - a) Ako rade tri radnika, koliko će im sati trebati za košnju te livade?
  - b) Koliko bi radnika kosilo 4 sata?
5. Učiteljica je podijelila 7.a na 3 grupe po 10 učenika. Koliko će učenika biti u grupi ako razred treba podijeliti na 5 grupa?
6. 2 kilograma naranči mogu se kupiti za 15.78 kn. Koliko treba platiti 7 kg naranči?
7. Matija je pomagao tati pospremiti garažu. Trebala su mu 3 sata da premjesti 24 kutije i još nije bio gotov. Koliko bi kutija premjestio da je radio 4 sata?
8. Za prijevoz nekog tereta potrebno je 15 kamiona nosivosti 7.8 tona. Koliku količinu tereta treba prevesti? Koliko kamiona nosivosti 3 tone treba za taj teret? Kolika mora biti najmanja nosivost kamiona ako ih je 20?
9. Na Matijinu rođendanu svaki od 12 gostiju pojedje po 2 kriške torte, a na Majinu svaki od 6 gostiju po 5 jednakih velikih kriški. Na čijem je rođendanu pojedeno više torte?
10. Lukin tata potrošio je 30 l boje da bi obojio površinu od  $45 \text{ m}^2$ . Koliku površinu može pobarboti s 50 l boje?
11. Koncentrat soka od naranče miješa se s vodom u omjeru 1 : 4. Koliko sirupa treba staviti u 6 l vode? Koliko se soka time dobije?
12. U trgovini cipelama prodaju 4 para crnih cipela na svakih 7 pari smeđih cipela. Lani je prodano 4900 pari smeđih cipela. Koliko je pari crnih cipela prodano u istom periodu?
13. U jednoj tvornici cipela 6 strojeva radi 5 dana po 4 sata. Koliko bi sati radilo 5 takvih strojeva u 3 dana?
14. U Elektroingu 3 od 7 zaposlenika koristi se javnim prijevozom za dolazak na posao. U Elektroingu radi 9000 zaposlenika. Koliko ih dolazi na posao javnim prijevozom?
15. Koliko je visok Matija ako je njegova sjena duga 0.7 m? Istovremeno je sjena olovke koja стоји okomito na podlogu 5.5 cm, a njezina visina 11 cm.
16. Knjiga ima 300 stranica, a na svakoj je stranici 30 redaka.
  - a) Koliko bi redaka trebala imati svaka stranica da bi knjiga imala 200 stranica?
  - b) Ako se broj redaka na stranici poveća za 10, koliko će onda ta knjiga imati stranica?
17. U zdravljaku se na svakih 7 hot dogova proda 10 hamburgera. Koliko je hot dogova prodano ako je prodano 90 hamburgera?
18. Ako radnici obave posao radeći 9 dana po 4 sata, koliko bi dana radili po 6 sati?
19. Ana je pretrčala 90 krugova oko igrališta za 30 minuta. Koliko će joj vremena trebati da pretrči 135 krugova?
20. Jedno društvo planira boraviti na moru 5 dana i ima toliko novca da svakog dana može potrošiti 820 kn.
  - a) Ako žele produljiti svoj boravak za 3 dana, koliko će tada moći dnevno potrošiti?
  - b) Ako budu trošili 1025 kn na dan, za koliko će dana skratiti boravak?
21. Stroj za tiskanje novčanica otisne 1000 novčanica za 5 sati i 20 minuta. Koliko novčanica otisne za 6 sati i 40 minuta?
22. Na aerodromu svakih 8 minuta slete 4 aviona. Koliko aviona sleti u jednom satu?
23. Ana preuređuje svoju sobu. Želi na jedan zid staviti dekorativnu traku širine 25 cm. U knjizi o uređenju prostorija pročitala je da traka treba dijeliti zid od vrha prema dnu u omjeru 2 : 3. Zid Anine sobe visok je 325 cm, koliko treba odmjeriti od stropa da bi traku stavila na pravo mjesto. Ana planira donji dio zida obojiti u plavo, a gornji u bijelo. Napiši omjer visina plavog i bijelog dijela zida. Zid je širok 420 cm. Koliko Ana treba plave i bijele boje ako je za prekrivanje  $7 \text{ m}^2$  dovoljna 1 litra boje?

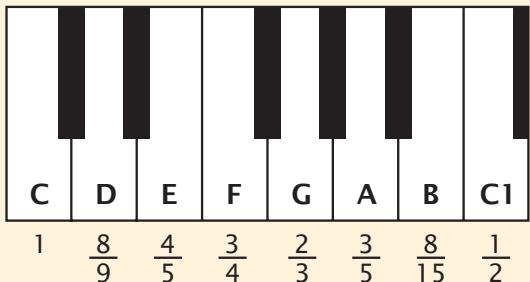


24. Geografska karta veličine  $90 \times 60$  cm prikazuje neko područje u mjerilu  $1 : 500\,000$ .
- Koju udaljenost u kilometrima prikazuje širina te karte?
  - Koju udaljenost u kilometrima prikazuje visina te karte?
  - Kolika je površina prikazana tom kartom?
  - Gradovi Egon i Karls na toj su karti udaljeni  $40$  cm. Kolika je njihova udaljenost u prirodi?
  - Cesta od Tvida do Perle u prirodi je dugačka  $320$  km. Kolika je njezina duljina na karti?
25. Maja priprema palačinke za doručak. U receptu piše da treba pomiješati  $500$  ml mješavine za palačinke,  $600$  ml mlijeka,  $2$  jaja i  $4$  ml biljnog ulja. Od te količine može se napraviti  $16$  palačinki srednje veličine, dovoljno za  $4$  djece.
- napiši taj recept u obliku omjera;
  - napiši potrebne količine za  $128$  palačinki;
  - napiši potrebne količine za  $20$  djece;
  - Maja voli tanje palačinke pa je povećala količinu mlijeka na  $650$  ml i smanjila količinu mješavine za palačinke na  $450$  ml. Napiši omjer za taj novi recept;
  - Upotrijebi li Maja novi recept, koliko joj je mlijeka potrebno da bi pripremila palačinke za  $20$  djece?
26. Broj  $136$  rastavi na tri pribrojnika tako da se oni odnose kao  $4 : 6 : 7$ .
27. Izračunaj nepoznati član proporcije
- $2 : x = 3 : 6$ ;
  - $5 : 8 = x : 12$ ;
  - $8x : 20 = 4 : 10$ ;
  - $2 : 5 = 3 : (3 + x)$ ;
  - $(2x + 1) : 3 = (x - 1) : 5$ .
28. Dva su grada na karti u mjerilu  $1 : 1000000$  udaljena  $15$  cm. Kolika je njihova stvarna udaljenost?
29. Dva su grada u stvarnosti udaljena  $127$  km. Kolika je njihova udaljenost na karti u mjerilu  $1 : 250\,000$ ?
30. Dok se zupčanik *A* okreće  $3$  puta, zupčanik *B* okrenut će se  $7$  puta.
- Ako je zupčanik *A* napravio  $15$  okreta, koliko ih je napravio zupčanik *B*?
- Ako je zupčanik *B* napravio  $91$  okret, koliko ih je napravio zupčanik *A*?
31.  $12$  radnika oboji fasadu radeći  $5$  dana po  $7$  sati. Šef im je poslao još  $2$  radnika jer želi da posao završe za  $3$  dana. Koliko sati na dan moraju raditi?
32. Za popločavanje podova postoje kvadratne pločice sa stranicom  $10$  cm i pravokutne sa stranicama  $8$  cm i  $12$  cm. Koliko manjih pločica treba za popločavanje poda neke kupaonice ako je većih potrebno  $360$  komada?
33. Odredi na geografskoj karti Hrvatske kolika je udaljenost od Ogulina do Krapine. Prema mjerilu te karte izračunaj njihovu udaljenost u prirodi. Ako vozimo brzinom od  $65$  km/h, koliko bi nam vremena trebalo da prijeđemo tu udaljenost?
34.  $6$  volontera može očistiti dno jezera za  $30$  dana. Nakon dva dana pokazalo se da jezero treba biti čisto za  $16$  dana. Koliko još volontera treba?
35. Vlasnik je unajmio  $88$  berača da mu obere voćnjak za  $10$  dana. Ali nakon  $3$  dana  $11$  berača se razboljelo. Koliko će kasniti berba?
36. Troškovi prijevoza za  $3$  vrste robe iznose  $23400$  kn i dijele se u omjeru  $36 : 15 : 14$ . Koliki su troškovi za svaku vrstu robe?
37. Cijev *A* napuni bazen za  $8$  sati, cijev *B* za  $24$  sata i cijev *C* za  $12$  sati ako pune svaka za sebe. Za koliko će vremena zajedno napuniti bazen?
38. Kilogram jabuka prodaje se za  $3$  kn. Nacrtaj tablicu i izračunaj koliko treba platiti  $0, 2, 3, 1$  i  $5$  kg jabuka. Nacrtaj grafički prikaz.
39. U tvornici džepnih računala  $240$  komada džepnih računala treba smjestiti u kutije tako da u svakoj kutiji bude jednak broj računala.
- Koliko treba kutija ako u svaku kutiju stane  $12$  računala?
  - Ako se sva računala smjeste u  $30$  kutija, koliko je komada u svakoj kutiji?
  - Kako se međusobno odnose broj kutija i broj računala koji stane u svaku kutiju?
40. Istraži: Na karti nađi dva europska grada i izmjeri njihovu udaljenost u cm. Pronađi u kojem je mjerilu napravljena ta karta te izračunaj stvarnu udaljenost gradova. Pronađi u atlasu još dvije karte, u različitim mjerilima, na kojima se nalaze ti isti gradovi, izmjeri njihovu udaljenost u cm te izračunaj njihovu stvarnu udaljenost pomoću proporcije. Jesi li dobio (dobila) ista rješenja?

## I g r e

### Pitagorina ljestvica

Pitagora je otkrio da postoje veze između muzičkih nota, koje se mogu prikazati pomoću razlomaka i omjera.



Na žičanom instrumentu žica C može se upotrijebiti da bi se čule i ostale note. Pritisnete li žicu na  $\frac{4}{5}$  udaljenosti od mosta, čut će te notu E. Na polovici žice čut će se visoki C.

Razapnite žicu duljine 40 cm između dva držača pa odredite udaljenosti u cm za ostale note i pokušajte nešto odsvirati.

### Primjerak oglednog testa:

1. Navedi još jedan primjer omjera koji je jednak omjeru  $4 : 7$ .
2. Luka i Matija dobivaju džeparac u omjeru  $5 : 4$ . Ako su ukupno dobili 270 kuna, koliki je Lukin, a koliki Matijin džeparac?
3. Matija je, spremajući se za ljetovanje, nabavio kartu otoka Korčule napravljenu u omjeru  $1 : 40\,000$ .
  - a) Što nam govori taj omjer?
  - b) Ako su dva mesta na karti udaljena  $2.5$  cm, koliko su ona udaljena u prirodi?
  - c) Kolika je udaljenost na karti između grada Korčule i Lumbarde ako je njihova udaljenost u prirodi  $7$  km?
4. Na kutiji gnojiva za zalijevanje cvijeća piše da na  $15$  litara vode treba staviti  $3$  čajne žličice gnojiva.
  - a) Napiši u kojem se omjeru miješaju voda i gnojivo;
  - b) Lukin djed ima prskalicu u koju stane  $5$  l vode. Koliko gnojiva treba staviti na tu količinu vode?
  - c) Majin ujak je uzgajivač cvijeća, on prilikom jednog zalijevanja potroši oko  $120$  litara vode. Koliko gnojiva tada potroši?
5. Štap visok  $14$  cm baca sjenu dugačku  $0.007$  m. Kolika će u isto vrijeme biti sjena drveta visokog  $10$  m?
6. U nekoj mjenjačnici za  $300$  eura možemo dobiti  $2142$  kn. Koliko se kuna u istoj mjenjačnici (istog dana) dobije za  $75$  eura?
7. Za šivanje  $5$  jednakih odijela potrebno je  $17.5$  m tkanine. Koliko se takvih odijela može sašiti od  $42$  m tkanine?
8. Izračunaj  $x$  u ovim proporcijama:
  - a)  $3 : 4 = 36 : x$ ;
  - b)  $(15 - 3x) : (4 - 5x) = 3 : 2$ .
9. Ako  $45$  radnika može završiti neki posao za  $58$  dana, koliko još radnika treba zaposliti da bi posao bio gotov za  $30$  dana?
10. Na jednoj plantaži  $480$  kg jabuka treba smjestiti u sanduke tako da u svakom sanduku bude jednak broj kilograma jabuka.
  - a) Koliko treba sanduka ako u svaki sanduk stane  $15$  kg?
  - b) Ako se sve jabuke smjeste u  $12$  sanduka, koliko je kilograma jabuka u svakom sanduku?
  - c) Kako se međusobno odnose broj sanduka i iznos kilograma jabuka koji stane u svaki sanduk?

# 3. Postotni i kamatni račun

## Važni pojmovi

postotak

osnovna vrijednost

postotni iznos

jednostavni  
kamatni račun

kamate

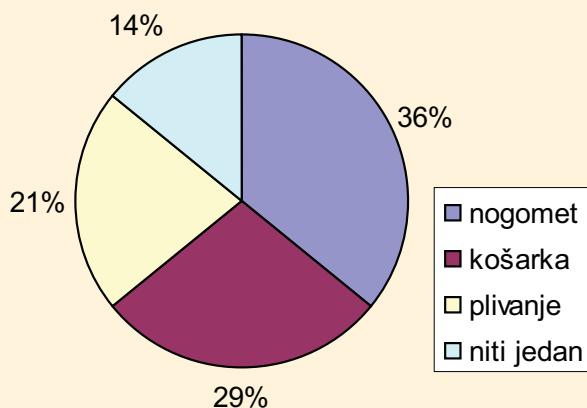
kamatna stopa

glavnica

**Poskupljenja i sniženja** susrećemo na svakom koraku. Stariji obično komentiraju kako su povoljno nešto kupili na sniženju ili kako su režije porasle, a plaće nisu. Mnoge veličine u svakodnevnom životu izražavaju se postocima, primjerice, sniženje 25%, poskupljenje 5%, uspješnost na testu 75%, porez 22%, prirez 0.5% i sl.

Koliki postotak rješenosti moraš imati da bi na testu dobio željenu ocjenu? Znaš li kako se izračunava taj postotak?

Riječ **postotak** potječe od talijanskih riječi “per cento” – po sto, a označava omjer naprema 100 – odatle i dva kružića, tj. nule u znaku postotka %.



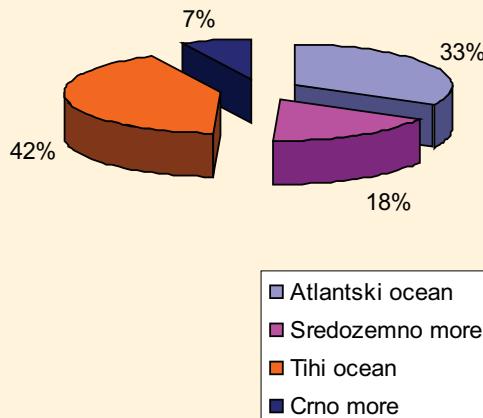
Nakon što naučite postotke, možete pomalo uči i u svijet bankarstva. Štednja, krediti, **kamate**, rate – sve su to važne stvari, naročito kad i sami počnete štedjeti, a jednog dana i otplaćivati kredite. U bankarstvu se kamate i rate kredita računaju složenim kamatnim računom, no mi ćemo zajedno naučiti kako se to radi na jednostavniji način – pomoću **jednostavnog kamatnog računa**.

Ustanove slične bankama postojale su već oko 3000. pr. Kr. u Babilonu i Asiriji. U tim ustanovama pohranjivale su se i žitarice koje su se pozajmljivale uz naknadu koja se određivala u postocima žitarica. U 12. stoljeću u Italiji nastale su banke slične današnjima. Prva novčarska ustanova na području Hrvatske bio je Dubrovački založni zavod, otvoren 1671. godine.



U ovom ćeš poglavlju, primjerice, naučiti:

- Što znači kad netko kaže 100%;
- Koliki će ti biti džeparac ako ga tata poveća za 25%;
- Kako izračunati cijenu majice na sniženju;
- Što su kamate i kako se računaju;
- Kako izračunati ratu kredita.



### Brzinski usmeni zadaci za ponavljanje

1. Kako nazivamo razlomke koji u nazivniku imaju dekadsku jedinicu, primjerice:

$$\frac{5}{10}, \frac{145}{100}, \frac{24}{10000}?$$

2. Zapiši zadane decimalne brojeve u obliku razlomka:

- a) 2.5;
- b) 0.6;
- c) 1.16;
- d) 0.07.

3. Zapiši zadane razlomke u obliku decimalnog broja. Ako je broj beskonačan u decimalnom obliku, zaokruži ga na dvije decimale:

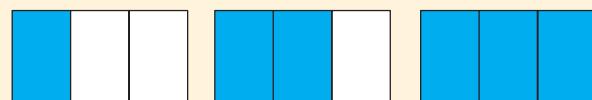
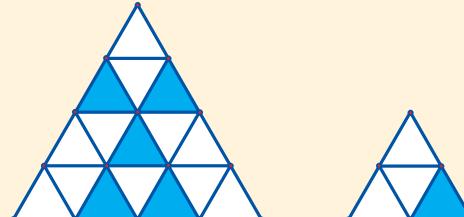
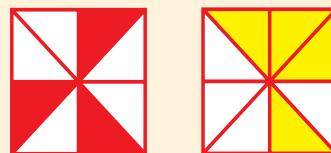
$$\frac{6}{100}, \frac{12}{100}, \frac{453}{100}, \frac{12}{7}, \frac{3}{4}, \frac{1}{3}$$

Podatke u jednostavnom kamatnom računu možete izračunati i na računalu, pomoću proračunske tablice.

glavnica (kn)	200,00 kn	10 000,00 kn	
kamatna stopa		15,60%	2,90%
vrijeme (godine)	4		2,5
kamate (kn)	24,00 kn	23 400,00 kn	154,10 kn

glavnica (kn)	16 500,00 kn	2 442,99 kn	
kamatna stopa		6,50%	3,40%
vrijeme (godine)	21		16
kamate (kn)	6 237,00 kn	1 778,50 kn	4 556,89 kn

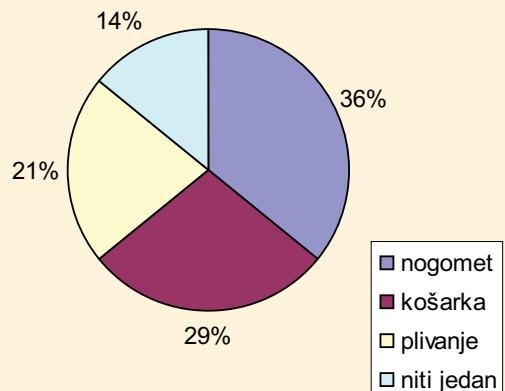
4. Koliki je dio lika obojen?



JA TO ZNAM  
NAPRAVITI U EXCELU



## 3.1. Pojam postotka



### Anketa

Učenici 7. razreda ispunili su anketu o vrsti sporta kojim se bave. Razrednica im je rezultat prikazala u obliku ove slike. Opiši što ta slika prikazuje. Koji je omiljeni sport u tom razredu?

Postotke često susrećemo u časopisima, novinama i na vijestima. Da bismo i mi razumjeli takve vijesti, moramo naučiti što je postotak i kako možemo računati s njima.

### Primjer 1. 100%

Učiteljica je na roditeljskom sastanku rekla: "100% učenika 7.a bilo je na izletu".

- a) Što to znači?
- b) Koliko ima učenika u tom razredu?

### Rješenje:

- a) 100% učenika znači: svi učenici toga razreda. Dakle svi učenici su išli na izlet.
- b) Ne znamo. Podatak da su svi išli na izlet ne govori nam koliko učenika ima u tom razredu.

### Primjer 2. 50%

Luka je pročitao u novinama da 50% stanovnika grada Varaždina gleda Dnevnik.

- a) Što to znači?
- b) Koliko stanovnika ne gleda dnevnik?
- c) Ako znamo da Varaždin ima oko 50 000 stanovnika, koliko njih gleda Dnevnik?

### Rješenje:

- a) 50 je  $\frac{1}{2}$  od 100. Dakle, 50% znači da pola stanovnika Varaždina gleda Dnevnik.
- b) Budući da ih pola gleda Dnevnik, onda ga druga polovica ne gleda. Dakle 50% stanovnika Varaždina ne gleda Dnevnik.
- c) 50% od 50 000 pola je od 50 000, dakle 25 000 stanovnika.

100% je cijelo  
50% je pola  
25% je četvrtina



### Primjer 3. 25%

Maja je na Internetu pronašla podatak da 25% djece jede mlijeko proizvod za doručak.

- a) Što to znači?
- b) Koliko djece ne jede mlijeko proizvod za doručak?
- c) U Majinoj školi ima 1000 djece, ako njih 25% jede mlijeko proizvod za doručak, koliko je to djece?

### Rješenje:

- a) 25 je  $\frac{1}{4}$  od 100. Dakle 25% znači da  $\frac{1}{4}$  djece jede mlijeko proizvod za doručak.
- b)  $100\% - 25\% = 75\%$ . 75% djece ne jede mlijeko proizvod za doručak.
- c) 25% od 1000 je  $\frac{1}{4}$  od 1000 dakle 250 djece Majine škole jede mlijeko proizvod za doručak.

## Zadaci

1. Objasni tvrdnje i odgovori na pitanja.
    - a) 16% stanovništva Hrvatske nema završenu osnovnu školu. Koliki dio stanovništva ima završenu barem osnovnu školu?
    - b) 50% učenika 7.a vozi se biciklom u školu. Koliki se dio učenika 7.a ne vozi biciklom u školu?
    - c) 71% površine Zemlje zauzima more. Koliki dio zauzima kopno?
    - d) Na kopnenoj polutki kopno zauzima 49% površine te polutke, a na vodenoj polutki kopno zauzima 9%. Koliki dio površine zauzima more na kopnenoj polutki, a koliki dio na vodenoj polutki?
- Zbroj treba biti 100%**



### Primjer 4. 10%

Koliko je proizvoda oštećeno ako znamo da je:

- a) 10% od 100 proizvoda oštećeno;
- b) 10% od 1000 proizvoda oštećeno;
- c) 10% od 20 000 proizvoda oštećeno?

MENI SE NAJVJEŠE SVIDA 100%  
OD MILIJUN ILI BAREM 50%  
OD 2 MILIJUNA KUNA.



2. a) Maja i Ana dijele "zaradu" od maškara tako da Ana dobije 65%. Koliki je dio dobila Maja? Koja će dobiti manje?
- b) Tri radnika dijele zaradu tako da prvi dobije 33%, a drugi 29%. Koliki će dio zarade dobiti treći radnik? Koji je radnik zaradio najviše?
- c) Na katu treba biti 5 stanova. Prvi treba zauzimati 22% površine kata, drugi i treći jednakih su površina i svaki bi trebao zauzimati svaki po 36% površine kata, a četvrti bi trebao zauzimati 18%. Koliko bi trebao zauzimati peti stan? Je li to moguće? Jesu li inženjeri dobro podijelili površinu kata?

- c)  $\frac{1}{10}$  od 20 000 je 2000. Od 20 000 proizvoda 2000 ih je oštećeno.

Primjećujemo da 10% oštećenih proizvoda označava koliko je proizvoda na 100 proizvoda oštećeno – točno 10. Ako se tih 10% odnosi na neku drugu količinu proizvoda, onda se broj oštećenih proizvoda proporcionalno mijenja.

### Rješenje:

- a) 10% je  $\frac{1}{10}$  od 100.  
Od 100 proizvoda 10 ih je oštećeno.
- b)  $\frac{1}{10}$  od 1000 je 100.  
Od 1000 proizvoda 100 ih je oštećeno.

### Važno

Postotak označava omjer nekog broja naprema 100. Zapišemo li taj omjer u obliku razlomka, dobit ćemo razlomak s nazivnikom 100.

### Primjer 5. Zapisivanje u obliku omjera i razlomka

Zapiši postotke u obliku omjera i razlomka. Skrati razlomak ako se može.

- a) 100%;                    b) 75%;
- c) 40%;                    d) 1%.

### Rješenje:

- a)  $100\% = 100 : 100 = \frac{100}{100} = 1$ ;
- b)  $75\% = 75 : 100 = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$ ;
- c)  $40\% = 40 : 100 = \frac{40}{100} = \frac{2}{5}$ ;
- d)  $1\% = 1 : 100 = \frac{1}{100}$ .

$$50\% = 0.5 = \frac{1}{2}$$

## Zadaci

3. Zapiši u obliku omjera
  - a) 3%; b) 7%; c) 29%; d) 53%; e) 61%; f) 77%; g) 91%.
4. Zapiši u obliku razlomka, skrati ako je moguće.
  - a) 30%; b) 78%; c) 20%; d) 55%; e) 60%; f) 45%; g) 90%.
5. Postotke često zapisujemo i u obliku decimalnog broja. Prepiši, pa popuni tablicu, prvi je redak riješen.



Postotak podijeli sa 100 i dobit ćeš zapis u obliku decimalnog broja.

Postotak	Omjer	Decimalni broj
78%	78 : 100	0.78
14%		
5%		
24%		
8%		
15%		
50%		
25%		
6%		

### Primjer 6. Postotak uspješnosti

Ana je 25 puta bacala u koš i pogodila 14 puta. Koliki je njezin postotak uspješnosti?

#### Rješenje:

I. način

Omjer Anine uspješnosti je  $14 : 25$ . Zapišimo taj omjer u obliku razlomka, a zatim ga proširimo na nazivnik 100.

$\frac{14}{25} = \frac{56}{100}$ . Taj razlomak lako zapišemo u obliku postotka.

6. Prepiši, pa popuni tablicu

Postotak	Omjer	Decimalni broj
12%		
	27 : 100	
		0.38
	56 : 100	
75%		
		0.6
89%		
	61 : 100	
		0.99
55%		

Da biste broj u obliku postotka zapisali u obliku decimalnog broja:

1. Utipkajte broj
2. Pritisnite **2nd**
3. Pritisnite tipku sa znakom **%**
4. Pritisnite tipku **(**



Na zaslonu će zadani broj u obliku % biti napisan u obliku decimalnog broja.

$$\frac{56}{100} = 56\%$$

Anin postotak uspješnosti je 56%.

II. način

Umjesto zapisa u obliku razlomka možemo upotrijebiti zapis u obliku decimalnog broja.

$$14 : 25 = 0.56 = 56\%$$

Decimalni broj pomnoži sa 100 i dobit ćeš zapis u obliku postotka.



## Zadaci

7. Zapiši u obliku postotka, prvi je redak riješen.

Decimalni broj	Postotak	Decimalni broj	Postotak
0.234	23.4%	0.5	
0.145		0.385	
0.6		0.99	
0.19		0.67	
0.007		0.09	
0.35		0.03	

8. Zapiši u obliku postotka:

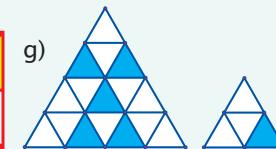
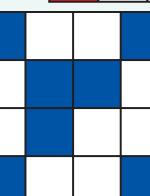
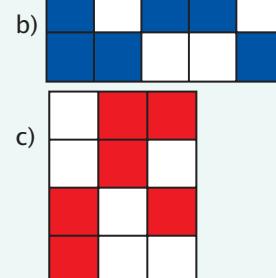
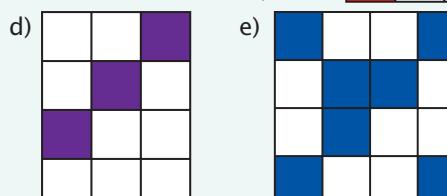
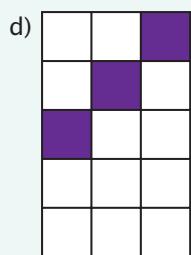
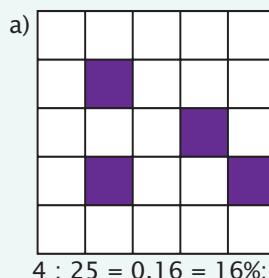
- a) tri četvrtine učenika u 8.c su djevojčice;
- b) četiri petine učenika igra košarku;
- c) Maja je od 50 pokušaja postigla 28 pogodaka;
- d) Luka je riješio 8 od 10 zadataka na testu;

- e) sedam desetina kupaca posjećuje trgovine ujutro;  
 f) od 120 listića tombole 65 ih je dobitnih;  
 g) automobil nakon godinu dana izgubi jednu četvrtinu svoje cijene

9. Zapiši u obliku postotka:

- a) 13 od 100 učenika neke škole ima žutu kapu;  
 b) dva od tri studenta ručaju u restoranu Studentskog centra;  
 c) u 12 od 15 automobila vozi se samo vozač;  
 d) u jesen neke trgovine spuste svoje cijene za tri osmine;  
 e) Majina baka napravila je 27 od 34 vrste kolača za svadbu Majine sestrične;  
 f) 546 od 1000 stanovnika neke države mlađe je od 30 godina;  
 g) 36 od 40 mjesta u autobusu je popunjeno.

10. Izrazi postotkom koji je dio lika obojen. Prvi je zadatak riješen.



### Primjer 7. Postotak veći od 100%

Objasni ove tvrdnje:

- a) Troškovi života porasli su 200%;  
 b) Ovogodišnja berba je 150% od lanske berbe grožđa.

### Rješenje:

- a) Troškovi života porasli su dva puta jer je  $200 : 100 = 2$ ;

b) U ovogodišnjoj berbi obrano je 1.5 puta više grožđa nego lani jer je  $150 : 100 = 1.5$ .

**Ako je postotak veći od 100%, on označava više od jednog cijelog.**

Bez obzira na to je li postotak manji ili veći od 100%, s njime se uvijek jednak računa.



## Zadaci

11. Prepiši, pa zapiši u oblicima koji nedostaju, prvi je redak riješen.

Postotak	Omjer	Razlomak	Decimalni broj
178%	178 : 100	$\frac{178}{100}$	1.78
64%			
		5	
		$\frac{240}{100}$	
86%			
	55 : 100		
10.1%			
		0.025	
		3.25	

12. Prepiši, pa zapiši u oblicima koji nedostaju.

Postotak	Omjer	Razlomak	Decimalni broj
18%			
	3 : 20		
		$\frac{2}{5}$	
			2.98
	125 : 100		
		$\frac{5}{6}$	
			0.78
457%			
	17 : 20		
		$\frac{13}{4}$	

13. Prepiši, pa zapiši u oblicima koji nedostaju

Postotak	Omjer	Razlomak	Decimalni broj
24%			
	2 : 8		
		$1\frac{2}{5}$	
56%			

Postotak	Omjer	Razlomak	Decimalni broj
	147 : 100		
			4.55
		$\frac{3}{7}$	
			2.2

## 3.2. Računanje s postocima

**Koliko je:**

0% od 1000

50% od 1000

100% od 1000

Postocima se izražavaju sniženja cijena u trgovini, porez na maminu plaću, količina masnoće u mlijeku, prolaznost na testu, količina kisika u zraku i još puno, puno veličina koje svaki dan susrećemo. Pri određivanju postotaka i računanju s njima najvažnije je znati na što se odnose jer nije isto imati 25% od 10 000 kn ili 25% od 100 kn.

### Primjer 1. Postotni iznos

U tvornici je proizvedeno 25 000 posuda, od toga ih je 17% plavih. Koliko je plavih posuda proizvedeno tj. koliko je 17% od 25 000?

#### Rješenje:

Pri računanju s postocima upotrebljavamo njihov zapis u obliku decimalnog broja ili razlomka.

U ovom slučaju riječ "od" zamjenjujemo znakom puta (množenje).

I. način

$$17\% \text{ od } 25\ 000 = 0.17 \cdot 25\ 000 = 4250.$$

II. način

$$17\% \text{ od } 25\ 000 = \frac{17}{100} \cdot 25\ 000 = 4250.$$

Proizvedeno je 4250 plavih posuda.

U tom primjeru broj 17% **bio je postotak**, a označavamo ga sa  $p\%$ . Broj 25 000 bio je broj od kojeg smo računali postotak, njega nazivamo **osnovnom vrijednošću** i označavamo sa  $x$ . Broj koji smo dobili izračunavanjem u tom primjeru, tj. 4250, nazivamo **postotnim iznosom** i označavamo sa  $y$ .

Postotni iznos –  $y$   
Postotak –  $p\%$   
Osnovna vrijednost –  $x$

#### Važno

**Postotni iznos** ( $y$ ) računamo tako da postotak ( $p\%$ ) pomnožimo s osnovnom vrijednošću ( $x$ ).

$$y = p\% \cdot x$$

## Zadaci

Postotni iznos  
 $y = p\% \cdot x$

Izračunaj postotni iznos.

- 25% radnika radi u trećoj smjeni. U tvornici su zaposlena 132 radnika. Koliko ih radi u trećoj smjeni?
- Gospođa Milka plaća svoju pomoćnicu s 5% od ukupne prodaje. Koliko ju je platila prošli tjedan ako je prodaja iznosila 6000 kn?
- Upis u srednju obrtničku školu porastao je 20% u odnosu na prošlu godinu. Prošle je godine u tu školi išlo 750 učenika. Za koliko se povećao broj učenika?
- Zapiši postotak u obliku decimalnog broja.
- Porez na dodanu vrijednost je 22%. Koliki je iznos tog poreza na cijenu od 650 kn?
- Procijenjeno je da kamion nakon godinu dana vrijedi 75% svoje početne cijene. Ako je početna cijena 125 000 kn, kolika je cijena nakon



### Primjer 2. Postotak

Od 350 učenika neke škole 210 ih pohađa izbornu nastavu iz informatike. Koliki postotak učenika pohađa izbornu nastavu iz informatike?

### Rješenje:

Postotni iznos:  $y = 210$

Osnovna vrijednost:  $x = 350$

$$p\% = 210 : 350 = 0.6 = 60\%$$

godinu dana?

- U jednom istraživanju 35% sudionika izjasnilo se da voli žitarice Zrno. U istraživanju je ispitano 7520 ljudi. Koliko se njih izjasnilo da voli te žitarice?
- Za vrijeme sniženja Lukina baka kupila je kaput za 60% njegove redovne cijene. Koliko je baka platila kaput ako je redovna cijena 900 kn?
- Gospodin Tkalec kupio je rukavice za 50% njihove redovne cijene od 158.50 kn. Koliko je platio rukavice?
- U naselju je 85% obitelji s djecom. Ako je u naselju 760 obitelji, koliko je njih s djecom?
- Koliko je:
 

a) 15% od 250;	b) 37% od 5432;
c) 125% od 6;	d) 2.5% od 990;
e) 67% od 45.65;	f) 6% od 112;
g) 7.8% od 65;	h) 9.6% od 480;
i) 12.5% od 49.8;	j) 130% od 96;
k) 175.5% od 40.	

60% učenika pohađa izbornu nastavu iz informatike.

### Važno

**Postotak** računamo tako da postotni iznos podijelimo s osnovnom vrijednošću i dobiveni broj zapišemo u obliku postotka.  
 $p\% = y : x$

## Zadaci

Postotak

$$p\% = y : x$$

$$p = \frac{100 \cdot y}{x}$$

Izračunaj postotak.

- Košarkaš je pogodio 30 koševa iz 48 pokušaja. Koliki je postotak njegove uspješnosti pogotka?
- U travnju je prodano 175 kutija dječjih autića, a u svibnju 126 kutija tih autića. Koliki je postotak travanjke prodaje svibanjska prodaja?
- Redovna je cijena bicikla 750 kn, a snižena je za 150 kn. Koliki je postotak sniženja?

- Na testu iz pravopisa Matija je ispravno napisao 17 od ukupno 20 riječi. Koliki je njegov postotak točnosti?

- Milerovi su krenuli na put dug 840 km. Dosad su prešli 168 km. Koliki su postotak puta prešli?
  - Matija je napisao 12 od 15 zadatka zadanih za domaću zadaću. Koliki je postotak riješenosti zadaće?

- b) Od tih 12 zadataka točno je riješio 9. Koliki je to postotak od riješenih zadataka?  
 c) Koliko je posto riješio točno od cijele zadaće?  
 d) Što misliš, koju bi ocjenu Matija mogao dobiti za tu zadaću?
17. Od 546 učenika u nekoj školi u školskoj kuhinji ruča 45 učenika. Koliko je to posto?
18. Na rukometnom treningu Luka je 30 puta izveo slobodno bacanje i postigao 21 pogodak. Koliki je njegov postotak uspješnosti?
19. Poštari je danas primio 320 pisama, a od toga 150 telefonskih računa. Koliki je postotak telefonskih računa među svim pismima?
20. U Crikvenici je u travnju bilo 12 000 turista, od toga 2 100 domaćih. Koliki je postotak domaćih turista?
21. Prepiši, pa izračunaj postotak  
 a) 32 je \_\_\_\_% od 64;  
 b) 88 je \_\_\_\_% od 80;  
 c) 78 je \_\_\_\_% od 104;  
 d) 0.72 je \_\_\_\_% od 0.48;  
 e) 19 je \_\_\_\_% od 76;  
 f) 0.8 je \_\_\_\_% od 3.2;  
 g) 67 je \_\_\_\_% od 67;  
 h) 320 je \_\_\_\_% od 64;  
 i) 30 je \_\_\_\_% od 24;  
 j) 15 je \_\_\_\_% od 7.5;  
 k) 4 je \_\_\_\_% od 2.5.

### Primjer 3. Osnovna vrijednost

Lucija može baciti loptu 240 cm. To je 80% udaljenosti na koju loptu može baciti Luka. Na koju udaljenost Luka može baciti loptu?

#### Rješenje:

Postotni iznos:  $y = 240 \text{ cm}$ ;

Postotak:  $p\% = 80\% = 0.80$ ;

$$x = 240 : 0.80 = 300 \text{ cm.}$$

Luka može baciti loptu na udaljenost od 300 cm.

#### Važno

**Osnovnu vrijednost** računamo tako da postotni iznos podijelimo s postotkom.

$$x = y : p\%$$

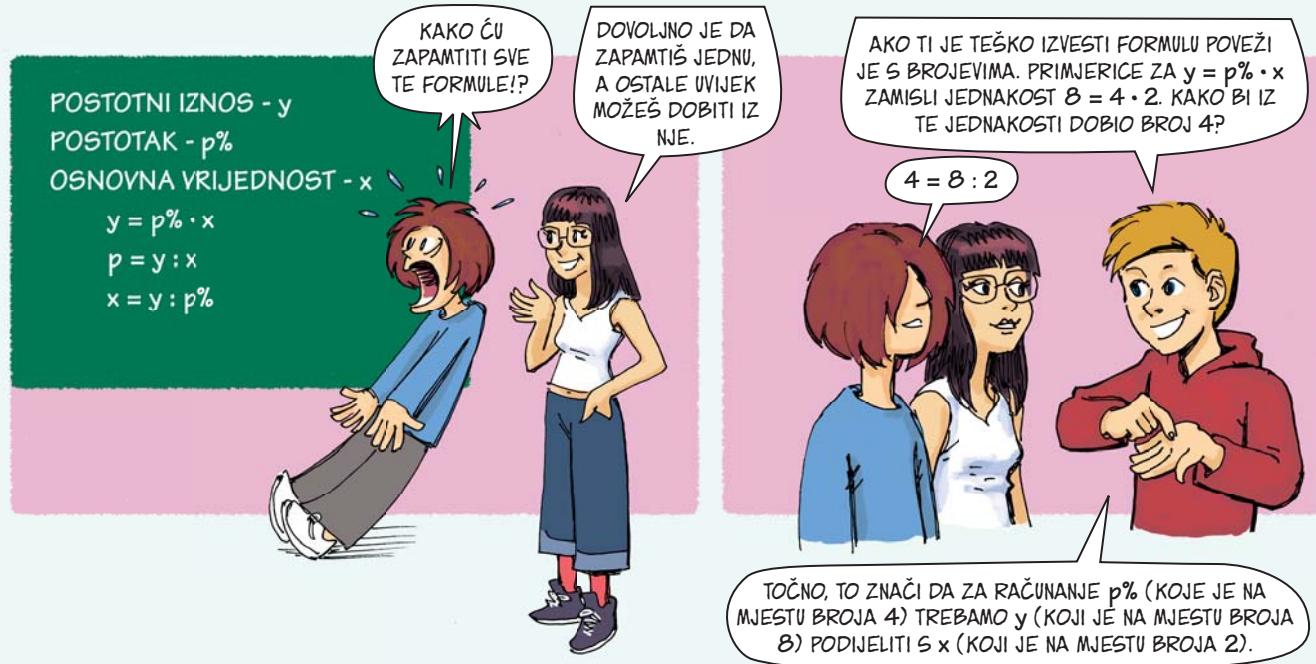
Osnovna vrijednost  
 $x = y : p\%$

Izračunaj osnovnu vrijednost.

22. Teta Nela ima u vrtu drvo visoko 4.2 m. Ona prepostavlja da je to 75% visine do koje to drvo može narasti. Do koje visine može narasti to drvo?
23. U školskoj nogometnoj ekipi je 35 dječaka. To je 5% od ukupnog broja učenika te škole. Koliko učenika ima ta škola?
24. Maja je pročitala 120 stranica knjige, što je 40% cijele knjige. Koliko stranica ima cijela knjiga?
25. Radeći sa 75% kapaciteta, tvornica može proizvesti 360 kutija čavlića svaki dan. Koliko kutija čavlića može proizvesti dnevno ako radi punim kapacitetom?
26. Luka je dobio 212 učeničkih glasova na izboru za predstavnika škole. To je 53% svih glasova. Koliko je učenika glasovalo?

### Zadaci

27. Matija je osvojio 660 bodova, što je 75% bodova potrebnih za nagradu. Koliko je bodova potrebno za nagradu?
28. Luka je napravio 40 božićnih ukrasa, što je 125% od broja ukrasa koje je napravio Matija. Koliko je ukrasa napravio Matija?
29. Ana je uštedjela 325.40 kn što je 80% novca potrebnog za izlet. Koliko je novca Ani potrebno za izlet?
30. Lucijin razred prikupio je 2.7 t staroga papira. Time su napunili 75% prostora kontejnera. Koliko staroga papira stane u taj kontejner?
31. Majina baka ispekla je 165 komada kolača, što je 55% kolača koje želi ispeći do Majina rođendana. Koliko kolača baka želi ispeći?
32. Prepiši, pa izračunaj osnovnu vrijednost  
 a) 37 je 20% od \_\_\_\_;  
 b) 3.4 je 25% od \_\_\_\_;  
 c) 60 je 60% od \_\_\_\_;  
 d) 50 je 40% od \_\_\_\_;



- e) 60 je 150% od \_\_\_\_;  
f) 7.8 je 6% od \_\_\_\_;  
g) 72 je 80% od \_\_\_\_;  
h) 1.3 je 65% od \_\_\_\_;  
i) 2.16 je 3.6% od \_\_\_\_;  
j) 9 je 100% od \_\_\_\_;  
k) 84 je 120% od \_\_\_\_.
33. Prepiši, pa izračunaj podatak koji nedostaje:

postotak	osnovna vrijednost	postotni iznos
12%	2.56	
	34.5	6.9
24%		356.4
	33	9.9
18%		4.5

34. Danas je u ribarnicu došlo 60 kg ribe. Od toga je 20% pastrve. Koliko je kg pastrve došlo u ribarnicu?
35. 5 putnika u vlaku nema kartu. To je 2.5% od ukupnog broja putnika. Koliko je putnika u vlaku?
36. 13 od 17 obitelji u nekoj zgradici ima kućnog ljubimca. Koliko je to posto?
37. U prošloj školskoj godini od predviđenih 105 sati matematike održano je 98 sati. Koliki je postotak održanih sati?
38. Na rukometnoj utakmici igrač je imao postotak šuta 60% i postigao je 12 golova. Koliko je puta gađao gol?

39. Od 35 učenika u razredu 14 ih nije napisalo domaću zadaću. Koliko posto učenika nema zadaću? Koliko posto ih je napisalo zadaću?
40. Od ukupne vrijednosti robe u skladištu, koja iznosi 280 000 kuna, prodano je 24.6%. Kolika je vrijednost prodane robe?
41. Dužnik je vjerovniku platio 24% svoga duga iznosom od 3 600 kuna. Koliko je iznosio ukupan dug?
42. U jednom razredu pismeni je ispit pisalo 30 učenika, a 9 ih je napisalo za vrlo dobru ocjenu. Izračunaj postotak vrlo dobrih ocjena.
43. U jednom je razredu 75% učenika na testu dobilo prolaznu ocjenu, dok je 8 učenika test napisalo za nedovoljan. Koliko je učenika pisalo taj test?
44. Na rukometnoj utakmici igrač je postigao 7 golova, a gol je gađao 16 puta. Koliki mu je postotak pogotka?
45. Obitelj je kupila stan za 420 000 kuna i treba platiti 5% poreza na nekretnine. Koliki porez treba platiti?
46. Od 36 učenika u jednom razredu prolaznu ocjenu na testu dobilo je  
a) 25 učenika. Koliki je to postotak cijelog razreda?  
b) 25% učenika. Koliko je to učenika?  
U kojem bi od ova dva slučaja test bio uspješnije riješen?

### 3.3. Postoci u svakodnevnom životu



Koliko treba platiti te cipele na sniženju?

#### Primjer 1. Poskupljenje

Matija je pročitao u novinama da će novi računi za struju biti 15% veći. Koliki će biti novi račun za struju ako je stari bio 257 kn?

#### Rješenje:

Početnu (staru) cijenu označimo sa  $x$  jer je to ujedno osnovna vrijednost od koje računamo postotak.

$$x = 257 \text{ kn}$$

$$p\% = 15\% = 0.15$$

Najprije izračunajmo postotni iznos – to je iznos za koji će se cijena promijeniti.

$$y = p\% \cdot x = 0.15 \cdot 257 = 38.55 \text{ kn}$$

Budući da se radi o poskupljenju, početnu cijenu treba **uvećati** za postotni iznos da bismo dobili novu cijenu.

**poskupljenje**  
 $n = x + y$

Novu cijenu označimo sa  $n$ :

$$n = x + y = 257 + 38.55 = 295.55 \text{ kn.}$$

Dakle novi račun za struju iznosit će 295.55 kn.

#### Primjer 2. Sniženje

Stara cijena hlača izloženih u izlogu iznosi 180 kn, a pokraj nje piše da je snižena 20%. Kolika je snižena cijena tih hlača?

#### Rješenje:

Početnu (staru) cijenu označimo sa  $x$  jer je to ujedno osnovna vrijednost od koje računamo postotak.

$$x = 180 \text{ kn}$$

$$p\% = 20\% = 0.20$$

Najprije izračunajmo postotni iznos – to je iznos za koji će se cijena promijeniti.

$$y = p\% \cdot x = 0.20 \cdot 180 = 36 \text{ kn}$$

Budući da se radi o sniženju, početnu cijenu treba **smanjiti** za postotni iznos da bismo dobili novu cijenu.

**sniženje**  
 $n = x - y$

Novu cijenu označimo sa  $n$ :

$$n = x - y = 180 - 36 = 144 \text{ kn.}$$

Dakle, cijena hlača na sniženju iznosi 144 kn.

### Primjer 3. Početna cijena

- a) Nakon sniženja za 25% cijena cipela je 180 kn. Kolika je bila cijena prije sniženja?  
 b) Nakon poskupljenja za 20% cijena kvadratnog metra stana je 18 000 kn. Kolika je bila cijena prije poskupljenja?

#### Rješenje:

- a) Nova cijena dobivena je sniženjem, dakle manja je od početne cijene.

Početna cijena = 100% od početne cijene

Nova cijena =  $(100\% - 25\%)$  od početne cijene = 75% od početne cijene.

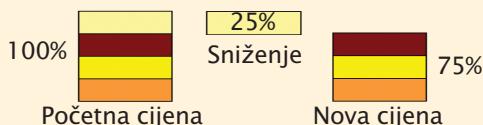
Dakle nova je cijena 75% od početne cijene.

$$p\% = 75\% = 0.75$$

$$y = 180 \text{ kn}$$

$$x = y : p\% = 180 : 0.75 = 240 \text{ kn}$$

Cijena prije sniženja bila je 240 kn.



- b) Nova cijena dobivena je poskupljenjem, dakle veća je od početne cijene.

Početna cijena = 100% od početne cijene

Nova cijena =  $(100\% + 20\%)$  od početne cijene = 120% od početne cijene

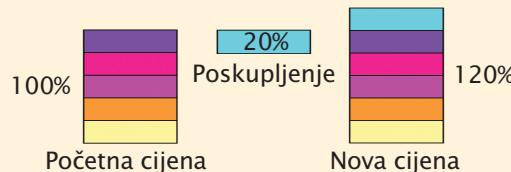
Dakle, nova je cijena 120% od početne cijene.

$$p\% = 120\% = 1.20$$

$$y = 18 000 \text{ kn}$$

$$x = y : p\% = 18 000 : 1.20 = 15 000 \text{ kn}$$

Cijena prije poskupljenja bila je 15 000 kn.



#### II. način

Ovakve zadatke možemo rješavati i pomoću jednadžbi.

$$\text{a)} x - 0.25x = 180; \quad 0.75x = 180$$

$$x = 180 : 0.75 = 240$$

$$\text{b)} x + 0.2x = 18 000; \quad 1.2x = 18 000$$

$$x = 18 000 : 1.2 = 15 000.$$

### Primjer 4. Promjena cijene

Televizor je u rujnu imao cijenu od 1500 kn. U listopadu mu je cijena povećana 15%, a u prosincu je snižena 12%. Kolika je cijena televizora nakon tih promjena? Za koji se postotak promijenila cijena u prosincu u odnosu na cijenu u rujnu?

#### Rješenje:

Najprije računamo postotni iznos za poskupljenje u listopadu

$$x_1 = 1500 \text{ kn}$$

$$p_1\% = 15\% = 0.15$$

$$y_1 = p_1\% \cdot x_1 = 0.15 \cdot 1500 = 225 \text{ kn.}$$

Obzirom da se radi o poskupljenju, nova cijena je:  $n_1 = x_1 + y_1 = 1500 + 225 = 1725$  kn. Cijena u listopadu bila je 1725 kn.

Ta cijena je osnovna vrijednost za računanje cijene u prosincu.

$$x_2 = 1725 \text{ kn}$$

$$p_2\% = 12\% = 0.12$$

$$y_2 = p_2\% \cdot x_2 = 0.12 \cdot 1725 = 207 \text{ kn.}$$

Budući da se radi o sniženju, nova je cijena:

$$n_2 = x_2 - y_2 = 1725 - 207 = 1518 \text{ kn. Cijena u prosincu bila je 1518 kn.}$$

Početna cijena televizora bila je 1500 kn, a krajnja je cijena 1518 kn. Cijena se promijenila, za  $1518 - 1500 = 18$  kn. Da bismo izračunali za koji se postotak cijena promijenila moramo taj iznos podijeliti s početnom cijenom.

$$p\% = 18 : 1500 = 0.012 = 1.2\%$$

**Važno!** Ukupna promjena cijene je 1.2%, a ne  $15\% - 12\% = 3\%$ . Postoci u ovom zadatku ne odnose se na iste iznose: 15% je od 1500 kn, a 12% od 1725, kn pa bismo oduzimanjem postotaka dobili pogrešan rezultat.

### Primjer 5. Postotak promjene

Cijena nekog proizvoda snižena je 12%, a nakon nekog vremena povišena je 10%. Za koliki se postotak promijenila cijena na kraju? Je li krajnja cijena veća ili manja od početne?

#### Rješenje:

Budući da nemamo zadan podatak o cijeni, poslužit ćemo se jednadžbama da bismo odredili koliko se cijena promijenila.

Početna cijena  $x_1$ ,

Sniženje  $p_1\% = 12\% = 0.12$

Postotni iznos  $y_1 = p_1\% \cdot x_1 = 0.12 x_1$ ,

Cijena nakon sniženja

$$x_2 = x_1 - y_1 = x_1 - 0.12 x_1 = 0.88 x_1$$

Cijena nakon sniženja osnovna je vrijednost za daljnje računanje.

$$x_2 = 0.88 x_1$$

Poskupljenje  $p_2\% = 10\% = 0.1$

$$\begin{aligned} \text{Postotni iznos } y_2 &= p_2\% \cdot x_2 = 0.1 \cdot x_2 \\ &= 0.1 \cdot 0.88 x_1 = 0.088 x_1 \end{aligned}$$

Krajnja cijena

$$x_3 = x_2 + y_2 = 0.88 x_1 + 0.088 x_1 = 0.968 x_1$$

Dakle krajnja je cijena  $0.968 x_1$ , tj. 96.8% od početne cijene. Krajnja je cijena manja od početne cijene. Cijena se ukupno promijenila (smanjila) 3.2%.

### Primjer 6. Plaća

Majin tata ima ukupnu plaću 6 000 kn (tzv. bruto plaća). Od tog iznosa mora platiti porez 25% i prirez 12%. Postotak priresa računa se na iznos poreza na plaću. Izračunaj kolika je plaća Majina tate nakon što se oduzmu iznosi za porez i prirez (tzv. neto plaća).

#### Rješenje:

Izračunajmo najprije iznos poreza:

$$x_1 = 6\ 000 \text{ kn}$$

$$\text{porez } p\% = 25\% = 0.25$$

$$\text{iznos poreza } y_1 = 0.25 \cdot 6\ 000 = 1\ 500 \text{ kn.}$$

Zatim računamo iznos priresa:

$$x_2 = 1\ 500 \text{ kn}$$

$$\text{prirez } p\% = 12\% = 0.12$$

$$\text{iznos priresa } y_2 = 0.12 \cdot 1\ 500 = 180 \text{ kn.}$$

Da bismo izračunali neto plaću – od iznosa bruto plaće oduzmemos iznose poreza i priresa.

$$\text{neto plaća} = 6\ 000 - 1\ 500 - 180 = 4\ 320 \text{ kn.}$$

Prava plaća izračunava se malo složenije.

Zamoli roditelje da ti pokažu svoj listić od plaće da vidiš kako izgleda obračun plaće.

## Zadaci

1. Tehnička olovka stajala je 15 kn, a onda je pojeftinila 10%. Koliko stoji sada?
2. Bicikl nakon pojeftinjenja od 15% stoji 1054 kn. Koliko je stajao prije?
3. TV pretplata koja je iznosila 60 kn, poskupila je 5%. Kolika je sada TV pretplata?
4. Nakon poskupljenja od 11% benzin stoji 8.88 kn po litri. Koliko je stajao prije?
5. Koliko je posto pojeftinila polovina koja je ljetos stajala 245 kn, a sada stoji 145 kn?
6. Hlače su se u pranju skupile 2%. Sada su u struku široke 49 cm. Koliko su bile široke prije pranja?
7. Cijena neke robe u trgovini iznosi 41.60 kn. Na ljetnom popustu cijena je snižena na 28.60 kuna. Koji je postotak sniženja?



8. Cijena neke robe povećala se za 15 kuna i sada iznosi 140 kuna. Kolika je bila cijena prije povećanja i za koji se postotak povećala?
9. Cijena robe bez poreza (PDV 22%) iznosi 135 kuna. Koliki je iznos poreza i cijene s porezom?
10. Trgovački putnik radi za proviziju od 16%. Koliki je promet napravio u travnju ako je u tom mjesecu zaradio 2 240 kuna?
11. U trgovini namještajem Ana je uz popust na gotovinu od 15% kupila dvosjed za 2 380 kuna. Koliko bi platila taj dvosjed bez popusta?
12. Matija je kupio bicikl za 1 255.50 kuna. Platio ga je gotovinom i dobio popust 7%. Luka bi kupio isti takav bicikl, ali na čekove na tri rate. U trgovini ne daju nikakav popust pri kupnji na čekove. Koliko će Luka platiti bicikl? Kolike će mu biti rate?
13. Salon "Petra" prima kartice, a za gotovinsko plaćanje daje popust 10%.
  - a) Ako je Anina mama minival platila karticom 220 kuna, koliko bi ga platila gotovinom?
  - b) Ako je Matijina sestrična pramenove na foliju gotovinom platila 252 kune, koliko bi ih platila karticom?
14. Trgovina prima kartice i daje popust 10% za plaćanje gotovinom.
  - a) Ako je Majina baka majicu gotovinom platila 126 kuna, koliko bi je platila karticom?
  - b) Ako je Lukina prijateljica karticom platila hlače 300 kuna, koliko bi ih platila gotovinom?
15. Maloprodajna cijena robe izračunava se tako da se na nabavnu cijenu prvo zaračuna zarada trgovine (marža) 18%, a na tako dobivenu cijenu još porez 22%. Izračunaj maloprodajnu cijenu ako je nabavna:
  - a) 19.99 kn;    b) 40 kn;    c) 98.90 kn;
  - d) 239.99 kn;    e) 580 kn;    f) 987.99 kn.
16. Na nabavnu cijenu od 279 kuna trgovina je zaračunala 12,5% zarade (marže) i porez na dodanu vrijednost 22%. Kolika je prodajna cijena te robe?
17. Na nabavnu cijenu od 349 kuna trgovina je zaračunala 16,5% marže i porez na dodanu vrijednost 22%. Kolika je prodajna cijena te robe?
18. Kolika treba biti nabavna cijena da bi marža od 15% iznosila: a) 5 kn; b) 20 kn; c) 300 kn?
19. Nabavna cijena robe je 299 kuna, a trgovac želi prodajom zaraditi 40 kuna. Koliki je to postotak marže?
20. Kolika bi trebala biti nabavna cijena robe da uz maržu od 15% trgovac zaradi 120 kuna?
21. Među pušačima u SAD-u godišnja stopa smrtnosti od raka pluća iznosi 180 na 100 000 pušača. Koliki postotak pušača umire u SAD-u od raka pluća? Ako u SAD-u ima 50 000 000 pušača, koliko ih umre od raka pluća svake godine?
22. Jedna je novinarka u članku o poskupljenju goriva napisala i ovu rečenicu: "Motorni benzin super 98 tri je puta poskupio, 1. siječnja 2,2 %, 16. siječnja 3% te 1. veljače 1%, ukupno je poskupio 6,2%. Je li to ispravno? Što ti misliš, koliko je posto benzin ukupno poskupio?"
23. Radnikova plaća povećana je 5% pa zatim još 10%. Ako je plaća prije povećanja bila 2 900 kuna, kolika je nakon tih povećanja?
24. Radnikova plaća povećana je 10% pa zatim još 5%. Ako je plaća prije povećanja bila 2 700 kuna, kolika je nakon tih povećanja?
25. Auto stoji 12 000 eura. Najprije je pojeftinio 12%, a zatim još 10%. Kolika mu je cijena nakon obaju pojeftinjenja?
26. Cijena benzina je 7.56 kn. U utorak je cijena povećana za 3%, a u petak je na vijestima objavljeno da je nova cijena benzina manja 3%. Kolika je najnovija cijena benzina?
27. Cijena minivila u nekom salonu povećana je 15% i sada iznosi 230 kuna. Kolika je bila cijena prije povećanja? Vlasnica je vidjela da je to previše pa je vratila staru cijenu. Koliko je posto morala sniziti cijenu da to postigne?

28. U jednoj trgovini cijena jednog artikla prvo je povišena 15%, a zatim snižena 25%. Za koliko se postotaka promjenila konačna cijena u odnosu na početnu? Ako je konačna cijena te robe 1 035 kuna, kolika je bila cijena prije tih promjena?
29. Cijena neke robe povećana je 20%. Za koliko ju postotaka treba sniziti da bi se vratila na početnu cijenu?
30. Cijena neke robe povišena je 4%, a zatim snižena 5% i sada iznosi 2964 kune. Kolika je bila cijena prije tih promjena?
31. U jednoj trgovini cijena jednog artikla prvo je povišena 10%, a zatim snižena 20%. Za koliko se postotaka promjenila konačna cijena u odnosu na početnu? Ako je konačna cijena te robe 1320 kuna, kolika je bila cijena prije tih promjena?
32. U jednom poduzeću u veljači su isplaćene plaće 8% manje od onih u siječnju, a u ožujku su isplaćene plaće 15% veće od plaća u veljači. Za koliko su se postotaka promijenile plaće u ožujku u odnosu na siječanj? Ako je u ožujku isplaćena plaća od 4 761 kunu, kolika je plaća isplaćena siječnju?
33. Ako svježe šljive sadrže 95% vode, a sušene 20%, koliko se suhih šljiva dobije od 500 kg svježih?
34. Ako svježe smokve sadrže 92% vode, a sušene 20%, koliko se suhih smokava dobije od 2 tone svježih?
35. Ako svježa jabuka sadrži 99% vode, a sušena 10%, koliko se čipsa od suhih jabuka dobije od 900 kg svježih jabuka?
36. Ako vreća od 100 kg svježe paprike, koja sadrži 94% vode, ostane neko vrijeme u podrumu, paprika će se osušiti i sadržavat će 93% vode. Kolika je težina vreće paprike nakon toga?
37. 25% osoba koje je prodavačica nazvala kupilo je komplet pribora. Ako je prodavačica prodala 6 kompleta pribora, koliko je osoba nazvala?
38. Spremnik za benzin može se napuniti s 250 l benzina. Koliko ima benzina u spremniku ako je 80% pun?
39. Radnici trebaju ukloniti  $600 \text{ m}^3$  zemlje. Dosad je napravljeno 70% toga posla. Koliko je zemlje uklonjeno?
40. 95% vraćenih knjiga u knjižnici vraćeno je na vrijeme, a to je 285 knjiga. Koliki je ukupan broj vraćenih knjiga?
41. Ove je godine u školu upisano 110% od broja učenika upisanih prošle godine. Koliko je učenika upisano prošle godine ako je ove godine upisano njih 429?
42. Majin tata kupio je mješavinu sjemena trave. Na kutiji piše da je 75% sjemena engleski ljlj. Koliko ima engleskog ljlja ako je pakovanje sjemena od 2.5 kg?
43. U razredu je 28 učenika, a njih 21 glasovalo je za Maju. Koliki je postotak učenika glasovao za Maju?
44. Na pakovanju mlijeka piše da sadrži 3.5% mlječne masti. Koliko ima mlječne masti u 45 l mlijeka?
45. Od 25 zadataka na testu Matija ih je točno riješio 17. Koliki je njegov postotak točnosti?
46. U školi ima 850 učenika, od toga ih je 36% u 8. razredu. Koliko učenika ima u 8. razredu?
47. Trgovina je prodala 185 bicikala prošli mjesec. Od toga je 60% dječjih bicikala. Koliko je dječjih bicikala prodano?
48. Luka je odgovorio na sva pitanja na testu i postigao 90% rješenosti. Ako je u testu bilo 40 zadataka, koliko ih je Luka točno riješio? Nije bilo djelomično točnih zadataka.
49. U autobusu je 45 sjedala. Koliko je sjedala popunjeno ako je autobus popunjen 60%?
50. Poštar je dostavio poštu u 171 od 180 kuća u Dravskoj ulici. U koliki je postotak kuća dostavljena pošta?

51. Auto stoji 19776.20 eura zajedno s porezom 22%. Izračunaj cijenu bez poreza.
52. Cipele na sniženju stoje 145 kn. Izračunaj postotak sniženja ako su prije njega stajale 180 kn.
53. Matija želi kupiti MP3 player. Ako ga kupi za gotovinu, cijena je 297 kn. Ako ga kupi na 6 rata, svaki će mjesec morati platiti 55 kn. Za koliko je posto skuplje kupovati na rate?
54. Koji je od ovih proizvoda iz supermarketa najviše snižen, u postocima:  
 Ulje – umjesto 10.90 kn sada samo 9.90 kn  
 Jogurt – umjesto 1.90 kn sada samo 1.49 kn  
 Krafna – umjesto 3.90 kn sada samo 2.90 kn
55. U jednom sportskom društvu, u kojem je 300 članova, 68% su muškarci. Od njih 25% igra nogomet. Izračunaj koliko muških članova igra nogomet.
56. Maja je visoka 1.59 m. U posljednjih godinu dana ona je narasla 13.25%. U godini prije toga narasla je 8%. Izračunaj koliko je bila visoka:  
 a) prije godinu dana;  
 b) prije dvije godine.
57. Mama i tata dobivaju svaki mjesec istu plaću koja iznosi 5230 kn. Sada su potpisali različite ugovore za sljedeće 3 godine. Tata će dobiti godišnje povećanje plaće 2%. Mama će prve godine dobiti povećanje 6%, ali sljedeće dvije godine plaća joj neće rasti.  
 a) procijeni tko će za 3 godine imati veću plaću;  
 b) izračunaj tko će za 3 godine imati veću plaću;  
 c) izračunaj koliko će zajedno zaradivati mama i tata za 3 godine.
58. Nakon sniženja od 15% a zatim poskupljenja od 28% kućno kino stoji 7240 kn. Izračunaj njegovu prvobitnu cijenu.
59. Školska ekskurzija stoji 1240 kn po učeniku. Od toga 22% otpada na autobus, 65% na smještaj, 9% na ulaznice, a ostatak na završnu večeru. Izračunaj svaki pojedini iznos.

60. Što se više penjemo, zrak postaje sve rjeđi. Na svakih 300 m zrak je za 1.2% rjeđi. Koja je gustoća zraka:  
 a) na Mont Everestu;  
 b) na najvišem vrhu Europe;  
 c) na najvišem vrhu Hrvatske;  
 d) u tvom mjestu?  
 Gustoća zraka na 0 m nadmorske visine iznosi  $1.2 \text{ g/dm}^3$ .

61. Maja je dobila 35 kn koje želi potrošiti na slatkiše i grickalice. Cijene slatkiša su: čokolada 7.56 kn, čips 4.39 kn, žvakače 0.96 kn, štapići 2.88 kn. Na svaku cijenu potrebno je dodati 22% PDV-a. Koja je kombinacija slatkiša i grickalica cijenom najbliža 35 kn? Ukupna cijena ne smije prijeći 35 kn. Upotrijebi tablicu da bi izračunao cijenu različitih kombinacija. Zadatak može imati više rješenja. Prepiši tablicu, pa izračunaj

slatkiš ili grickalice	cijena	PDV	ukupna cijena

62. Luka i njegov tata namjeravaju obojiti neke dijelove stana. Luka je izračunao da u stanu ima  $600 \text{ m}^2$  zidova za bojenje.  
 a) Lukina soba ima  $60 \text{ m}^2$  zidova. Koliki je to postotak od cijelog stana?  
 b) Kupaonica ima  $40 \text{ m}^2$  površine za bojenje. Nakon što je obojio  $15 \text{ m}^2$ , Lukin tata je shvatio da je upotrijebio krivu boju. Koji postotak kupaonice mora ponovno obojiti?  
 c) Luka i njegov tata odlučili su završiti poao kad oboje  $40\%$  površine kupaonice. Mogu li završiti nakon što su obojili  $20 \text{ m}^2$ ?  
 d) Nakon što su obojili  $550 \text{ m}^2$ , potrošili su svu boju. Koliki je postotak preostalog posla?

## 3.4. Jednostavni kamatni račun



### Kamate

Znaš li što su kamate? Ispričaj nešto o štednji, kamatama ili kreditu.

Već u doba Babilonaca žitarice su se pozajmljivale uz naknadu koja se određivala postocima žitarica. U današnje vrijeme novac pozajmljujemo od banaka ili u njima štedimo novac. Štedjeti novac u banci znači dati ga banci na raspolaganje određeno vrijeme. Za uložen novac banka štedišama isplaćuje naknadu određenu postotkom od uloženog iznosa. Tu naknadu nazivamo **kamatom**. Kamata je također i iznos koji mi plaćamo banci ako smo od nje pozajmili novac, tj. digli kredit.

Novac koji ulažemo na štednju ili pozajmljujemo od banke naziva se **glavnicom**. Postotak koji određuje kamatu naziva se **kamatnom stopom**. **Vrijeme** štednje, tj. uzimanja kredita također određuje iznos kamata.

### Važno

Glavnici označavamo sa ***g***, kamatnu stopu sa ***s***, vrijeme sa ***v***, a kamate sa ***k***. Glavnica i kamate izražene su u kunama, kamatna stopa je u obliku postotka, a vrijeme je izraženo u godinama.

Kamate su proporcionalne kamatnoj stopi, glavnici i vremenu. Kamate računamo po formuli  $k = s \cdot g \cdot v$ . Takav način računanja kamata nazivamo "Jednostavnim kamatnim računom".

### Primjer 1. Kamate

Luka je na štednu knjižicu stavio 1500 kn. U banci su mu rekli da je godišnja kamatna stopa 3%. Pomozi Luki izračunati kolike će kamate dobiti na kraju 2. godine štednje te koliki će iznos novca imati na štednoj knjižici.

### Rješenje:

Glavnica:  $g = 1\ 500$  kn

Kamatna stopa:  $s = 3\% = 0.03$

vrijeme:  $v = 2$  godine

$$k = s \cdot g \cdot v = 0.03 \cdot 1\ 500 \cdot 2 = 90 \text{ kn}.$$

Luka će nakon 2 godine dobiti 90 kn kamata.

Iznos na štednoj knjižici izračunat ćemo tako da glavnici dodamo izračunate kamate:

$$g + k = 1\ 500 + 90 = 1\ 590 \text{ kn}.$$

Nakon 2 godine Luka će na štednoj knjižici imati 1590 kn.

ušteđeni iznos =  $g + k$



## Zadaci

$$\begin{aligned} \text{glavnica } g \\ \text{kamatna stopa } s \\ \text{vrijeme } v \\ \text{kamate } k \\ k = s \cdot g \cdot v \end{aligned}$$

1. U banku je uložena glavnica  $g = 4500$  kn uz kamatnu stopu  $s = 2\%$ . Koliko će se ukupno kuna dobiti ako se novac podiže nakon 12 godina?
2. Kolike su kamate na glavnicu od 4200 kn, uz kamatnu stopu 3%, nakon 3 godine?
3. Ana je uložila 1200 kn na 1.5 godinu uz kamatnu stopu 2.3%. Koliku će ukupnu svotu dobiti nakon toga vremena?
4. Prepiši pa izračunaj kamate

glavnica (kn)	kamatna stopa	vrijeme (g)	kamata
2 500	10%	2	
400	12%	6	

glavnica (kn)	kamatna stopa	vrijeme (g)	kamata
5 550	8%	1.5	
1 500	4.5%	16	
824	16%	10	
2 890	3.2%	2.5	
100 000	35%	25	

5. Gospodin Kraljević pozajmio je 6000 kn na 1.5 godinu uz godišnju kamatnu stopu 9%. Kolike kamate mora platiti?
6. Lucija je imala 350 kn na štednji 3 godine, uz kamatnu stopu 5%. Kolike će kamate dobiti?
7. Tvrta Presli digla je kredit za strojeve u iznosu od 10 000 dolara, uz kamatnu stopu 12% na 5 godina. Koliko iznose kamate za taj iznos kredita?

### Primjer 2. Vrijeme u mjesecima

Majina mama digla je kredit od 12 000 kuna uz kamatnu stopu 7.6%. Kredit će vraćati 4 godine i 9 mjeseci. Kolike kamate treba platiti za taj iznos kredita?

#### Rješenje:

Glavnica:  $g = 12\ 000$  kn

Kamatna stopa:  $s = 7.6\% = 0.076$

Za računanje kamata vrijeme treba biti u godinama. Prisjetimo se da je 1 mjesec  $= \frac{1}{12}$

godine i najprije zapišimo zadano vrijeme u godinama.

$$\text{Vrijeme: } v = 4 \text{ g } 9 \text{ mj} = 4 + \frac{9}{12} = 4 + 0.75 = 4.75 \text{ godina.}$$

Računamo kamate:

$$k = s \cdot g \cdot v = 0.076 \cdot 12\ 000 \cdot 4.75 = 4332 \text{ kn.}$$

Majina mama treba platiti 4 332 kn kamata.

Preračunaj vrijeme u godine

$$1 \text{ mjesec} = \frac{1}{12} \text{ godine.}$$

$$4 \text{ mjeseca} = 4 : 12 \approx 0.33 \text{ godine.}$$



## Zadaci

8. U banku je uloženo 5400 švicarskih franaka uz kamatnu stopu 1.5%. Kolike će kamate na tu glavnicu biti nakon:
  - 4 godine;
  - 3.6 godina;
  - 10 mjeseci?
9. Majini roditelji ulažu 10 000 eura uz kamatnu stopu 3.2%. Koliku će ukupnu svotu eura dobiti ako novac podignu nakon:
  - 5 godina;
  - 2.8 godina;
  - 7 mjeseci;
  - 3 godine i 2 mjeseca?

Ako je rezultat beskonačan decimalni broj, zaokruži ga na dve decimale.



10. Lukin tata podiže nenamjenski kredit u banci. Želi podići 23 000 kuna. Kamatna stopa na nenamjenske kredite iznosi 6.8%. Kolike će mu kamate na taj kredit biti nakon:
  - 6 godina;
  - 3.5 godine;
  - 25 mjeseci?

11. U nekoj banci kamatna stopa na stambeni kredit iznosi 5.9%. Koliko ukupno kuna vraća čovjek koji podiže kredit od 1 258 000 kn na 22 godine i 8 mjeseci?

12. Kamatna stopa na stambenu štednju iznosi 3.5%. Poticajna sredstva iznose 750 kn godišnje. Ako odjednom uplatimo 25 000 kn, koliku ćemo ukupnu svotu nakon 5 godina imati na računu stambene štedionice? Isplati li se to?

### Primjer 3. Kamatna stopa

Lukini roditelji štede za njegovo školovanje. Uložili su u banku 24 000 kn i žele na njih dobiti 10 000 kn kamata za 15 godina. Kolika treba biti kamatna stopa da bi dobili tolike kamate?

#### Rješenje:

Glavnica:  $g = 24\ 000$  kn

Kamate:  $k = 10\ 000$  kn

Vrijeme:  $v = 15$  g

#### Važno

Da bismo izračunali kamatnu stopu, iznos kamata trebamo podijeliti s umnoškom glavnice i vremena.  $s = \frac{k}{g \cdot v}$  ili  $s = k : (g \cdot v)$ .

$$s = \frac{k}{g \cdot v} = \frac{10000}{24000 \cdot 15} = \frac{1}{36} \approx 0.0278 = 2.78\%$$

Može i ovako:

$$s = k : (g \cdot v) = 10000 : (24000 \cdot 15) \approx 0.0278 = 2.78\%$$

Kamatna stopa trebala bi biti 2.78%.

U džepno računalo upiši  
10 000 : (24000 · 15) =  
Zgrade obavezne!



### Zadaci

13. Kamata na kredit od 300 eura za 2 godine iznosi 90 eura. Kolika je kamatna stopa za taj kredit?

kamatna stopa  
 $s = \frac{k}{g \cdot v}$   
 $s = k : (g \cdot v)$

14. Tvrtka Smokvić digla je kredit za obnavljanje nasada u iznosu od 2 000 000 kn. Za 4 godine mora za taj iznos kredita platiti 500 000 kn kamata. Kolika je kamatna stopa za taj kredit?

15. Prepiši pa izračunaj kamatnu stopu:

glavnica (kn)	kamatna stopa	vrijeme (g)	kamata
2 504		3	187.8
4 200		4	840
15 560		2.5	3 890
1 500		15	3 375
800		20	3 040

glavnica (kn)	kamatna stopa	vrijeme (g)	kamata
2 900		6.25	1 450
100 000		30	294 000

16. Kolika je kamatna stopa na stambeni kredit u banci u kojoj se za stan čija je cijena 85 600 eura nakon 22 godine vraća 154 000 eura? Što ti se čini, je li to previše? Provjeri je li kamatna stopa te banke povoljnija ili nepovoljnija od onih što ih nudi većina banaka u Hrvatskoj.
17. Matijin stric kupuje auto na kredit. Rata će mu biti 1300 kn, na 7 godina. Cijena auta bez kredita iznosi 87 525 kn. Kolika je godišnja kamatna stopa toga kredita po jednostavnom kamatnom računu?

### Primjer 4. Glavnica

Maja kupuje računalo na kredit. Prodavač joj je rekao da je kamatna stopa 8.2% te da će za kredit na 2.5 godina platiti 656 kn kamata. Koliki je iznos kredita, tj. kolika je cijena računala?

#### Rješenje:

Kamatna stopa:  $s = 8.2\%$

Kamate:  $k = 328$  kn

Vrijeme:  $v = 2.5$  g

$$g = \frac{k}{s \cdot v} = \frac{656}{0.082 \cdot 2.5} = 3200 \text{ kn.}$$

glavnica

$$g = \frac{k}{s \cdot v}$$

$$g = k : (s \cdot v)$$

Može i ovako:

$$g = k : (s \cdot v) = 656 : (0.082 \cdot 2.5) = 3200 \text{ kn.}$$

## Zadaci

18. Koliku glavnici treba uložiti na oročenu štednju na 4 godine uz godišnju kamatnu stopu 4% ako želimo nam kamate budu 10 000 kn?
19. Koliko treba uložiti u banku koja na uložena sredstva ima kamatnu stopu 1.4% ako želimo da nam se ulog nakon 6 mjeseci poveća za 1000 kn?
20. Kolika je glavnica uložena na oročenu štednju uz kamatnu stopu 2.9% ako je ona nakon 2 godine i 7 mjeseci narasla za 223.3 kn?

21. Prepiši pa izračunaj glavnici:

glavnica (kn)	kamatna stopa	vrijeme (g)	kamata
	5%	5	125
	6.3%	2	6 564.6
	1.9%	12	15 606.6
	3.99%	1.5	11 970
	25%	24	5 994
	15%	3.5	12 652.5
	8%	24	1 920 000

22. Koliki je iznos kredita ako nakon 5 godina, ako uz kamatnu stopu 11% treba vratiti 34 100 kn.

### Primjer 5. Vrijeme

Ana je u banku uložila 1650 kn. Banka joj za štednju daje kamatnu stopu 3.4%. Koliko dugo taj iznos treba biti na štednji da bi dobila 252.45 kn kamata?

### Rješenje:

Glavnica:  $g = 1650$  kn

Kamatna stopa:  $s = 3.4\%$

Kamate:  $k = 252.45$  kn

$$v = \frac{k}{g \cdot s} = \frac{252.45}{0.034 \cdot 1650} = 4.5g$$

Ako želimo vrijeme izraženo u godinama i mjesecima, onda decimalni dio pomnožimo s 12.

$$v = 4.5 \text{ godina} = 4 \text{ g i } 0.5 \cdot 12 \text{ mj} = 4 \text{ g 6 mj.}$$

Dakle Ana treba štedjeti 4.5 godina, odnosno 4 godine i 6 mjeseci.

Da bi godine preračunao u mjesecu, pomnoži s 12.



## Zadaci

23. Koliko godina treba štedjeti da bi se glavnica od 4500 kn uz kamatnu stopu 1.2% uvećala za 540 kn?
24. Koliko mjeseci treba štedjeti da bi se glavnica od 5600 kn uz kamatnu stopu 3.2% uvećala za 224 kn?
25. Anina baka treba nov namještaj u dnevnoj sobi.
  - a) Koliko će mjeseci otplaćivati kredit ako je cijena namještaja koji je odabrala bez kredita bila 45 000 kn, a s kreditom, uz kamatnu stopu 2.4%, 46 440 kn?
  - b) Kolika će joj biti mjeseca rata?
  - c) Ako takav kredit traje duplo više mjeseci, kolike će tada biti kamate?
  - d) Kolika će tada biti konačna cijena?
  - e) Kolika će biti mjeseca rata?
  - f) Što se više isplati?
  - g) Na koliko će rata baka uzeti kredit ako joj je mirovina 2900 kn?

$k = s \cdot g \cdot v$

$s = \frac{k}{g \cdot v}$

$g = \frac{k}{s \cdot v}$

$v = \frac{k}{s \cdot g}$

AJOJ, OPET TE FORMULE.

SLUŠAJ KAKO SAM JA TO ZAPAMTILA: KAMATE SE RAČUNAJU MNOŽENJEM.

A ZA SVE OSTALE VELIČINE KAMATE PODIJELIŠ SA UMNOŠKOM ZADANIH VELIČINA.

$s = \frac{k}{g \cdot v}$

$g = \frac{k}{s \cdot v}$

$v = \frac{k}{s \cdot g}$

26. Prepiši, pa popuni:

<b>g</b>	6000 kn	7000 kn	8000 kn	
<b>s</b>	4.5%	2.3%		3.6%
<b>v</b>	6 g		4 g	5 g
<b>k</b>		322 kn	1440 kn	1620 kn

27. Prepiši, pa popuni:

<b>g</b>	4000 kn	5000 kn	9000 kn	
<b>s</b>	5.2%	1.7%		4.4%
<b>v</b>	7 g		3 g	2 g
<b>k</b>		510 kn	1539 kn	704 kn

28. Koliku ukupnu svotu vraća tvrtka kojoj je banka odobrila kredit od 125 000 eura na 12 godina uz kamatnu stopu 3.4%? Kolike su joj mjesečne rate ako se kredit računa po jednostavnom kamatnom računu?

29. Koliko će eura narasti glavnica od 5600 eura ako je oročena na 25 mjeseci uz kamatnu stopu 4.1%?

30. Uz koju je kamatnu stopu Luka uložio 1200 eura koje je dobio od strica iz Amerike ako mu je ta svota nakon 20 mjeseci u banci narasla na 1270 eura?

31. 245 688 kn stoji u banci 13 mjeseci, a kamate su 3992.43 kn. Po kojoj je kamatnoj stopi uložena ta svota?

32. Anina mama bila je u "minusu" na tekućem računu 4 mjeseca. Koliko je kuna bila u "minusu" ako su joj kamate 122.99 kn, a banka odobrava "minus" uz kamatnu stopu 14.7%?

33. Koliko treba uložiti u neku banku pa da kamate uz kamatnu stopu 2.6% nakon 11 mjeseci budu

iste kao i u banci u kojoj je uloženo 12 000 kn na 8 mjeseci uz kamatnu stopu 2.4%?

34. Koji je kredit povoljniji? Ako smo dobili 5000 kn i nakon 4 godine vratili 6200 kn ili ako smo dobili 4500 kn i nakon 5 godina vratili 5800 kn?

35. Gdje se više isplati štedjeti? U banci koja uloženih 500 eura nakon 40 mjeseci poveća na 580 eura, ili u onoj koja uloženih 700 eura nakon 50 mjeseci poveća na 820 eura?

36. Ukupna cijena stana od  $60 \text{ m}^2$  s kreditom iznosi 123 000 eura. Ako je kredit dobiven na 25 godina uz kamatnu stopu 4%, kolika je bila cijena toga stana po  $\text{m}^2$  bez kredita? Kolika je bila mjesečna rata kredita u kunama? Je li bila svaki mjesec ista? O čemu je to ovisilo?

37. Stara kućica u Malom Lošinju treba adaptaciju. Vlasnici nemaju dosta vlastitog novca i trebaju kredit. Banka nudi dvije vrste kredita: za prvi treba depozit od 10% iznosa kredita, koji se oduzima od glavnice, kamatna je stopa 4.6%, najduže na 25 godina, mjesečna rata bila bi 2500 kn; drugi je bez depozita, po kamatnoj stopi 5.3%, najduže na 30 godina, uz istu mjesečnu ratu. Koja je vrsta kredita povoljnija?

38. Traje li dulje otplata kredita od 45 000 eura u banci koja ima kamatnu stopu 6.5% ili kredita od 50 500 eura u banci koja ima kamatnu stopu 6.3% ako znamo da su kamate na oba kredita jednakе?

39. Koliko novca sada moraš staviti u banku da bi za 30 godina uz kamatu 4% dobio milijun kuna?



### Složeni kamatni račun

Banke ne računaju kamate na jednostavan način koji smo ovdje naučili, nego na puno složeniji način. Pritom se kamate obračunavaju u različitim vremenskim razmacima (kvartalno, polugodišnje,

godišnje), dodaju se glavnici pa se kasnije nove kamate obračunavaju na taj cjelokupni iznos.

Na dva primjera pokazat ćemo vam kako se izračunavaju kamate na složeni način. Više o tome učit ćete u srednjoj školi.

**Primjer 6.**

Luka je na štednu knjižicu stavio 1500 kn. Godišnja kamatna stopa iznosi 3%. Na kraju svake godine kamate se pripisuju glavnici. Koliko će Luka imati novca na štednoj knjižici nakon 3 godine ako nije podizao novac?

**Rješenje:**

Vrijeme	Obračunate kamate	Iznos na štednoj knjižici
na početku		1500
na kraju 1. godine	3% od 1500 = 45 kn	1500 + 45 = 1545 kn

Vrijeme	Obračunate kamate	Iznos na štednoj knjižici
na kraju 2. godine	3% od 1545 = 46.35 kn	1545 + 46.35 = 1591.35 kn
na kraju 3. godine	3% od 1591.35 = 47.74 kn	1591.35 + 47.74 = 1639.09 kn

Na kraju 3. godine štednje Luka će na štednoj knjižici imati 1639.09 kn.

Napomena: Primijeti da je, štедеći na ovaj način, Luka na kraju druge godine imao 1.35 kuna više nego pri štednji s jednostavnim ukamaćivanjem.

**Primjer 7.**

Luka je na štednu knjižicu stavio 1500 kn. Godišnja kamatna stopa iznosi 3%. Na kraju svakih 6 mjeseci kamate se pripisuju glavnici. Koliko će Luka imati novca na štednoj knjižici nakon prve godine ako nije podizao novac? A nakon druge?

**Rješenje:**

Ako je godišnja kamatna stopa 3%, onda je za 6 mjeseci, tj. pola godine kamatna stopa pola godišnje kamatne stope. Dakle kamatna stopa za razdoblje od 6 mjeseci iznosi 1.5%

Računamo stanje na računu, pritom sve decimalne brojeve zaokružujemo na 2 decimalne.

Vrijeme	Obračunate kamate	Iznos na štednoj knjižici
na početku		1500
nakon 6 mjeseci	1.5% od 1500 = 22.5 kn	1500 + 22.5 = 1522.5 kn
na kraju 1. godine	1.5% od 1522.5 = 22.84 kn	1522.5 + 22.8375 = 1545.34 kn
nakon 18 mjeseci	1.5% od 1545.34 = 23.18 kn	1545.34 + 23.18 = 1568.52 kn
na kraju 2. godine	1.5% od 1568.52 = 23.53	1568.52 + 23.53 = 1592.05 kn

Na kraju 1. godine štednje Luka će na štednoj knjižici imati 1545.34 kn. Na kraju druge godine imat će 1592.05 kune, što je više nego ako se kamate pripisuju godišnje.

**Zadatak :**

40. Maja je na štednju uložila 2000 kn uz godišnju kamatnu stopu 4%. Izračunaj koliko će imati ušteđevine nakon 2 godine ako:

- a) računamo jednostavnim kamatnim računom;
- b) se kamate pripisuju godišnje;
- c) se kamate pripisuju polugodišnje.

## 3.5. Ponavljanje

### Pitanja za ponavljanje:

1. Što je postotak?
2. Što je veće, 15% od 100 ili 15% od 1000?  
Zašto?
3. Ako neka cijena najprije poskupi 15%, a zatim pojeftini 10%, hoće li se ukupno promjeniti za 5%? Zašto?
4. Kako računamo postotni iznos?
5. Koliko je 50% od 2000?
6. Što su kamate?
7. O čemu ovise kamate?
8. Što je glavnica, a što kamatna stopa?
9. U kojoj mjerenoj jedinici treba biti vrijeme u jednostavnom kamatnom računu?
10. Kako računamo kamate?
11. Kako računamo kamatnu stopu?
12. Što je veće, 25% od 99 ili 25?
13. Što je manje, 25% od 103 ili 25?

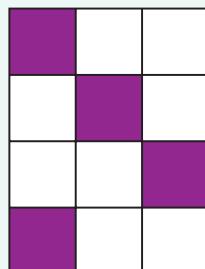
### Zadaci za ponavljanje:

1. Dva prijatelja dijele zaradu tako da prvi dobije 37%. Koliki je dio dobio drugi prijatelj?
2. Prepiši pa popuni tablicu:

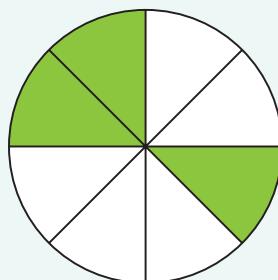
Postotak	Omjer	Decimalni broj
32%		
	13 : 100	
		0.67

3. Zapiši u obliku postotka:
  - dvije petine razreda ide na ples;
  - pet od sedamnaest automobila na parkiralištu bijele je boje.
4. Izrazi postotkom koji je dio lika obojen:

a)



b)



5. Prepiši, pa zapiši u oblicima koji nedostaju:

Postotak	Omjer	Razlomak	Decimalni broj
32%			
	3 : 4		
		$2\frac{1}{2}$	
			1.24
0.4%			

6. U zadatku: Koliko je 72% od 15? osnovna je vrijednost:  
a) 72;  
b) 15;  
c) treba ju izračunati.
7. U zadatku: Koliko je 65% od 537? traži se:  
a) osnovna vrijednost  
b) postotak  
c) postotni iznos.
8. Prepiši, pa izračunaj podatak koji nedostaje:

postotak	osnovna vrijednost	postotni iznos
3.2%		12
	405	44.55
88%	200	
	1.45	0.99
235%		998.75

9. Na jednom biračkom mjestu na izbore je izišlo 78% birača upisanih u birački popis. Prepiši, pa dopuni rečenice:

Ako je u birački popis upisano 100 birača, na izbore je izašlo \_\_\_\_\_ birača.

Ako je u birački popis upisano 200 birača, na izbore je izašlo \_\_\_\_\_ birača.

Ako je u birački popis upisano 500 birača, na izbore je izašlo \_\_\_\_\_ birača.

Ako je u birački popis upisano 1000 birača, na izbore je izašlo \_\_\_\_\_ birača.

10. U jednom razredu postignut je ovakav uspjeh na pismenom ispitu iz matematike: odličnih 5, vrlo dobrih 7, dobrih 4, dovoljnih 6 i nedovoljnih 8. Izračunaj postotak svake ocjene. Izračunaj postotak prolaznih ocjena.

11. Provizija trgovačkom putniku zaračunava se po stopi od 15%. Koliki je promet napravio ako je zaradio 2400 kuna?

12. Trgovac je robu nabavio po 225 kuna, a prodaje ju po 325 kuna (bez PDV-a). Koliki postotak marže zaračunava na tu robu?

13. Strijelac je pogodio metu 25 puta iz 80 pokušaja. Koliki je postotak njegove uspješnosti pogotka?

14. Ana može baciti loptu 252 cm. To je 72% udaljenosti na koju loptu može baciti Matija. Na koju udaljenost Matija može baciti loptu?

15. Luka je pročitao 30 stranica knjige za lektiru, što je 15% cijele knjige. Koliko stranica ima cijela knjiga?

16. Vlasnica frizerskog salona kupila je nov lokal i požalila se prijateljici da je platila 20 000 kuna poreza na nekretnine. Koliko je platila za lokal ako se porez na nekretnine plaća po stopi 5%?

17. U zadatku: Cijena neke robe povećala se za 15 kuna i sada iznosi 140 kuna. Kolika je bila cijena prije povećanja? Za koji se postotak cijena promjenila? U tom zadatku broj 140 je:

- a) osnovna vrijednost;
- b) postotni iznos;
- c) osnovna vrijednost uvećana za postotni iznos;
- d) osnovna vrijednost umanjena za postotni iznos.

18. Majina mama nabavila je računalo za 6 490.40 kn. Njezina prijateljica kupila bi jednako takvo računalo, ali za svoje poduzeće, pa ju zanima cijena bez PDV-a. Odredi cijenu bez poreza (22%) i iznos poreza.

19. Cijena jedne knjige je 89 kn, ali za kupnju 10 i više primjeraka dobavljač odobrava rabat 12%. Kolika je cijena jednog primjerka ako se kupi 10 komada?

20. Trgovina je snizila cijenu majica 35%. Kolika je snižena cijena ako je cijena prije sniženja bila 270 kn?

21. Plaća od 3 720 kn povećana je na 3 943.20 kn. Koliki je postotak povećanja?

22. Cijena keksa na ponudi snižena je za 3 kn i sada iznosi 11.99 kn. Koliko se postotak cijena keksa promjenila?

23. Nakon povećanja od 6% radnik je dobio plaću 4 483.80 kn. Koliko je bila plaća prije povećanja?

24. Radnikova plaća povećana je 7% i sada iznosi 3 481.78 kn. Kolika je bila plaća prije povećanja?

25. Radnikova plaća smanjena je 5% i sada iznosi 3724 kune. Za koliko je kuna plaća umanjena?

26. Cijena neke robe u trgovini je 425 kn.

- a) Za plaćanje gotovinom trgovac daje popust 10%. Koliko treba platiti gotovinom?
- b) Na ljetnom popustu cijena je snižena na 295 kn. Koliki je postotak sniženja?

27. Bicikl stoji 1200 kn. Najprije je pojeftinio 8%, a zatim još 11%. Kolika mu je cijena nakon obaju pojeftinjenja?
28. Cijena neke robe je 250 kn. Najprije se poveća 25%, a zatim snizi 10%.
- a) Kakva je konačna cijena u odnosu na početnu?
- b) Za koji postotak treba sniziti cijenu nakon poskupljenja da bi se ona vratila na početnu vrijednost?
29. Ako svježa papaja sadrži 98% vode, a sušena 4%, koliko se suhe papaje dobije od 120 kg svježe papaje?
30. Ako svježo voće sadrži 88% vode, a sušeno voće sadrži 8% vode, koliko se sušenog voća može dobiti od 92 kg svježeg?

31. Prepiši, pa popuni tablicu:

<b>g</b>	1200 kn	2540 kn	700 eura	
<b>s</b>	1.2%	7.5%		11.3%
<b>v</b>	5 g		8 g	4 g
<b>k</b>		762 kn	369.60 eura	497.20 kn

32. Koliko godina treba štedjeti da bi se glavnica od 3300 eura uz kamatnu stopu 4.4% uvećala za 726 eura?
33. Koliko traje otplata kredita od 230 000 kn uz kamatnu stopu 6.9% ako je svota koju treba vratiti 388 700 kn?
34. Koliko treba uložiti na oročenu štednjku po kamatnoj stopi 3.6% na 4 godine, ako želimo dobiti 360 kn kamata?
35. Po kojoj je kamatnoj stopi uložena glavnica od 40 000 kn ako se za 8 godina povećala na 60 000 kn?
36. Koliki je ukupan iznos koji dužnik treba vratiti ako je dobio kredit od 56 000 eura po kamatnoj stopi 5.5%, na 66 mjeseci? Kolika je mjesečna rata toga dužnika ako se računa po jednostavnom kamatnom računu?

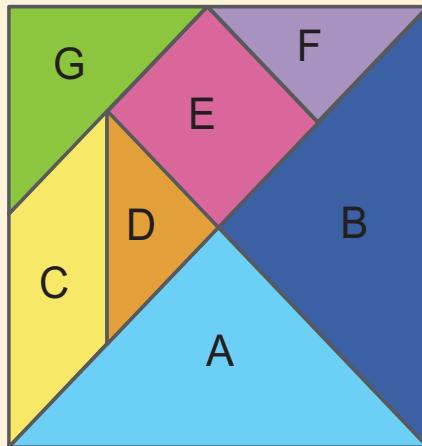
37. Koliki je iznos kredita na 40 mjeseci uz kamatnu stopu 6% ako su kamate na taj kredit 5000 kn?
38. Po kojoj je kamatnoj stopi odobren kredit za kupnju novog stroja na jednoj farmi kunića ako će cijena tog stroja od 8000 kn nakon 66 mjeseci kredita narasti na 9100 kn?
39. Uz koliku će kamatnu stopu dug od 30 000 kn narasti na 33 100 kn za 2 godine i 7 mjeseci?
40. Koji je kredit povoljniji? Ako smo dobili 6200kn i nakon 3 godine vratili 6800 kn ili ako smo dobili 5400 kn i nakon 3.5 godine vratili 5800 kn?
41. Koliku glavnici treba uložiti na oročenu štednjku na 62 mjeseca uz godišnju kamatnu stopu 4.5% ako želimo da nam ona naraste na 147 900 eura?
42. Traje li dulje otplata kredita od 4 000 eura u banci koja ima kamatnu stopu 4.9% ili kredita od 7 500 eura u banci koja ima kamatnu stopu 5.3% ako znamo da su kamate na oba kredita jednake?
43. Matija ljeti radi u skladištu. Za taj posao dobiva 20 kn po satu. Od zarade mora platiti 25% poreza.
- a) Izračunaj koliku bi plaću bi Matija dobio za 12 sati rada (bruto plaća);
- b) Koliki je iznos poreza koji Matija mora platiti od te plaće?
- c) Koliko mu novca ostane od plaće nakon plaćanja poreza (neto plaća)?
- d) Matija želi uštedjeti 2000 kn za novo računalo. Ako radi 8 tjedana po 18 sati tjedno i štedi 80% neto plaće - hoće li uštedjeti dovoljno novca?

## Igra

### Postoci na Tangramu

Jedan učenik odabire dio ili dijelove Tangrama i postavlja pitanje ostalima. Nekoliko prijedloga za pitanja:

- Koliki je postotak cijelog lika trokut A;
- Koliki je postotak trokuta A trokut G;
- Koliki je postotak površine sastavljene od A i B trokut D?



### Primjerak oglednog testa:

- Izračunaj podatke koji nedostaju
  - 20% od 8000 m iznosi \_\_\_\_\_;
  - 25% od \_\_\_\_\_ iznosi 4000 kn;
  - \_\_\_ od 2000 kg iznosi 500 kg;
- Matija je prešao 12 km puta ukupne duljine 48 km. Koliki je postotak puta Matija prešao?
- U tvornici igračaka očekuju da će 3.5% igračaka biti loše proizvedeno (škart). Koliko bi moglo biti loše proizvedenih igračaka među 10 000 igračaka?

- U trgovini je božićno sniženje 15%. Izračunaj cijene ovih proizvoda nakon sniženja.

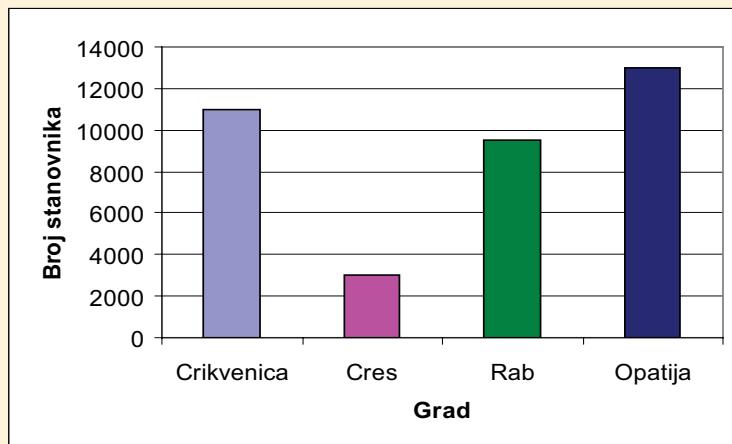
	početna cijena	cij. nakon sniženja
hlače	250 kn	
jakna	475 kn	
majica	99 kn	

- Ana je uložila 5 000 kn u banku. Za taj iznos štednje banka odobrava 5% kamata godišnje. Koliko će kamata Ana dobiti za 3 godine?
- Kolika je godišnja kamatna stopa ako na iznos kredita od 50000 treba platiti 15000 kamata za 4 godine?

# 4. Statistika i vjerojatnost

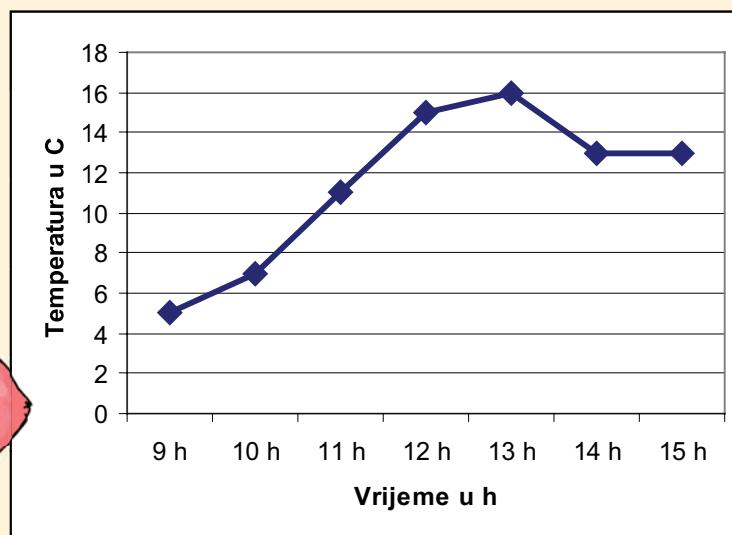
## Važni pojmovi

obilježje skupa objekata  
frekvencija i relativna frekvencija  
tabelarni prikaz  
stupčasti dijagram  
kružni dijagram  
slučajni događaj  
elementarni događaj  
relativna frekvencija događaja  
vjerojatnost događaja



Znate li koliko su česte poplave na Muri, koja je prosječna temperatura ljeti u

Gospiću, kolika je uobičajena količina snijega na Zavižanu ili koliko su porasli troškovi života u prošloj godini? Prikupljanje i analiza takvih **podataka** spadaju u djelokrug statističara.



Statistika je grana matematike koja se bavi načinima prikupljanja i obrade različitih podataka. Mi ćemo samo malo zaviriti u nju.

Ljudi često privlače igre na sreću, no jeste li sigurni što znači "svaka treća dobitna" i kolike su uopće šanse da osvojite milijun kuna na lotu?

Za otkrivanje misterija dobitaka na lotu, kolike su šanse da vas učiteljica pita ili kolike su šanse da će sutra padati kiša zatrebat će vam znanje **vjerojatnosti**.

Počeci teorije vjerojatnosti potječu iz Francuske u 17. st. U današnje vrijeme teorija vjerojatnost ima veliku primjenu u svakodnevnom životu, primjerice, pri izradi prognoze vremena, računanju rizika pojedinih medicinskih postupaka, primjeni novih lijekova, računanju rizika u osiguravajućim društvima i bankama.

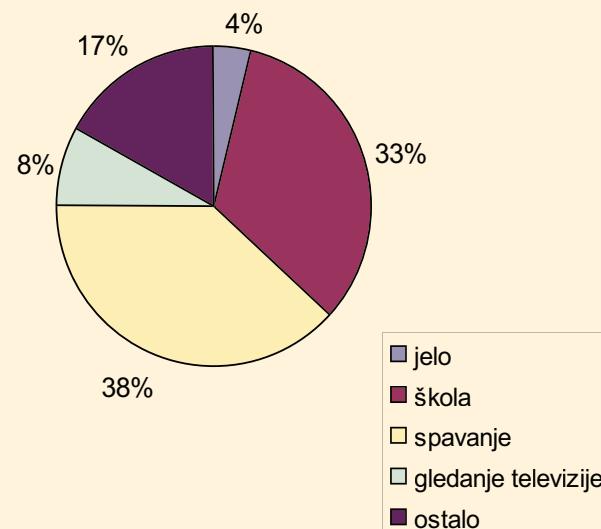
*U ovom ćeš poglavlju, primjerice, naučiti:*

- Kako odrediti prosječnu količinu padalina
- Kako nacrtati grafički prikaz prikupljenih podataka
- Kako izvesti zaključke iz prikupljenih podataka
- Kolika je vjerojatnost da na kockici padne šestica
- Kako izračunati kolika je vjerojatnost da iz ladice s čarapama izvučeš čarapu koju želiš
- Kako prepoznati je li neka igra fer, tj. imaju li svi jednake šanse za pobjedu
- Kako izračunati kolike su šanse da dobiješ na lotu

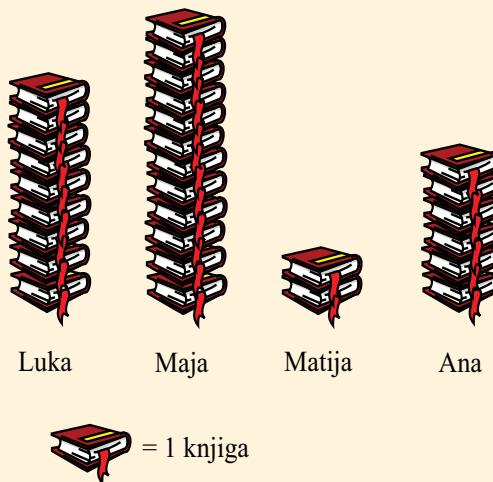
### Brzinski usmeni zadaci za ponavljanje

1. Od 1000 proizvoda njih 12% je oštećeno. Koliki je postotak proizvoda dobar? Koliko je to komada?
2. Lukine ocjene iz matematike su 5, 4, 5, 3. Koliki mu je prosjek ocjena?
3. Na reklami za tombolu piše "Svaka druga je dobitna". Što to znači?
4. U snopu karata nalazi se 5 zelenih i 5 crvenih karata. Kakve su šanse da ćeš izvući zelenu kartu? Jesu li veće šanse da ćeš izvući crvenu ili zelenu kartu?

5. Pogledaj grafički prikaz Anine potrošnje vremena. Na što Ana troši najviše vremena? Koliki treba biti zbroj svih postotaka u tom kružnom dijagramu?



## 4.1. Grafičko prikazivanje podataka



### Pročitane knjige

Na slici su prikazani podaci o broju pročitanih knjiga u prvom polugodištu. Pogledaj sliku i odgovori na pitanja.

- Tko je pročitao najviše knjiga i koliko?
- Tko je pročitao najmanje knjiga i koliko?
- Koliko si knjiga ti pročitao tijekom ovoga polugodišta?
- Kozi su mogući razlozi da je netko pročitao više ili manje knjiga?

Vrlo često čitamo u novinama ili čujemo na televiziji različite podatke, primjerice: o porastu troškova života, popularnosti turističkih odredišta, starosti stanovništva, promjeni broja stanovnika itd. Takvi podaci služe za uspoređivanje i govore nam kako koliko i zašto su se neke promjene dogodile te koliko ih se dogodilo. Zato ih treba savjesno i pažljivo prikupljati, pri čemu su katkada potrebne i vrlo složene akcije, primjerice poput one za popis stanovništva.

Takvi se podaci zovu se **statistički podaci**. Njih prikupljaju i proučavaju statistički zavodi, primjerice Državni zavod za statistiku Republike Hrvatske (<http://www.dzs.hr>). Grana matematike koja se bavi načinima prikupljanja i obrade različitih podataka zove se **statistika**.

Statistički podaci često se pregledno prikazuju u **tablicama** jer se na taj način lako očitava koji brojevi pripadaju kojoj veličini te ih se lako uspoređuje.

Evo primjera vodoravne i okomite tablice:

*vodoravna tablica*

Ime	Ana	Luka	Maja	Matija
Bodovi	14	20	7	10

*okomita tablica*

Ime	Bodovi
Ana	14
Luka	20
Maja	7
Matija	10

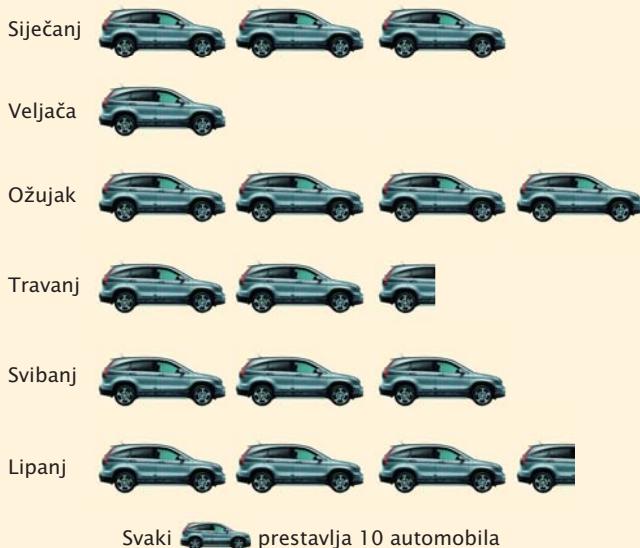
**tablica**

**grafikon ili  
dijagram**

Da bismo se što bolje mogli upoznati sa statističkim podacima te iz njih lako i brzo izvući potrebne zaključke, podaci moraju biti prikazani na što pregledniji i jednostavniji način. Najveću zornost postižemo ako ih predočimo grafički, tj. u obliku posebnih crteža. Takve crteže nazivamo **dijagramima ili grafikonima**.

## Primjer 1. Slikovni dijagrami

Pogledaj sliku na kojoj se nalaze podaci koliko je automobila prodano u jednoj poslovničkoj razdoblju od siječnja do lipnja. Svaki nacrtani automobil predstavlja 10 prodanih automobila. Nacrtaj pripadajuću tablicu.



je najviše automobila, a u \_\_\_\_\_ prodano je najmanje automobila.

### Rješenje:

Takov način prikazivanja podataka pomoći slika naziva se **slikovnim dijagrame**. Iz njega je lako očitati tražene podatke:

Budući da svaki predstavlja 10 automobila, tada svaki predstavlja 5 automobila. U veljači je prodano 10 automobila, a u travnju 25 automobila. U mjesecu ožujku je prodano najviše automobila, a u veljači prodano je najmanje automobila. Evo pripadne tablice:

Mjesec	Broj prodanih automobila
Siječanj	30
Veljača	10
Ožujak	40
Travanj	25
Svibanj	30
Lipanj	35

Prepiši i dopuni rečenice:

Budući da svaka sličica predstavlja 10 automobila, tada svaki predstavlja \_\_\_\_\_ automobila.

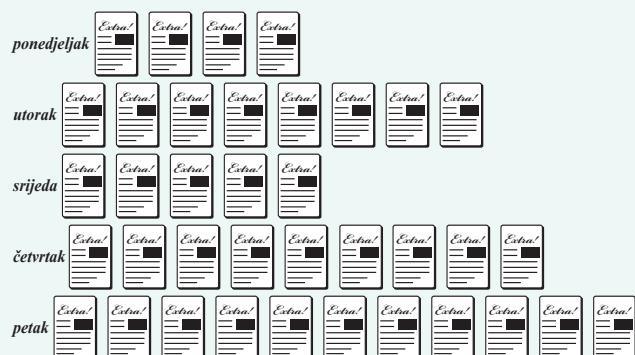
U veljači je prodano \_\_\_\_\_ automobila, a u travnju \_\_\_\_\_ automobila. U mjesecu \_\_\_\_\_ prodano

U slikovnom dijagramu podaci su prikazani pomoći sličica.

slikovni  
dijagram

## Zadaci

1. Na slici je prikazana prodaja novina na jednom kiosku. Svaka sličica novina predstavlja deset prodanih komada.



- a) Nacrtaj pripadajuću tablicu;  
b) Iz slikovnog dijagrama pročitaj sljedeće podatke:

U ponедјелјак је продано \_\_\_\_\_ novina, у уторак \_\_\_\_\_ komada, у срједу \_\_\_\_\_ komada, у четвртак \_\_\_\_\_, а у петак \_\_\_\_\_ komada novina.

2. Matija kod kuće ima veliku zbirku CD-ova.

Pomoću slikovnog dijagrama odgovori na sljedeća pitanja:

Rock 

Narodna 

Hiphop 

Klasična 

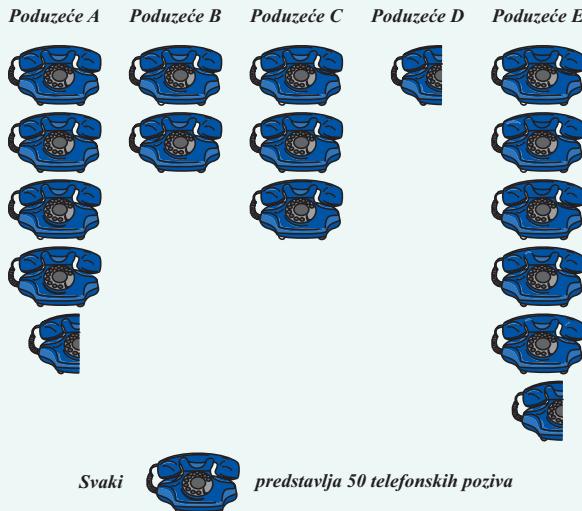
Jazz

Rap 

Pop 

- a) Taj slikovni dijagram pretvori u tablicu;
- b) Možeš li prepostaviti koju vrstu glazbe Matija najviše voli?

3. Na slici se nalaze podaci o jučerašnjem broju telefonskih razgovora za pet poduzeća.



- a) Ako svi pozivi stoje jednak, bez obzira na duljinu razgovora i odredište, koje će poduzeće imati najveći telefonski račun? A najmanji?
- b) Koliko je poziva imalo poduzeće A? Poduzeće D?
- c) Koliki je ukupan jučerašnji broj telefonskih poziva svih navedenih poduzeća?

4. U tablicama se nalaze podaci o broju prirodnih satelita planeta Sunčeva sustava.

Planet	Broj satelita
Merkur	0
Venera	0
Zemlja	1
Mars	2
Jupiter	17
Saturn	18
Uran	21
Neptun	8
Pluton	1

- a) Nacrtaj pripadni slikovni dijagram tako da svaki satelit predstaviš kružićem;
- b) Koji planet ima najviše satelita?
- c) Što ti slikovni dijagram govori o Merkuru i Veneri?
- d) Koliko satelita više ima Jupiter od Neptuna?
- e) Koliko puta Saturn ima više satelita od Marsa?

5. Podatke iz ovih tablica prikaži u obliku slikovnog dijagrama:

a)

Zbirka CD-ova	
Učenik	Broj CD-a u zbirci
Matija	55
Luka	20
Ana	25
Maja	30
Tanja	10

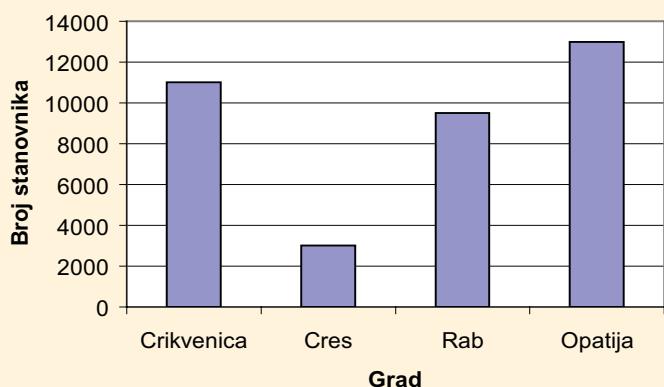
b)

Prosječan broj pristiglih pisama	
Obitelj	Pisma
Horvat	16
Jurić	8
Matić	12
Herceg	20
Kralj	22

6. Zabilježi tablicom količinu mlijeka koju tvoja obitelj potroši svaki dan u jednom tjednu. Dobivene podatke prikaži slikovnim dijagramom.

**Primjer 2.****Čitanje stupčastog dijagrama**

Na slici su grafički prikazani podaci o broju stanovnika nekih gradova u Primorsko-goranskoj županiji.



Dopuni prema podacima iz dijagrama:

Crikvenica ima \_\_\_\_\_ stanovnika, Cres ima \_\_\_\_\_ stanovnika, Rijeka ima \_\_\_\_\_ stanovnika, Rab ima \_\_\_\_\_ stanovnika, a Opatija ima \_\_\_\_\_ stanovnika.

**Rješenje**

Takav način prikazivanja podataka pomoću stupaca ili redaka naziva se **stupčasti dijagram**.

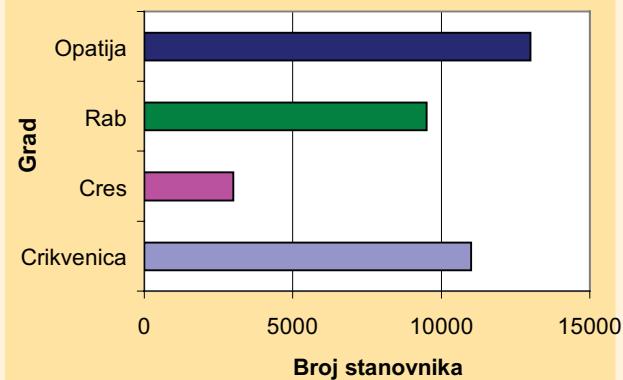
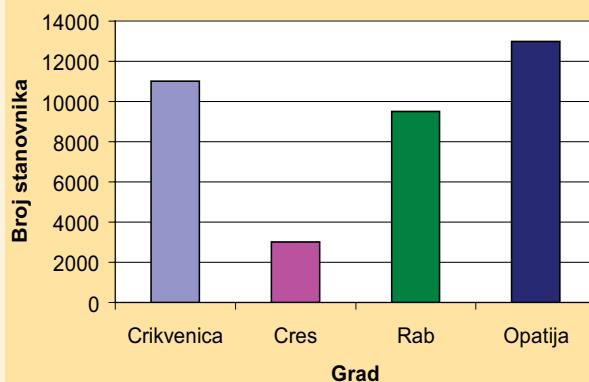
Iz njega je lako očitati tražene podatke:

Crikvenica ima 11000 stanovnika, Cres ima 3000 stanovnika, Rab ima 9500 stanovnika, a Opatija ima 13000 stanovnika.

stupčasti  
dijagram

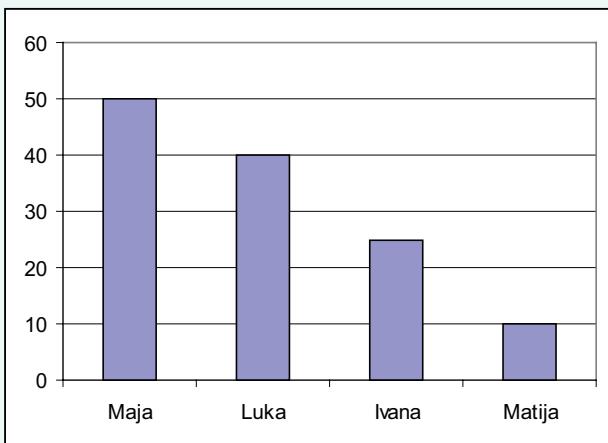
U stupčastom dijagramu podaci su prikazani pomoću pravokutnika čija visina (duljina) ovisi o veličini podataka koji se prikazuju i uspoređuju, a širine (osnovice) su im sukladne.

Stupčasti dijagram može biti položen okomitno ili vodoravno:



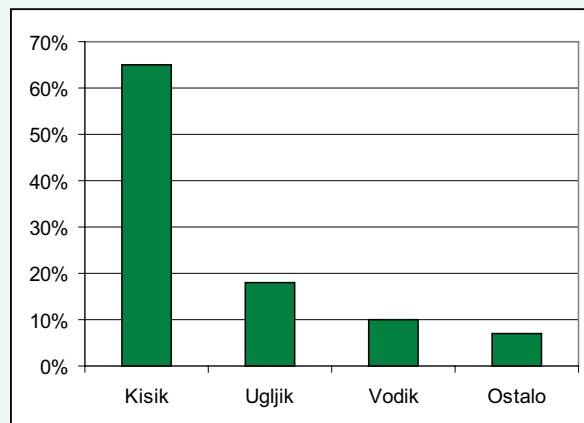
## Zadaci

7. Maja, Luka, Ivana i Matija dobili su rezultate testa iz matematike. Pročitaj podatke prikazane u ovom stupčastom dijagramu.



- a) Tko je dobio najviše bodova na testu? A najmanje?
- b) Koliko bodova ima Maja? A Ivana?
- c) Tko ima dvostruko manje bodova od Maje? A pet puta manje?
- d) Koliko bodova imaju svi zajedno?

8. Stupčasti dijagram prikazuje u kojem se postotku nalaze kemijski elementi u našem tijelu:



- a) Pročitaj podatke iz ovog dijagrama;
- b) Prikaži ove podatke u obliku tablice.

9. Dijagram na slici prikazuje neke od najviših vrhova svijeta.



Nacrtaj pripadnu tablicu i u nju zapiši približne vrijednosti visina iz dijagrama.

**Primjer 3.****Crtanje stupčastog dijagrama**

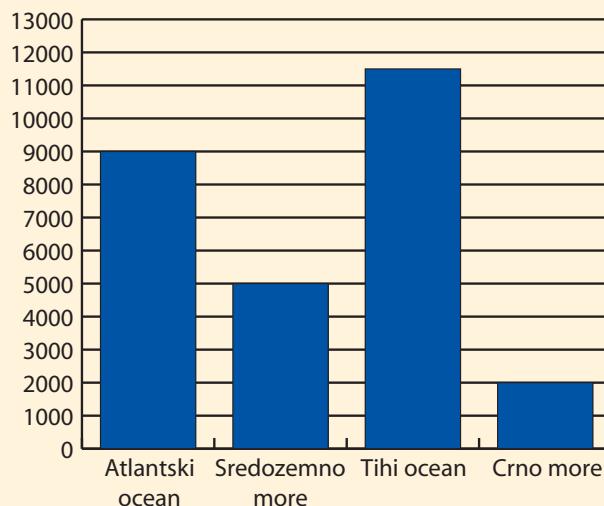
Podatke iz tablice prikaži u obliku stupčastog dijagrama:

**Rješenje:**

More	Dubina
Atlanski ocean	9000 m
Sredozemno more	5000 m
Tihij ocean	11500 m
Crno more	2000 m

Da bismo odnose između veličina mogli pravilno prikazati na slikama, moramo odrediti u kojem ćemo mjerilu crtati pravokutnike na stupčastom dijagramu. S obzirom na veličine

podataka iz tablice lako ćemo odlučiti da svakih 1000 m prikažemo s 5 mm (širinom kvadratične matematičke bilježnice).

**Zadaci**

10. U tablici se nalaze podaci o duljinama kopnenih granica Hrvatske sa susjednim državama.

Države	Duljina granice u km
Slovenija	501
Mađarska	329
Srbija i Crna Gora, zajedno	266
Bosna i Hercegovina	932

- a) Prikaži te podatke u obliku stupčastog dijagrama tako da 100 km prikažeš pravokutnikom visine 1 cm.  
 b) S kojom državom Hrvatska ima najdužu kopnenu granicu, a s kojom naj kraću?  
 c) Možeš li iz navedenih podataka zaključiti kolika je duljina morske granice s pojedinim državama?
11. Prikaži podatke o površinama otoka u obliku stupčastog dijagrama tako da 100 km<sup>2</sup> prikažeš pravokutnikom visine 1 cm.

Otok	Površina u km <sup>2</sup>
Cres	405
Krk	405
Brač	396
Hvar	289
Pag	287
Lošinj	175
Mljet	98

12. U tablici se nalazi broj stanovnika nekih naših gradova (bez okolice) prema popisu stanovništva iz 2001. godine:

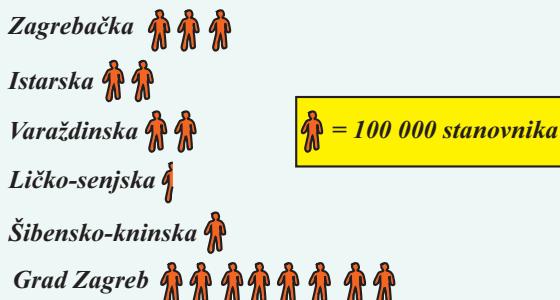
Grad	Broj stanovnika
Zagreb	779 145
Rijeka	144 043
Šibenik	51 553
Osijek	144 616
Varaždin	49 075

- a) Dodaj treći stupac tablice i zaokruži broj stanovnika na tisuće;  
 b) Nacrtaj pripadni stupčasti dijagram sa zaokruženim podacima;  
 c) Nacrtaj pripadni slikovni dijagram sa zaokruženim podacima tako da sličicom ♀ prikažeš 100 000 stanovnika.
13. Podatke iz tablice prikaži u obliku:  
 a) stupčastog dijagrama;  
 b) slikovnog dijagrama.

Vrsta	Broj stabala
Masline	850
Naranče	500
Kivi	350
Mandarine	400
Smokve	700

14. Pogledaj ovaj slikovni dijagram.

**Zupanija:**



- a) Što prikazuje taj dijagram?  
 b) Nacrtaj njegovu pripadnu tablicu;  
 c) Nacrtaj njegov pripadni stupčasti dijagram.
15. Kod kuće u raznim novinama pronađi podatke prikazane stupčastim dijagramom. Zalijepi ih u bilježnicu i pročitaj neke od njih.
16. Prikaži podatke o visinama snijega u obliku stupčastog dijagrama tako da visinu od 50 cm prikažeš pravokutnikom visine 1 cm. Odgovori na pitanja.
- a) Na kojem vrhu ima najviše, a na kojem najmanje snijega?  
 b) Može li se iz tih podataka zaključiti koji je vrh najviši?  
 c) Istraži visine tih vrhova, a kada bude lijepo vrijeme, posjeti koji od tih vrhova i uvjeri se u ljepotu naših planina.

Vrh	Visina snijega u cm
Zavižan	203
Sljeme	55
Bjelolasica	182
Veliki snježnik	179
Sveta Gera	67
Sveti Jure	151
Vojak	10



17. Prikaži podatke o Sunčevu sustavu u obliku stupčastih dijagrama tako da je:

- a)  $1000 \text{ km} \rightarrow 1 \text{ mm}$

**Promjer planeta Sunčeva sustava u km**

Merkur	4 880
Venera	12 109
Zemlja	12 761
Mars	6 797
Jupiter	142 960
Saturn	120 514
Uran	51 166
Neptun	49 557
Pluton	2 300

- b)  $1 \text{ godina} \rightarrow 1 \text{ mm}$

**Duljina godine na planetu Sunčeva sustava u zemaljskim godinama**

Merkur	0.24
Venera	0.62
Zemlja	1
Mars	1.88
Jupiter	11.8
Saturn	29.5
Uran	84
Neptun	164.8
Pluton	248

- c)  $100 \text{ milijuna km} \rightarrow 2 \text{ mm}$

**Prosječna udaljenost od Sunca planeta Sunčeva sustava u milijunima km**

Merkur	58
Venera	108
Zemlja	149.7
Mars	228
Jupiter	779
Saturn	1 427
Uran	2 869
Neptun	4 496
Pluton	5 900

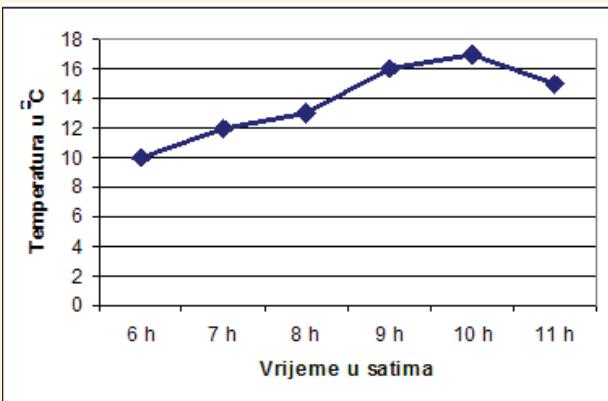
18. Maja piše članak o prehrani za školski list. Kako će izgledati stupčasti dijagrami za broj kalorija na 100 g sljedećih zdravih namirnica (sami odredite visine pravokutnika):

- a) Voće: datulje 589, orasi 580, grožđice 289, breskve 268, banane 88, lubenice 61, jabuke 51, marelice 51, trešnje 53 i naranče 45;
- b) Mliječni proizvodi: slatko vrhnje 337, mlijeko 67, jogurt 53, svježi sir 97;
- c) Žitarice: makaroni 373, kukuruzni griz 366, zobene pahuljice 390, riža 357, kruh 350;
- d) Povrće: grašak 98, mrkva 45, cikla 34, kupus 28, kelj 24, špinat 20, rajčica 20, salata 16;
- e) Od ponuđenih namirnica sastavi zdrav jelovnik za svoju užinu s najviše kalorija, a zatim s najmanje kalorija.



## Primjer 4. Linijski dijagram

Pogledaj kako možemo zapisati podatke o mijenjanju dnevne temperature svakoga sata. Temperatura zraka je u 6 h bila  $10^{\circ}\text{C}$ , a u 7 h  $12^{\circ}\text{C}$ .



Kolika je bila temperatura u 8 h?

Kolika je bila temperatura u 11 h?

Je li temperatura rasla ili padala od 8 h do 9 h?

U koliko je sati bila zabilježena najniža temperatura?

### Rješenje:

Takov način prikazivanja podataka pomoću stupaca ili redaka se naziva **linijskim dijagrom**. Iz njega je lako očitati tražene podatke:

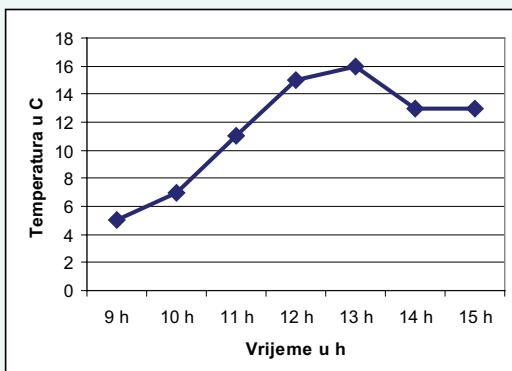
U 8 h bilo je  $13^{\circ}\text{C}$ , a u 11 h bilo je  $15^{\circ}\text{C}$ . U periodu od 8 h do 9 h temperatura zraka je rasla. Najniža temperatura zabilježena je u 6 h.

linijski  
dijagram

Linijskim dijagrom obično prikazujemo promjene jedne te iste veličine.

## Zadaci

19. Promotri linijski dijagram i odgovori na pitanja:



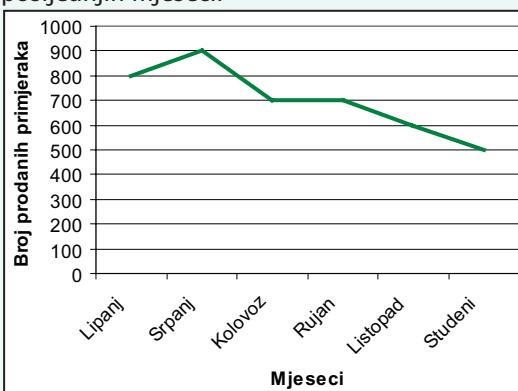
- a) Kolika je bila temperatura zraka u 11 h? A u podne? A u 13 h?
- b) Koja je najniža zabilježena temperatura? U koliko je sati zabilježena?
- c) Koja je najviša zabilježena temperatura? U koliko je sati zabilježena?
- d) Je li temperatura rasla ili padala u periodu između 10 h i 11 h? A između 11 h i podneva? A između 13 i 14 sati?

20. Bilježi svoju tjelesnu temperaturu tijekom jednog dana. Dobivene podatke prikaži linijskim dijagrom pa odgovori na pitanja:

- a) Koliku si temperaturu imao u 11 h?
- b) Koja je najniža zabilježena temperatura? U koliko je sati zabilježena?

- c) Koja je najviša zabilježena temperatura? U koliko je sati zabilježena?
- d) Je li temperatura rasla ili padala u periodu između 18 h i 21 h?
- e) U koje si doba dana imao najvišu temperaturu?

21. Trgovina za prodaju hladnjaka ovako je poslovala posljednjih mjeseci:



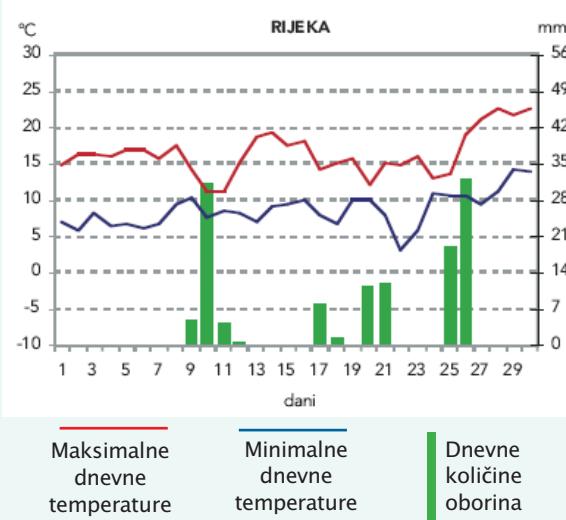
- a) Iz dijagrafa pročitaj kako se kreće prodaja u ovoj trgovini tijekom godine;
- b) U kojem je mjesecu trgovina prodala najviše robe? A najmanje?
- c) U kojim se mjesecima prodaja nije mijenjala?
- d) Je li prodaja rasla ili padala u posljednja 3 mjeseca?
- e) Podatke iz linijskog dijagrafa prikaži u tablici.

## Zadaci

22. Podatke iz ove tablice prikaži u linijskom dijagramu:

Prosječna temperatura zraka u Kukljici 2003. godine (°C)	
I	7.9
II	11.8
III	13.9
IV	19.0
V	25.6
VI	29.4
VII	28.8
VIII	33.8
IX	24.5
X	22.0
XI	18.3
XII	14.4

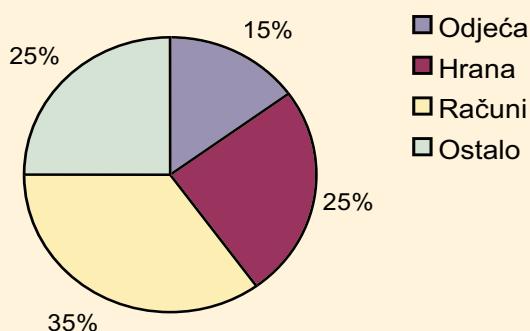
23. Na slici se nalaze podaci za Rijeku za travanj 2005.



- a) Koji je dan bio najtoplij? ✓
- b) Koji je dan bio najhladniji?
- c) Koji je dan palo najviše kiše?
- d) Kojim je danima padala kiša?

### Primjer 5. Čitanje kružnog dijagrama

Pogledaj sliku i iz nje pročitaj koji postotak svoje plaće Majina majka troši na odjeću.



Koliko kuna mjesечно ona potroši na odjeću ako ima plaću 4000 kn?

### Rješenje:

Takov način prikazivanja podataka u obliku kružnih isječaka kao dijelova kruga naziva se

kružnim dijagramom. Iz njega je lako očitati traženi podatak:  
Majina majka mjesечно troši na odjeću 15% svoje plaće. Izračunamo li 15% od 4000 kn, dobit ćemo

$$15\% \cdot 4000 = \frac{15}{100} \cdot 4000 = 600 \text{ kn. Majina majka na odjeću mjesечно potroši 600 kn.}$$

kružni  
dijagram

Kružni dijagram prikazuje odnos dijelova neke cjeline prema toj cjelini, a izražava se u postocima (%). On uvijek pokazuje samo jedan skup podataka i koristan je kada želimo naglasiti neki dio cjeline. Obično za ovu vrstu dijagrama ne koristimo više od šest do deset podataka jer ga je inače teško protumačiti.

## Primjer 6. Crtanje kružnog dijagrama

Maja je zapisala koliko vremena dnevno potroši na razne aktivnosti i obaveze. Pomozi joj izračunati koliki dio dana, u obliku postotka, potroši na pojedinu aktivnost. Dobivene podatke prikaži kružnim dijagramom.

Aktivnost	Broj sati	Dio dana
Jelo	1h	
Škola	8h	
Spavanje	9h	
Gledanje televizije	2h	
Ostalo	4h	
<b>Zbroj</b>	<b>24h</b>	

### Rješenje:

Najprije je potrebno izračunati pripadne postotke. Znamo da jedan dan ima 24 sata. Da bismo dobili koliki dio dana zauzima pojedina aktivnost, podijelit ćemo broj sati te aktivnosti s 24. Dobiveni količnik ćemo zatim zaokružiti na dvije decimale.

Maja na jelo potroši 1 sat dnevno, što je jedna dvadesetčetvrtina dana;  $1 : 24 \approx 0.04 = 4\%$ . Dakle Maja na jelo potroši 4% dana. Na isti način dobivamo i ostale postotke:

Aktivnost	Broj sati	Dio dana
Jelo	1h	4%
Škola	8h	33%
Spavanje	9h	38%
Gledanje televizije	2h	8%
Ostalo	4h	17%
<b>Zbroj</b>	<b>24h</b>	<b>100%</b>

Da bismo prikazali dobivene podatke, u kružnom dijagramu najprije moramo izračunati

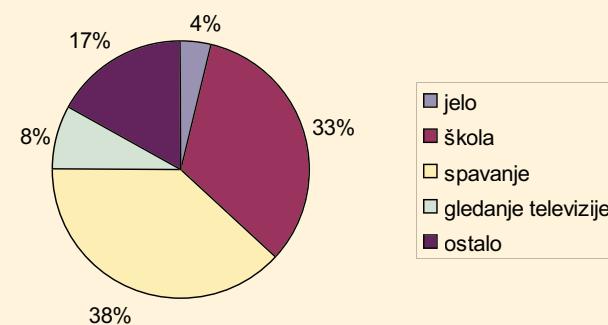
koliki dio kruga pripada pojedinom podatku. Puni krug ima  $360^\circ$  pa je za prikazivanje 1% potreban kut od  $0.01 \cdot 360^\circ = 3.6^\circ$ . Podatku od 2% kruga bit će pridružen kut od  $0.02 \cdot 360^\circ = 7.2^\circ$ . Dopunimo tablicu novim stupcem s veličinama pripadnih kutova:

	Broj sati	Dio dana	Kut
Jelo	1h	4%	$14.4^\circ$
Škola	8h	33%	$118.8^\circ$
Spavanje	9h	38%	$136.8^\circ$
Gledanje televizije	2h	8%	$28.8^\circ$
Ostalo	4h	17%	$61.2^\circ$
<b>Zbroj</b>	<b>24h</b>	<b>100%</b>	<b><math>360^\circ</math></b>

Korisno je provjeriti je li zbroj svih kutova jednak  $360^\circ$ . Vrhove svakoga kuta u kružnom dijagramu crtamo u središtu kruga. Najprije nacrtamo jedan kut pa na njegov krak docrtamo sljedeći kut i tako redom do pretposljednjeg. Posljednji kut već će biti ucrtan između krakova prvog i pretposljednjeg kuta.



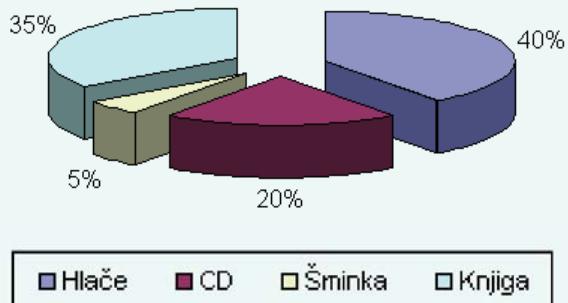
Rješenje zadatka glasi:



## Zadaci

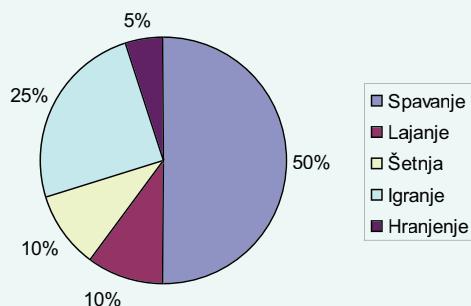
24. Prisjeti se jučerašnjeg dana i zapiši, poput Maje u Primjeru 6, koliko vremena dnevno potrošiš na određene aktivnosti. Prikaži te podatke kružnim dijagramom.

25. Pogledaj sliku i dopuni rečenice:



Ana je uštedjela 500 kn. Ona bi željela potrošiti \_\_\_\_\_ kn na hlače, \_\_\_\_\_ kn na CD, \_\_\_\_\_ kn na šminku i \_\_\_\_\_ kn na knjige.

26. Pogledaj kako Beni provodi dan i dopuni rečenice: Beni dnevno spava \_\_\_ h. U jednom danu laje ukupno \_\_\_ min. Dnevno šeće \_\_\_ min. Igra se \_\_\_ h.



27. 7.b razred birao je predsjednika razreda. Predloženi su bili Jan, Maja i Luka. Evo kako je razred glasovao:

Učenik	Postotak
Jan	35%
Maja	45%
Luka	20%

a) Tko je postao predsjednik razreda? Tko je zamjenik?

b) Nacrtaj kružni dijagram s podacima o glasovanju.



c) U razredu je 20 učenika. Koliko je glasova dobio Jan, koliko Maja, a koliko Luka?

28. U tablici se nalaze podaci o obrazovanosti stanovništva Republike Hrvatske prema popisu stanovništva iz 2001. godine:

- a) Izračunaj podatak iz tablice koji nedostaje;  
b) Što možeš reći o obrazovanosti u Hrvatskoj?

Stupanj obrazovanja	Postotak
Bez škole	3%
Nezavršena osnovna škola	16%
Završena osnovna škola	22%
Završena srednja škola	47%
Završen fakultet/viša škola	?

- c) Nacrtaj kružni i stupčasti dijagram o obrazovanosti stanovništva u RH;  
d) Koliko ima ljudi u svakoj skupini ako znamo da Hrvatska ima 4 437 460 stanovnika?

Grafičko prikazivanje podataka - uvježbaj rješavajući zadatke na računalu

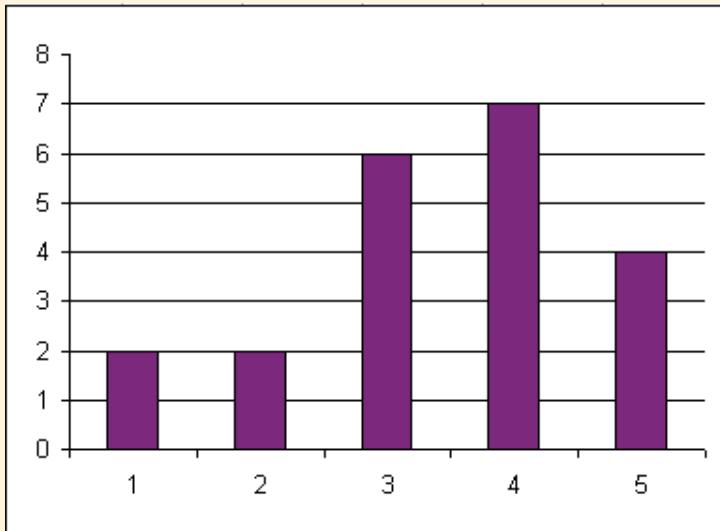


## 4.2 Analiza podataka

### Ocjene

Stupčasti dijagram na slici prikazuje ocjene koje su učenici 7.r dobili na ispitu znanja iz matematike. Pogledaj dijagram i odgovori na pitanja:

- Koje su različite ocjene učenici dobili na ovom ispitu?
- Koliko je učenika dobilo ocjenu 3?
- Koju je ocjenu dobilo najviše učenika?
- Kako bi izračunao prosječnu ocjenu toga razreda?



### Primjer 1. Obilježja

Statistički podaci često se pregledno prikazuju u tablicama. Pogledaj ovu tablicu i odgovori na pitanja.

Nacionalni park	Površina (ha)
Plitvička jezera	29 482
Paklenica	10 200
Risnjak	6 400
Mljet	5 480
Kornati	23 400
Brijuni	3 635
Krka	10 300
Sjeverni Velebit	10 900

- O čemu govore podaci u tablici?
- Koji je najveći nacionalni park u Hrvatskoj?
- Koji je najmanji nacionalni park u Hrvatskoj?
- Koja bismo još obilježja Nacionalnih parkovima u Hrvatskoj mogli prikupiti?

### Rješenje:

a) Podaci u tablici prikazuju površine nacionalnih parkova u Hrvatskoj. Kažemo da su nacionalni parkovi promatrani **skup objekata** u tom primjeru. Pritom su površine zapisane u hektarima ( $1 \text{ ha} = 100 \text{ m}^2$ ). Kažemo da je površina **obilježje** koje promatramo u tom primjeru.

Obilježja mogu biti prikazana brojevima ili nekim drugim nizom vrijednosti. **Brojčana su obilježja** primjerice: površina, visina, ocjena, broj bodova, broj cipela. **Nebrojčana su obilježja** primjerice: boja kose, mjesto stanovanja, boja cipela.

Svako obilježje određeno je skupom vrijednosti koja poprima. Skup vrijednosti za obilježje površina u našem su primjeru, prirodni brojevi. Skup vrijednosti za obilježje boja kose čine vrijednosti: smeđa, crna, crvena i plava.

## Primjer 2. Bacanje kockice

Luka i Maja su za domaću zadaću trebali bacati kockicu 20 puta i bilježiti koji su broj dobili.

Tablica prikazuje njihove rezultate.

Broj na kockici	Broj
1	2
2	4
3	5
4	3
5	2
6	4

- a) Je li kockica jednak broj puta pala na svaku stranu?
- b) Koliko je puta kockica pala tako da joj je na gornjoj strani bio vidljiv broj 3?
- c) Koliki je ukupan broj pojavljivanja svih brojeva na kockici?
- d) Nacrtaj stupčasti dijagram za prikupljene podatke.

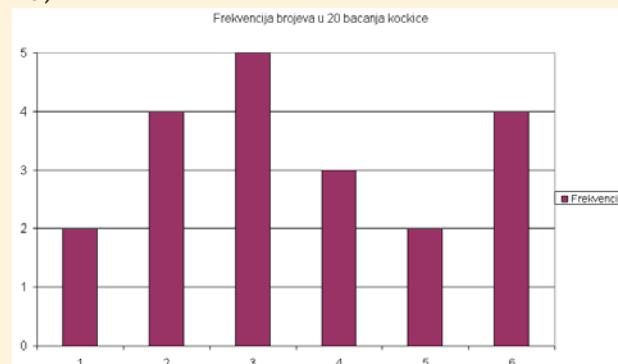
## Rješenje:

a) Nije. Neki su se brojevi pojavili više puta, a neki manje.

b) Traži se koliko se puta na kocki pojavio broj 3. Broj pojavljivanja naziva se **frekvencijom** ili **učestalošću**. Iz tablice vidimo da frekvencija broja 3 iznosi 5.

Tablica u kojoj su zapisane frekvencije, kao u ovom primjeru, često se naziva frekvencijska tablica.

c) Ukupan broj pojavljivanja, tj. zbroj svih frekvencija jednak je broju bacanja, a to je 20.  
d)



## Važno

Frekvencija ili učestalost neke vrijednosti jest broj koji nam kazuje koliko se puta ta vrijednost pojavila u nekom skupu.

## Primjer 3. Relativna frekvencija

Pogledaj tablicu iz primjera 2. Koliko se puta pojavio broj 3? Koliko je to u odnosu na ukupan broj bacanja? Dobivene podatke prikaži stupčastim dijagramom.

## Rješenje:

Ukupan broj bacanja kockice je 20. Od toga se broj 3 pojavio 5 puta, dakle njegova je frekvencija 5. Podijelimo li tu frekvenciju s ukupnim brojem bacanja, tj. s 20, dobit ćemo količnik  $5 : 20 = 0.25$ . Taj se broj naziva

**relativnom frekvencijom**.

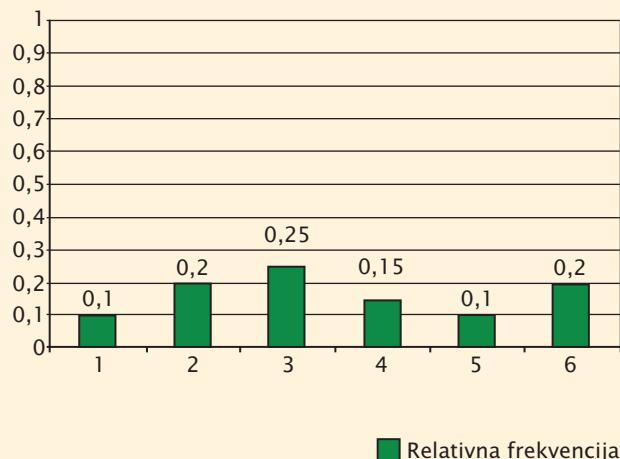
Relativne frekvencije računamo tako da svaku frekvenciju podijelimo s ukupnim brojem pojavljivanja.

Relativna frekvencija

Broj na kockici	Frekvencija	Relativna frekvencija
1	2	0.1
2	4	0.2
3	5	0.25
4	3	0.15
5	2	0.1
6	4	0.2



Relativna frekvencija brojeva u 20 bacanja kockice

**Važno**

Relativne frekvencije računamo tako da svaku frekvenciju podijelimo s ukupnim brojem pojavljivanja u nekom skupu. Zbroj svih relativnih frekvencija nekoga skupa uvijek mora biti 1.

Zbroji relativne frekvencije. Ako zbroj nije 1, onda si negdje pogriješio.



Relativna frekvencija uvijek je broj između 0 i 1 pa se često izražava i u obliku postotka. Zapišimo relativne frekvencije iz tablice u obliku postotka:

$$\begin{array}{ll} 0,1 = 10\%, & 0,2 = 20\%, \\ 0,25 = 25\%, & 0,15 = 15\%, \\ 0,1 = 10\%, & 0,2 = 20\%. \end{array}$$

Ukupan zbroj svih postotaka treba biti 100%.

HM, KOLIKO JE 0,2? JE LI TO 2% ILI 20%?

0,2 = 20%,  
0,02 = 2%  
SVE OSTALO  
MENI...



## Zadaci

1. Baci kockicu 20 puta i zabilježi rezultate u tablicu, kao u primjeru 2.
  - a) Nacrtaj stupčasti dijagram frekvencija;
  - b) Izračunaj relativne frekvencije i nacrtaj stupčasti dijagram za njih.
2. Luka i Matija dobili su zadatak organizirati nabavu cipela za trgovinu cipelama. Matija je predložio da nabave po jedan par cipela od svakoga broja. No Luka se s tim nije složio. Lukin je argument bio "Ne prodaju se svi brojevi cipela jednak." Slažeš li se s Lukom ili s Matijom?
 

Koje bi brojeve cipela trebalo nabaviti za učenike tvoga razreda? Treba li od svakoga broja jedan par ili se neki brojevi cipela češće pojavljuju? Ako treba, koji su brojevi cipela najčešći u tvojem razredu?  
Nacrtaj pripadni dijagram relativnih frekvencija.
3. Završne ocjene 7.b razreda na kraju prvoga polugodišta iz matematike su: 2, 4, 5, 2, 1, 3, 3, 4, 5, 5, 5, 3, 4, 3, 3, 4, 2, 2, 4, 3, 3, 5, 2, 3, 3, 4, 3, 4, 2.  
 a) Nacrtaj stupčasti dijagram frekvencija;
- b) Izračunaj relativne frekvencije i nacrtaj stupčasti dijagram za njih;
- c) Zapiši relativne frekvencije u obliku postotka;
4. 15 učenika natječe se u skoku u dalj. Rezultati su im sljedeći: 4.1 m, 4.6 m, 4.5 m, 4.5 m, 4 m, 4.7 m, 4.6 m, 4.4 m, 4.5 m, 4.7 m, 4.6 m, 4.6 m, 4.4 m, 4 m, 4.9 m i 4.6 m.
  - a) Nacrtaj stupčasti dijagram frekvencija;
  - b) Izračunaj relativne frekvencije i nacrtaj stupčasti dijagram za njih;
  - c) Koliko je učenika dobilo prvu nagradu, koliko drugu, a koliko treću?
5. Matija stoji na Trgu bana Josipa Jelačića i prati prolazak tramvaja u smjeru Illice. Sve bilježi u blokic, a ti napravi stupčasti dijagram frekvencija i relativnih frekvencija. Stajao je ondje dva sata i zabilježio sljedeće brojeve tramvajskih linija ovim redom: 11, 12, 1, 11, 6, 17, 14, 6, 13, 1, 13, 14, 11, 1, 17, 12, 6, 14, 17, 13, 1, 11, 13, 14, 11, 12, 6, 17, 11, 12, 1, 14, 13. Zapiši relativne frekvencije iz tablice u obliku postotka.

### Primjer 4. Aritmetička sredina

Luka je u prvom polugodištu dobio ove ocjene iz informatike: 5, 2, 4, 3, 4, 5, 4, 3. Učiteljica ga je zamolila da izračuna aritmetičku sredinu tih ocjena. Možeš li pomoći Luki u računanju?

aritmetička  
sredina  
 $\bar{x}$  "iks potez"

#### Rješenje:

Maja se dosjetila da je aritmetička sredina isto što i prosjek, a oni su već odavno naučili računati prosjek ocjena. Dakle, aritmetičku sredinu dobivamo tako da zbrojimo sve brojeve i podijelimo ih s brojem koliko ih ima.

$$\bar{x} = \frac{5+2+4+3+4+5+4+3}{8} = \frac{30}{8} = 3.75.$$

Ima li Luka koju ocjenu jednaku aritmetičkoj sredini?

Nema. Aritmetička sredina može, ali ne mora biti jednaka niti jednom od zadanih podataka. No aritmetička sredina uvijek je između najmanje i najveće vrijednosti promatranih podataka.

#### Važno

Aritmetička sredina niza brojčanih podataka broj je koji računamo tako da zbrojimo vrijednosti svih podataka, a zatim dobiveni zbroj podijelimo ukupnim brojem podataka. Aritmetičku sredinu označavamo sa  $\bar{x}$ , a često je nazivamo srednjom ili prosječnom vrijednošću.

## Primjer 5. Poplava

Prosječan vodostaj rijeke Mure u kolovozu 2005. bio je 258 cm.

Znajući da stanje izvanredne obrane od poplave nastupa kad vodostaj prijeđe 400 cm, razmisli, je li bilo poplave u dolini rijeke Mure u to vrijeme?

### Rješenje:

Prosječna vrijednost često nas može navesti na pogrešan zaključak. Gledajući samo prosječnu vrijednost vodostaja Mure, mogli bismo zaključiti da je vodostaj bio povišen, ali da nije bilo poplave.

Poplave je ipak bilo jer je 23. kolovoza. 2005.

u 15.00 sati vodostaj Mure bio 506 cm. Taj podatak nismo mogli razaznati iz prosječne vrijednosti.

Kompletne podatke o vodostaju Mure tijekom kolovoza 2005. možete naći na CD-u. Na CD-u je također i kratak tekst o rijeci Muri, njezinu položaju i značenju. Više o vodostajima riječkih možete saznati na stranicama Hrvatskih voda, <http://www.voda.hr/vodostaj.htm>.

Promatranje kompletnih podataka o, primjerice, vodostaju riječki tijekom nekoliko godina za svaki sat, svaki dan, svakog mjeseca bilo bi komplikirano. Zato se za sve usporedbe uzimaju prosječne vrijednosti u pojedinim mjesecima ili godinama.

## Zadaci

6. Tablica sadrži podatke o vodostajima hrvatskih rijeka 15. listopada 2003. Odgovori na pitanja:

a) Gdje je vodostaj najviši, a gdje najniži?

Rijeka	Vodostaj u cm
Sava Zagreb	- 107
Sava Županja	332
Drava Osijek	132
Drava Botovo	231
Kupa Karlovac	165
Una Kostajnica	146
Dunav Vukovar	189
Dunav Ilok	223
Korana Veljun	327

b) Ako se za izmjereni vodostaj od 400 cm proglašavaju izvanredne mjere obrane od poplave, ima li opasnosti od poplava na nekom području?

7. Srednja temperatura zraka u Kukljici 2003. godine (°C)

	Srednja temperatura zraka u Kukljici 2003. godine (°C)
I	7.9
II	11.8
III	13.9
IV	19.0
V	25.6
VI	29.4
VII	28.8
VIII	33.8
IX	24.5
X	22.0
XI	18.3
XII	14.4

- a) Izračunaj srednju temperaturu za tu godinu u Kukljicama.  
 b) U kojem je mjesecu temperatura najniža, u kojem najviša, a u kojem najbliža srednjoj?  
 c) Kolika je razlika u temperaturi između najtoplijeg i najhladnjeg mjeseca te godine?



8.

Temperatura mora u Kukljici 2003. godine (°C)	
I	10.9
II	10.8
III	11.3
IV	12.91
V	16.6
VI	20.4
VII	22.3
VIII	22.7
IX	21.0
X	18.0
XI	15.3
XII	12.3

- a) Izračunaj srednju temperaturu mora za tu godinu u Kukljici.  
 b) U kojem je mjesecu temperatura najniža, u kojem najviša, a u kojem najbliža srednjoj?  
 c) U kojim je mjesecima bilo moguće ugodno kupanje u moru?

9.

Prosječna visina padalina na Palagruži tijekom 2002. godine u mm	
I	24
II	20
III	31
IV	17
V	12
VI	10
VII	8
VIII	8
IX	20
X	15
XI	30
XII	44

Prosječna visina padalina u Gospiću tijekom 2002. godine u mm	
I	110
II	105
III	100
IV	116
V	114
VI	95
VII	82
VIII	100
IX	118
X	135
XI	170
XII	140

- a) Izračunaj prosječnu visinu padalina na Palagruži i u Gospiću.  
 b) Usporeди visine padalina i reci u kojem mjestu ima više padalina tijekom godine.  
 c) Koje bi mjesto moglo imati problema sa sušom?

10.

Grad	Temperatura zraka u °C
Atena	31
Beč	24
Bruxelles	28
Graz	23
London	17
Ljubljana	23
Pariz	20
Rim	29
Zagreb	27

- a) Kolika je prosječna temperatura zraka u Europi toga dana?  
 b) Gdje je najtoplije, a gdje najhladnije?  
 c) Koji ti podaci trebaju da bi mogao reći je li to uobičajena temperatura za taj datum na tom području?  
 11. Temperature zraka u °C u lipnju u jednom gradu mjerene u 13 sati su: 26, 29, 25, 27, 26, 28, 26, 29, 26, 28, 28, 28, 29, 27, 27, 27, 30, 29, 26, 26, 28, 28, 27, 29, 27, 30, 30, 30, 31.  
 a) Nacrtaj stupčasti dijagram frekvencija;  
 b) Izračunaj relativne frekvencije i nacrtaj stupčasti dijagram za njih;  
 c) Izračunaj srednju temperaturu.

12. U Majinoj kući stanuju ona, njezini roditelji, brat, sestra, baka i teta. Tati se učinilo da stalno zvoni telefon pa je odlučio vidjeti koga najviše zovu. Pratio je tjedan dana što se događa, a ti njegove podatke zapiši u tablicu, napravi dijagram frekvencija i relativnih frekvencija te zapiši relativne frekvencije u obliku postotka.

Evo njegovih podataka:

Maja, Maja, baka, teta, brat, brat, sestra, mama, Maja, tata, Maja, Maja, sestra, brat, mama, baka, Maja, sestra, teta, baka, Maja, brat, sestra, Maja, baka, teta, mama, mama, tata, Maja, brat, mama, Maja, Maja, teta, tata, mama, Maja, brat, brat, Maja, teta, Maja, mama, mama, teta, brat, Maja.

13. Prikaži duljine staza na Bjelolasici stupčastim dijagramom, a zatim izračunaj koliko je vremena potrebno za obilazak triju najduljih staza ako za 1 km prosječno treba 12 min hoda.



14. Na predsjedničkim izborima u nekoj državi bilo je 11 kandidata. Na izbore je izšlo 72% birača od ukupno 3 500 000 birača. U prvom je krugu kandidat  $A_1$  imao 529 200 glasova,  $A_2$  327 600,  $A_3$  5% glasova,  $A_4$  55 440,  $A_5$  78 120,  $A_6$  2%,  $A_7$  3%,  $A_8$  294 840,  $A_9$  9.8%,  $A_{10}$  19.8%, a  $A_{11}$  preostale glasove.

Najprije sve podatke prikaži u obliku postotka, a zatim napravi stupčasti dijagram te odgovori na pitanja. Ako u prvom krugu izbora niti jedan kandidat nema 50%+1 glasova, ide se u drugi krug, i to samo dvoje kandidata s najviše glasova. Hoće li u tom izboru biti drugoga kruga? Ako bude drugoga kruga, koji kandidati idu u njega?

15. Ocjene iz ispita znanja u 7a razredu u kojem ima 28 učenika su: jedinica je bilo približno 10.71%, dvojki 14.29%, trojki 35.71%, četvorki 25% i petica 14.29%. Napravi stupčasti dijagram frekvencija i relativnih frekvencija za te rezultate i izračunaj srednju ocjenu razreda.
16. 14 učenica natječe se u skoku uvis. Rezultati su im sljedeći: 1.5 m, 1.3 m, 1.3 m, 1.4 m, 1.7 m, 1.4 m, 1.3 m, 1.2 m, 1.4 m, 1.5 m, 1.6 m, 1.5 m, 1.4 m i 1.4 m .
- Nacrtaj stupčasti dijagram frekvencija;
  - Izračunaj relativne frekvencije i nacrtaj stupčasti dijagram za njih;
  - Prikaži relativne frekvencije u obliku postotka;
  - Koliko je učenika dobilo prvu nagradu, koliko drugu, a koliko treću?
  - Znaš li koji je hrvatski rekord u skoku uvis za žene i tko ga je postigao?

Analizu podataka uvježbaj rješavajući zadatke na računalu



### Primjer 6. Grupiranje podataka

Luka i Maja izmjerili su visinu učenika svojega razreda i dobili ove podatke, u centimetrima: 156, 164, 170, 147, 135, 149, 160, 172, 161, 169, 153, 155, 164, 168, 169, 152, 147, 158, 153, 139.

- Prikaži podatke o visini dijagramom frekvencija;
- Izračunaj relativne frekvencije i nacrtaj dijagram relativnih frekvencija.

### Rješenje:

a) Niz podataka o visini učenika prevelik je da svaki broj posebno zapisujemo u tablicu, a i frekvencija većine brojeva je 1. Da bismo pojednostavili prikaz, podatke razvrstavamo u nekoliko grupa. Kažemo da podatke grupiramo **u razrede**.

Razred
130 – 139
140 – 149
150 – 159
160 – 169
170 – 179



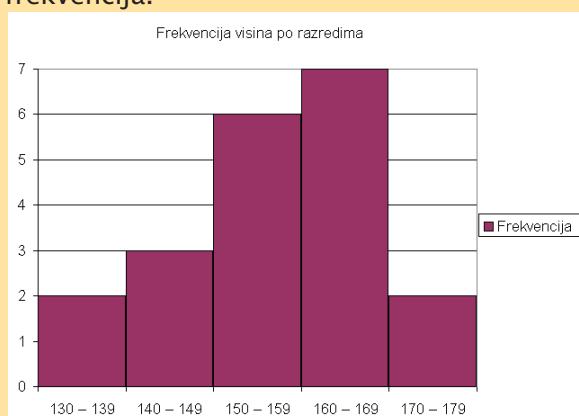


Najmanja je vrijednost koja se pojavljuje u ovom skupu podataka 135 cm, a najveća 172 cm. Za grupiranje podataka u razrede potrebno je odrediti pet do deset razreda. Razrede biramo tako da pojedini podatak možemo staviti samo u jedan razred. Za prikaz podataka o visini odabrat ćemo ove razrede: 130 – 139, 140 – 149, 150 – 159, 160 – 169, 170 – 179.

Prebrojimo koliko podataka ima u pojedinom razredu. Najjednostavnije je da čitamo podatke redom i crticama bilježimo pojedini podatak:

Razred	Frekvencija
130 – 139	= 2
140 – 149	= 3
150 – 159	= 6
160 – 169	= 7
170 – 179	= 2

Sada je jednostavno nacrtati dijagram frekvencija.

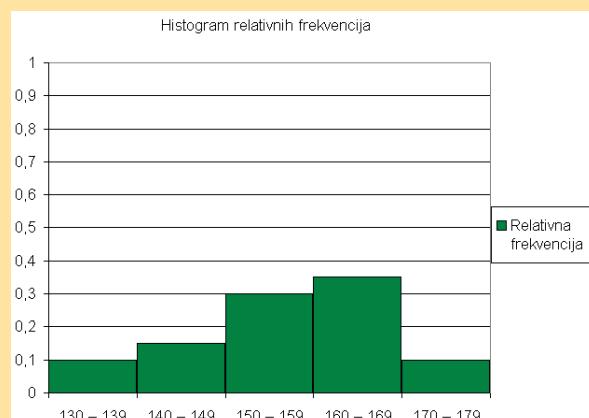


Histogram na osi apscisa ima prikazane razrede, a ne pojedinačne vrijednosti. Pri crtanju histograma važno je paziti na širine pojedinih razreda. Ako te širine nisu jednake, onda određenu frekvenciju prikazujemo površinom nacrtanog pravokutnika, a ne visinom kao kod stupčastog dijagrama. U našem primjeru širine svih razreda jednake su pa su frekvencije proporcionalne i površini i visini pripadnog pravokutnika.

b) Relativne frekvencije računamo tako da svaku frekvenciju podijelimo s ukupnim brojem pojavljivanja.

Dakle u našem primjeru moramo svaku frekvenciju podijeliti s 20 jer imamo ukupno 20 podataka o visini.

Razred	Frekvencija	Relativna frekvencija
130 – 139	2	0.1
140 – 149	3	0.15
150 – 159	6	0.3
160 – 169	7	0.35
170 – 179	2	0.1



Stupčasti dijagram koji smo nacrtali u tom primjeru naziva se **histogram**.

## Zadaci



17. Napravi postupak kao u prethodnom primjeru za svoj razred.
18. Tablica prikazuje vodostaje Mure za tri dana.

	20. 8. 2005.	21. 8. 2005	22. 8. 2005
2.00	222	216	355
4.00	224	231	364
6.00	219	232	368
8.00	223	232	374
10.00	222	239	380
12.00	221	245	381
14.00	218	248	385
16.00	216	259	388
18.00	214	288	393
20.00	213	321	399
22.00	214	339	409

- a) Razvrstaj dane podatke u prikladne razrede;
- b) Nacrtaj histogram frekvencija;
- c) Nacrtaj histogram relativnih frekvencija;
- d) Izračunaj aritmetičku sredinu danih podataka.
19. Napravi histogram frekvencija i relativnih frekvencija za podatke o temperaturama zraka u °C u siječnju: -6, -9, -5, -7, -6, -8, -6, -9, -6, -8, -8, -8, -9, -7, -7, -7, -6, -7, -8, -6, -5, -5, -3, -4, -4, -3, 0, 0, 1, 1. Relativne frekvencije zapiši u obliku postotka.
20. Napravi histogram frekvencija i relativnih frekvencija za rezultate ispita znanja u razredu s 30 učenika i postignutim bodovima: 11, 10, 0, 2, 27, 26, 24, 26, 12, 13, 14, 11, 2, 27, 25, 18, 17, 16, 20, 14, 27, 26, 20, 19, 18, 19, 15, 13, 20, 20.
- a) Izračunaj aritmetičku sredinu tih podataka;
- b) Pokušaj napraviti skalu ocjena ako je najveći broj bodova 27;
- c) Izračunaj postotak rješenosti ispita.

21. Napravi histogram frekvencija i relativnih frekvencija za broj stanovnika najvećih gradova svijeta.

Grad	Broj stanovnika
Moskva	13 100 000
Pariz	9 800 000
London	6 500 000
Tokio	27 000 000
Osaka	16 450 000
Seoul	15 900 000
Kalkuta	11 100 000
Džakarta	10 000 000
Sydney	3 600 000
Melbourne	3 000 000
New York	18 100 000
Mexico City	16 000 000
Los Angeles	14 500 000
Sao Paulo	15 175 000
Buenos Aires	10 750 000
Rio de Janeiro	10 150 000
Kairo	9 300 000
Lagos	3 800 000
Johanesburg	3 650 000

- a) Znaš li koliko stanovnika ima Zagreb? U kojoj bi grupi on bio?
- b) A grad u kojem ti živiš? Koliko je to manje od grada s najviše stanovnika iz ovog zadatka? Koliko je to posto od broja stanovnika toga grada?
- c) Mora li veličina grada biti proporcionalna broju stanovnika? Možemo li onda zaključiti koji od tih gradova ima najveću površinu? Istraži koji grad ima najveću površinu.
- d) Pronađi te gradove na zemljopisnoj karti.
22. Na sistematskom pregledu učenika sedmog razreda zabilježeni su ovi podaci o težini u kg: 42, 65, 45, 57, 55, 65, 68, 56, 47, 60, 58, 59, 57, 49, 49, 57, 55, 61, 56, 69, 58, 60, 57, 54, 57, 55.
- a) razvrstaj podatke u prikladne razrede;
- b) nacrtaj histogram frekvencija
- c) izračunaj relativne frekvencije i zapiši ih u obliku postotka.



23. Cijene izleta na kraju školske godine za razredne odjele neke škole za razne destinacije su  
1.a 125 kn, 1.b 145 kn, 1.c 130 kn, 2.a 130 kn,  
2.b 155 kn, 2.c 160 kn, 3.a 140 kn, 3.b 105 kn,  
3.c 100 kn, 4.a 115 kn, 4.b 135 kn, 4.c 140 kn,  
5.a 115 kn, 5.b 165 kn, 5.c 120 kn, 6.a 95 kn,  
6.b 115 kn, 6.c 115 kn, 7.a 120 kn, 7.b 100 kn,  
7.c 150 kn, 8.a 150 kn, 8.b 145 kn i 8.c 145 kn.

- a) Koji je dijagram najbolje nacrtati za te podatke da bismo ih najjednostavnije usporedili?  
b) Nacrtaj taj dijagram.  
c) Istraži cijene izleta u tvojoj školi. Napravi plakat s odgovarajućim stupčastim dijagramom i analizom podataka.

## 4.3 Vjerojatnost slučajnog događaja

### Zabavni park

Luka i Maja nalaze se u zabavnom parku. Luka želi ići na vožnju autićima, a Maja na vrtuljak. Dogovorili su se da će bacati novčić da bi odlučili kamo će ići. Ako se novčić okreće tako da je na gornjoj strani glava, ići će na vožnju autićem, a ako na gornjoj strani bude pismo, ići će na vrtuljak.

Što misliš, kamo su otišli Luka i Maja? Pokušaj i ti baciti novčić da vidiš koju bi zabavu odabrao.

Pismo



Glava



Pri bacanju novčića postoje dvije mogućnosti:

- novčić će pasti tako da je gore strana s brojem – kažemo da je palo pismo;
- novčić će pasti tako da je gore strana sa slikom – kažemo da je pala glava.

Kažemo da su moguća dva **elementarna događaja** {pismo, glava}. Bacanje novčića primjer je jednog matematičkog pokusa. U tom pokusu može pasti glava – to je jedan **slučajni događaj**. Slučajni su događaji oni koji se mogu pojaviti kao ishod nekoga pokusa.

elementaran  
događaj

**Primjer 1.****Koja strana novčića češće pada**

Luka i Maja ponavljali su bacanje novčića 25 puta. Željeli su saznati koja strana novčića češće pada – tj. je li veća vjerojatnost da će pasti pismo ili glava. Luka je rekao da pokus trebaju ponoviti više puta da bi saznali koji događaj ima veću vjerojatnost. Pokus su ponovili najprije 25 puta, a zatim 50 i 100 puta.

Evo rezultata koje su dobili, P – pismo, G – glava:

Broj bacanja	Rezultati
25	P,P,P,G,P,P,G,P,P,G,G,G,P,P,G,P,P, P,G,P,G,G,G,G,P
50	G,G,P,P,G,G,P,G,G,P,P,G,P,P,P,G,G, G,P,P,P,G,G,P,P,P,P,G,G,P,G,G,P,P,G, G,P,P,P,G,G,P,P,G,G,P,G,P,G,G,G,G
100	G,G,P,G,P,G,G,G,P,G,P,G,G,P,G,P,G, ,P,G,P,P,G,P,P,P,P,G,P,G,P,G,G,G,P ,G,P,P,G,P,G,G,P,G,G,G,G,G,G,P,G, G,P,P,G,P,G,G,G,P,P,G,P,G,G,G,P,P, G,P,P,G,G,P,G,P,P,P,P,G,G,G,G,G,P, G,G,G,P,G,G,G,G,P,P,G,G,G,G,G,P,P

- a) Napravi tablicu frekvencija i relativnih frekvencija;
- b) Izrazi relativne frekvencije u obliku postotka;
- c) Koja strana novčića češće pada?

**Rješenje:**

a) Za 25 bacanja tablica frekvencija izgleda ovako:

Elementaran događaj	Frekvencija	Relativna frekvencija
Pismo – P	14	0.56
Glava – G	11	0.44

Da bi izračunao relativnu frekvenciju trebaš frekvenciju podijeliti sa ukupnim brojem



Za 50 bacanja tablica frekvencija izgleda ovako:

Elementaran događaj	Frekvencija	Relativna frekvencija
Pismo – P	23	0.46
Glava – G	27	0.54

Za 100 bacanja tablica frekvencija izgleda ovako:

Elementaran događaj	Frekvencija	Relativna frekvencija
Pismo – P	23	0.46
Glava – G	27	0.54

b)

Broj bacanja	Relativna frekvencija za pismo	Relativna frekvencija za glavu
25	0.56 = 56%	0.44 = 44%
50	0.46 = 46%	0.54 = 54%
100	0.42 = 42%	0.58 = 58%

c) U 25 bacanja više je puta palo pismo, u 50 bacanja više je puta pala glava, također i u 100 bacanja. No primjećujemo da je broj padanja pisma i glave približno jednak. Relativne frekvencije u sva su tri primjera blizu 0.5, tj. oko 50%. Kažemo da je vjerojatnost da padne pismo jednaka 0.5 ili 50%. Zaključujemo da obje strane novčića jednako često padaju.

Kad bismo novčić bacali jako puno puta, uvjerili bismo se u tu tvrdnju. Slijedeći ta eksperimentalna saznanja, matematičari su došli i do formula po kojima se može računati vjerojatnost pojedinih događaja bez pokusa s velikim brojem ponavljanja.

Matematičko objašnjenje pokusa s novčićem bilo bi ovakvo. U tom pokusu ukupno su moguća dva elementarna događaja {pismo, glava}. Zanima nas vjerojatnost jednog od tih događaja, primjerice, vjerojatnost da padne pismo. Označimo tu vjerojatnost sa  $p$  (pismo).

Od dva moguća događaja samo jedan smatramo bacanje novčića povoljnijim za vjerojatnost koju računamo – da padne pismo.

$$P(\text{pismo}) = \frac{\text{broj povoljnih elementarnih događaja}}{\text{ukupan broj elementarnih događaja}} = \frac{1}{2} = 0.5.$$

Naravno, vjerojatnost da padne glava također je jednaka 0.5;

$$P(\text{glava}) = \frac{1}{2} = 0.5.$$

Vjerojatnost da novčić padne na jednu odabrano od dvije moguće strane je  $\frac{1}{2}$ .

### Važno

Vjerojatnost nekog događaja A računamo kao omjer broja povoljnih i svih elementarnih događaja.

Vjerojatnost označavamo sa  $P$ . Vjerojatnost je uvijek broj između 0 i 1.

$$P(A) = \frac{\text{broj povoljnih elementarnih događaja}}{\text{ukupan broj elementarnih događaja}}$$



Vjerojatnost bacanja novčića za veći broj bacanja možete provjeriti računalnom simulacijom u kojoj računalo ispisuje rezultate za odabrani broj bacanja.

Jedan događaj može obuhvaćati više elementarnih događaja. Promatramo li pokus bacanje kockice i događaj "Pao je paran broj". Taj događaj obuhvaća elementarne događaje "Pao je broj 2", "Pao je broj 4" i "Pao je broj 6" jer su to jedina tri parna broja koja se pojavljuju na kockici.

## Zadaci

- Odigrajte igru bacanja novčića s prijateljima. Jedan dobiva bod ako padne glava, a drugi ako padne

pismo. Bilježite rezultate u tablicu. Tko je sakupio više bodova?

## Primjer 2. Bacanje kockice



Uzmite jednu kockicu za igru "Čovječe ne ljuti se". Dobro je promotrite sa svih strana.

Pri bacanju kockice promatramo broj koji se pojavljuje na njezinoj gornjoj strani. Često kažemo "pao je broj 6".

Kolika je vjerojatnost da će na gornjoj strani kockice biti broj 6?

### Rješenje:

Luka i Maja odlučili su riješiti taj problem izvođenjem pokusa. Pri bacanju kockice može se pojaviti šest elementarnih događaja: {pao je broj 1, pao je broj 2, pao je broj 3, pao je broj 4, pao je broj 5, pao je broj 6}. Bacali su kockicu 60 puta i evo što su dobili.

Elementaran događaj	Frekvencija
pao je broj 1	9
pao je broj 2	10
pao je broj 3	12
pao je broj 4	8
pao je broj 5	10
pao je broj 6	11

Da bismo odredili vjerojatnost, izračunat ćemo i relativne frekvencije svih događaja. Njih ćemo dobiti tako da frekvencije podijelimo sa 60 jer je ukupno bilo 60 bacanja. Pritom beskonačne decimalne brojeve zaokružujemo na dvije decimale.

Elementaran događaj	Frekvencija	Relativna frekvencija
pao je broj 1	9	0.15
pao je broj 2	10	0.17
pao je broj 3	12	0.2
pao je broj 4	8	0.13
pao je broj 5	10	0.17
pao je broj 6	11	0.18

Iz pokusa zaključujemo da vjerojatnost događaja "pao je broj 6" iznosi 0.18.

Odredimo tu vjerojatnost matematičkim putem.

Pri bacanju kockice pojavljuje se ukupno 6 elementarnih događaja.

bacanje  
kockice

Nama odgovara samo jedan od njih (pao je broj 6), dakle broj povoljnih elementarnih događaja je 1.

$$P(\text{pao je broj } 6) = \frac{\text{broj povoljnih elementarnih događaja}}{\text{ukupan broj elementarnih događaja}} = \frac{1}{6} = 0.16666\ldots \approx 0.17.$$

Primjećujemo da su rezultati pokusa dali približno jednake rezultate. Rezultati izvedenog pokusa rijetko će biti posve jednak matematički izračunatoj vjerojatnosti, no za veliki broj ponavljanja pokusa relativna frekvencija biti će približno jednaka izračunatoj vjerojatnosti.

Naravno, vjerojatnost pojavljivanja petice je također  $\frac{1}{6}$ .



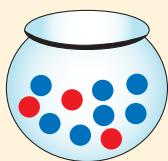
Vjerojatnost da će na gornjoj strani kockice biti jedan odabrani broj od šest mogućih brojeva je  $\frac{1}{6}$ .

## Zadaci

- Odigrajte igru bacanja kockice s prijateljima. Svaki neka odabere jedan broj s kockice. Svaki dobiva bod kad na kockici padne njegov broj. Ako ne

padne nijedan od odabranih brojeva, nitko ne dobiva bod. Bilježite rezultate u tablicu. Tko je sakupio više bodova?

### Primjer 3. Izvlačenje kuglice



U posudi se nalazi deset kuglica. Tri su kuglice crvene, a sedam ih je plavih. Matija, ne gledajući, izvlači jednu kuglicu iz posude.

- Što misliš, jesu li veće šanse da Matija izvuče plavu ili crvenu kuglicu?
- Kolika je vjerojatnost da se izvuče jedna plava kuglica?
- Kolika je vjerojatnost da se izvuče jedna crvena kuglica?

#### Rješenje:

- Razmisli, je li broj plavih i crvenih kuglica u posudi jednak?

Nije. Više je plavih kuglica, dakle veće su šanse da Matija izvuče plavu kuglicu.

- U posudi se nalazi deset kuglica pa je ukupno moguće 10 elementarnih događaja. U posudi se nalazi sedam plavih kuglica koje sve izgledaju jednako. Dakle postoji sedam mogućnosti da izvučemo jednu plavu kuglicu.

$$P(\text{plava}) = \frac{\text{broj povoljnih elementarnih događaja}}{\text{ukupan broj elementarnih događaja}} = \frac{7}{10} = 0.7.$$

### Primjer 4. Je li igra fer

fer  
igra

U posudi se nalazi deset kuglica. Tri su kuglice crvene, a sedam ih je plavih. Luka i Matija igraju igru izvlačeći i vraćajući kuglice u posudu. Matija pobijeđuje ako je izvučena crvena kuglica, a Luka ako je izvučena plava kuglica.

- Što misliš, tko će pobijediti?
- Imaju li Luka i Matija jednake šanse da pobijede?
- Je li ta igra fer?

Kažemo da je vjerojatnost izvlačenja plave kuglice 0.7 ili 70%.

- Za izvlačenje crvene kuglice postoje 3 mogućnosti od ukupno 10.

$$P(\text{crvena}) = \frac{\text{broj povoljnih elementarnih događaja}}{\text{ukupan broj elementarnih događaja}} = \frac{3}{10} = 0.3.$$

Kažemo da je vjerojatnost izvlačenja crvene kuglice 0.3 ili 30%.

Zbroj vjerojatnosti svih pojedinih elementarnih događaja mora biti 1, ili u obliku postotka 100%



U takvim pokusima s kuglicama moguće su dvije inačice: u jednoj izvučene kuglice vraćamo natrag u posudu, a u drugoj ne. Zasad ćemo promatrati samo pokuse u kojima kuglice uvijek vraćamo natrag u posudu. Dakle u posudi se uvijek nalazi jednak broj kuglica.

#### Rješenje:

- Odigraj tu igru s prijateljima.
  - Nemaju. U posudi je više plavih kuglica, pa Luka ima veće šanse za pobjedu. Pogledaj vjerojatnosti koje smo izračunali u prethodnom primjeru.
  - Nije, jer Luka i Matija nemaju jednake šanse za pobjedu. Lukine su šanse za pobjedu 70%, a Matijine samo 30%.
- Igra bi bila fer kada bi u posudi bio jednak broj kuglica svake boje, tj. 5 plavih i 5 crvenih kuglica. Tada bi i Luka i Matija imali 50% šanse za pobjedu.

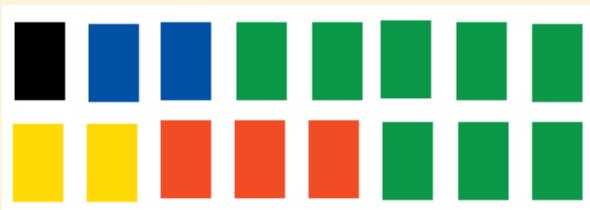
## Zadaci

3. Odigrajte igru izvlačenja kuglice s prijateljima.  
Bilježite rezultate u tablicu.

Tko je češće pobjeđivao?

### Primjer 5. Izvlačenje obojene karte

Ana i Maja imaju 16 karata različitih boja. Jedna je karta crna, dvije su karte plave, osam je karata zelene boje, tri su crvene i dvije žute. Iz špila se, bez gledanja, izvlači jedna karta i nakon toga vraća se natrag.



- Koliko ima elementarnih događaja?
- Kolika je vjerojatnost da je izvučena karta crna?
- Kolika je vjerojatnost da je izvučena karta plava?
- Kolika je vjerojatnost da je izvučena karta zelena?
- Kolika je vjerojatnost da je izvučena karta crvena?
- Kolika je vjerojatnost da je izvučena karta žuta?
- Kako bi tim kartama Ana i Maja mogle igrati fer igru?

### Rješenja:

- Budući da od 16 karata izvlačimo jednu, ukupan broj elementarnih događaja je 16.
- U špilu postoji samo jedna crna karta, dakle broj povoljnih događaja je 1.

$$P(\text{crna}) = \frac{1}{16}.$$

- c) U špilu postoje dvije plave karte, dakle broj povoljnih događaja je 2.

$$P(\text{plava}) = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}.$$

Razlomak smo skratili s dva.

- d) U špilu postoji osam zelenih karata, dakle broj povoljnih događaja je 8.

Razlomak smo skratili s osam.

$$P(\text{zelena}) = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}.$$

- e) U špilu postoje tri crvene karte, dakle broj povoljnih događaja je 3.

$$P(\text{crvena}) = \frac{3}{16}.$$

- f) U špilu postoje dvije žute karte, dakle broj povoljnih događaja je 2.

Razlomak smo skratili s dva.

$$P(\text{žuta}) = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}.$$

- g) Tako da Ana dobiva ako je izvučena karta zelene boje, a Maja ako je izvučena karta bilo koje druge boje. U tom bi slučaju svaka od njih imala 50% šanse za dobitak.

Boje se mogu podijeliti i obratno, Maji zelena, a Ani sve ostale.

## Zadaci

4. U posudi se nalaze 4 plave kuglice, 8 zelenih, 3 zlatne i 1 bijela. Ana i Luka igraju se tako da izvlače po jednu kuglicu i vraćaju je natrag u kutiju. Svaka boja nosi određeni broj bodova.

Koliko ima elementarnih događaja?

Odredi vjerojatnost da je izvučena:

- a) plava kuglica;
- b) bijela kuglica;
- c) zelena kuglica;
- d) zlatna kuglica.

Što misliš, koja boja nosi najviše bodova, a koja najmanje?

Odigraj i ti sličnu igru s prijateljem.

5. U špilu karata nalaze se karte s likovima iz crtića. Tu su 4 karte s Mikijem Mausom, 4 karte s Paškom Patkom, 6 karata sa šegrptom Hlapićem, 8 karata s profesorom Baltazarom i 2 s Pinkom Pantherom. Djeca se igraju tako da jedno dijete izvuče kartu i vrati je natrag u špil.



- a) Koliko ima elementarnih događaja?
- b) Kolika je vjerojatnost da je izvučena karta sa slikom Paška Patka?
- c) Kolika je vjerojatnost da je izvučena karta sa slikom neke životinje iz crtića?
- d) Kolika je vjerojatnost da je izvučena karta sa slikom iz hrvatskog crtića?
- e) Kako bi tim kartama mogao igrati fer igru?

6. Ribič peca u jezeru u kojem ima 120 pastrva, 60 jegulja, 40 smuđeva, 150 šarana i 50 somova. On peca radi sporta i upecanu ribu vraća u jezero. Pri svakom pokušaju ulovi jednu ribu. Ribič je pravi sportaš i upecanu ribu vraća u jezero. Odredi vjerojatnost da upeca:

- a) jegulju;
- b) smuđa ili pastrvu;
- c) šarana, soma ili pastrvu;
- d) bilo koju od tih riba osim šarana.

7. U šeširu se nalazi jedanaest kuglica, označenih brojevima od 5 do 15. Igrači izvlače po jednu kuglicu i vraćaju je natrag u šešir.

- a) Kolika je vjerojatnost da je izvučeni parani broj?
  - b) Kolika je vjerojatnost da je izvučeni prosti broj?
  - c) Kolika je vjerojatnost da je izvučeni dvoznamenkasti broj?
  - d) Kolika je vjerojatnost da je izvučeni broj višekratnik broja 3?
  - e) Kolika je vjerojatnost da je izvučeni broj djelitelj broja 60?
8. Matija baca kockicu iz igre "Čovječe ne ljuti se".
- a) Kolika je vjerojatnost da je pao parni broj?
  - b) Kolika je vjerojatnost da je pao prosti broj?
  - c) Kolika je vjerojatnost da je pao djelitelj broja 6?
  - d) Kolika je vjerojatnost da je pao višekratnik broja 2?
  - e) Kolika je vjerojatnost da je pao djelitelj broja 8?

< "je manji"  
> "je veći"  
≤ "je manji ili jednak"  
≥ "je veći ili jednak"



9. Maja baca kockicu iz igre "Čovječe ne ljuti se".
- Kolika je vjerojatnost da je pao broj  $x$ , takav da je  $2 \leq x < 5$ ?
  - Kolika je vjerojatnost da je pao broj  $x$ , takav da je  $3 < x \leq 6$ ?
  - Kolika je vjerojatnost da je pao broj  $x$ , takav da je  $1 < x < 4$ ?
  - Kolika je vjerojatnost da je pao broj  $x$ , takav da je  $3 \leq x \leq 4$ ?

$x$  - prirodni broj

$2 < x < 4$  - to je broj 3

$2 \leq x < 4$  - to su brojevi 2 i 3

$2 < x \leq 4$  - to su brojevi 3 i 4

$2 \leq x \leq 4$  - to su brojevi 2, 3 i 4

10. U posudi se nalazi 200 kuglica. Od toga je 22% žutih, 37% bijelih, 19% crvenih, 20% plavih, a ostale su šarene. Igrač izvlači po jednu kuglicu i vraća ju natrag u posudu.
- Koliko ima pojedinih kuglica?
  - Kolika je vjerojatnost da je izvučena žuta kuglica?
  - Kolika je vjerojatnost da je izvučena bijela ili crvena kuglica?
  - Kolika je vjerojatnost da je izvučena jednobojava kuglica?
  - Postoji li kakva veza između izračunate vjerojatnosti i postotaka zadanih u zadatku?
11. Matija izvlači nagradni kupon u trgovini. Na 20% kupona nacrtano je voće, na 16% povrće, na 24% voćni sokovi, na 8% gazirani sokovi, a na preostalih 8 kupona je školski pribor.
- Koliko ima elementarnih događaja?
  - Koliko ima pojedinih kupona?
  - Kolika je vjerojatnost da Matija izvuče kupon sa školskim priborom?

- Kolika je vjerojatnost da izvuče kupon sa zdravom hranom ili zdravim pićem?
  - Kolika je vjerojatnost da izvuče kupon sa sokovima?
  - Postoji li kakva veza između izračunate vjerojatnosti i postotaka zadanih u zadatku?
12. Maja, Luka, Matija i Ana su natječu se u gađanju lukom i strijelom. Mete su im pločice raznih boja. 10% tih pločica je crveno, 40% je zeleno, 20% je plavo, a preostale su žute. Učenici gađaju nasumice, i nakon svakog pogotka strelica se vadi iz pločice, a pločica vraća na svoje mjesto.
- Kolika je vjerojatnost da učenik pogodi zelenu pločicu?
  - Kolika je vjerojatnost da učenik pogodi plavu pločicu?
  - Kolika je vjerojatnost da učenik pogodi crvenu pločicu?
  - Kolika je vjerojatnost da pogodi zelenu ili plavu pločicu?
  - Kolika je vjerojatnost da pogodi bilo koju pločicu osim žute?
  - Za igru na sreću možeš odabrati jednu od boja. Koju bi boju odabrao da vjerojatnost dobitka bude najveća?
13. U aparatu se nalazi puno loptica. Od toga je 15% žutih, 23% bijelih, 29% crvenih, 20% plavih, a ostale su šarene. Kad ubaciš novčić, dobiješ jednu lopticu.
- Kolika je vjerojatnost da ćeš dobiti žutu lopticu?
  - Kolika je vjerojatnost da ćeš dobiti plavu lopticu?
  - Kolika je vjerojatnost da ćeš dobiti jednoboju lopticu?
  - Kolika je vjerojatnost da ćeš dobiti šarenu lopticu?
  - Luka se kladio da će izvući bijelu lopticu, a Matija se kladio da će izvući crvenu. Tko ima veće šanse za pobjedu?

## Primjer 6.

### Izvlačenje karte sa slovom

Luka i Maja imaju deset karata sa slovima koja čine riječ matematika. Iz špila se, bez gledanja, izvlači po jedna karta i nakon toga vraća se natrag.



- Koliko ima elementarnih događaja?
- Kolika je vjerojatnost da je izvučena karta s brojem?
- Kolika je vjerojatnost da je izvučena karta sa slovom?
- Kolika je vjerojatnost da je izvučena karta sa slovom M?
- Kolika je vjerojatnost da je izvučena karta sa samoglasnikom?

Vjerojatnost  
0 i 1

### Rješenje:

- Budući da od 10 karata izvlačimo jednu, ukupan broj elementarnih događaja je 10.
- U tom špilu nema nijedne karte s brojem. Dakle broj povoljnih događaja je 0.

$$P(\text{broj}) = \frac{0}{10} = 0$$

Vjerojatnost toga događaja je 0. Taj se događaj ne može dogoditi, kažemo da je to nemoguć događaj.

- U tom špilu sve karte imaju slovo. Dakle, broj povoljnih događaja je 10.

$$P(\text{broj}) = \frac{10}{10} = 1$$

Vjerojatnost toga događaja je 1. Taj će se događaj sigurno dogoditi, kažemo da je to siguran događaj.

- U tom špilu postoje dvije karte sa slovom M.

$$P(M) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

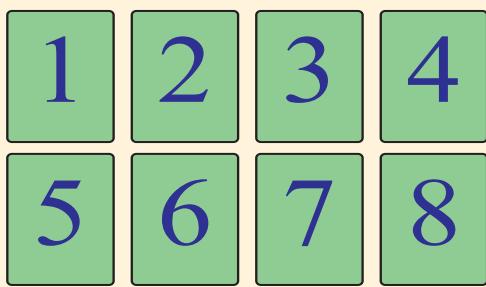
- Samoglasnici su slova: a, e, i, o, u. U špilu postoji pet karata sa samoglasnicima (A, E, A, I, A).

$$P(\text{samoglasnik}) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$



## Primjer 7. Kartice s brojevima

Matija i Luka igraju se špilom od osam karata. Na kartama su redom brojevi od 1 do 8. Iz špila se, bez gledanja, izvlači po jedna karta i nakon toga vraća se natrag.



- a) Kolika je vjerojatnost da je izvučena karta s parnim brojem?
- b) Kolika je vjerojatnost da je izvučena karta s brojem manjim od 6 ili jednakim 6?
- c) Kolika je vjerojatnost da je izvučen broj koji nije veći od 2?

## Rješenje:

- a) U špilu ima ukupno 8 karata. Četiri su karte s parnim brojevima: 2, 4, 6, 8.

$$P(\text{paran}) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

- b) Šest je karata s brojevima koji su manji od 6 ili jednaki 6: 1, 2, 3, 4, 5 i 6.

$$P(\text{manji ili jednak } 6) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}.$$

- c) Dvije su karte s brojevima koji nisu veći od 2: 1 i 2.

$$P(\text{nije veći od } 2) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

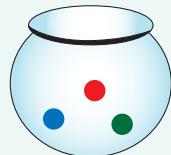
Rečenicu "broj koji nije veći od 2" možemo zapisati i ovako: "broj koji je manji od 2 ili jednak 2".

Igre karatama možete igrati i na računalu.



## Zadaci

14. U posudi se nalaze tri raznobojne neoznačene kuglice, crvena, zelena i plava. Iz posude se izvlači bez gledanja jedna kuglica.
- a) Kolika je vjerojatnost da je izvučena crvena kuglica?
  - b) Kolika je vjerojatnost da je izvučena crna kuglica?
  - c) Kolika je vjerojatnost da je izvučena obojena kuglica?
  - d) Kolika je vjerojatnost da je izvučena kuglica označena brojem?



15. Matija je na ljetovanju kod djeda u Dubrovniku. Djeda je zanimalo kako će Matija procijeniti vjerojatnost prognoze vremena za sutra. Zamisli da je danas je 31. srpnja, da je dan lijep i sunčan,

dan s temperaturom 32 °C. Pomozi Matiji odrediti vjerojatnost:

- a) da će sutra padati snijeg;
- b) da će sutra biti lijep sunčan dan;
- c) da će sutra temperatura biti oko 0 °C;
- d) da će sutra temperatura biti iznad 20°C.

16. 7. a razred je na "maturalcu" i danas ide na izlet brodom. U hotelu su im složili lunch-pakete koji su raznovrsni, ali svi su zapakirani u iste vrećice. Postoji 6 vrsta paketa:

- A: pohana piletina i naranča;
- B: vegetarijanski odrezak i banana;
- C: pečena teletina i jabuka;
- D: vegetarijanski odrezak i jabuka;
- E: pohana piletina i jabuka;
- F: pečena teletina i naranča.

Maja bira prva. Ona želi hamburger i sok.

- a) Kolika je vjerojatnost da će joj želja biti ispunjena?
  - b) Kolika je vjerojatnost da će dobiti paket sa zdravom hranom?
  - c) Kolika je vjerojatnost da će dobiti pohanu piletinu?
  - d) Kolika je vjerojatnost da će dobiti jabuku?
17. U posudi se nalazi 300 kuglica. Od toga je 25% žutih, 21% bijelih, 31% crvenih, 20% plavih, a ostale su zelene. Igrač izvlači po jednu kuglicu i vraća ju natrag u posudu.
- a) Koliko ima pojedinih kuglica?
  - b) Kolika je vjerojatnost da je izvučena žuta kuglica?
  - c) Kolika je vjerojatnost da je izvučena bijela ili crvena kuglica?
  - d) Kolika je vjerojatnost da je izvučena jednobojava kuglica?
  - e) Kolika je vjerojatnost da je izvučena crna kuglica?



Prisjeti se da vjerojatnost možemo zapisati i u obliku postotka.

18. U šeširu se nalaze kartice s brojevima od 27 do 49. Igrači izvlače po jednu karticu i vraćaju je natrag u šešir.
- a) Koliko ima elementarnih događaja?
  - b) Kolika je vjerojatnost da je izvučeni broj prosti broj?
  - c) Kolika je vjerojatnost da je izvučeni broj manji od 40 ili jednak broju 40?
  - d) Kolika je vjerojatnost da je izvučeni broj višekratnik broja 7?
  - e) Kolika je vjerojatnost da je izvučeni broj neparni broj?
19. U kutiji se nalaze kuglice s brojevima od 31 do 61. Igrači izvlače po jedan broj i vraćaju ga natrag u kutiju.
- a) Kolika je vjerojatnost da je izvučeni broj neparni broj?
  - b) Kolika je vjerojatnost da je izvučeni prosti broj?
  - c) Kolika je vjerojatnost da je izvučeni broj manji od 30 ili jednak broju 30?
  - d) Kolika je vjerojatnost da je izvučeni broj višekratnik broja 1?

20. Luka baca kockicu iz igre "Čovječe ne ljuti se".
- a) Kolika je vjerojatnost da je pao dvoznamenasti broj?
  - b) Kolika je vjerojatnost da je pao broj manji od 6 ili jednak broju 6?
  - c) Kolika je vjerojatnost da je pao broj manji od 6?
  - d) Kolika je vjerojatnost da je pao broj  $x$ , takav da je  $2 \leq x \leq 4$ ?

21. U šiplu karata nalaze se karte s vozilima. Tu su 24 karte s avionima, 34 karte s automobilima, 16 karata s helikopterima, 8 karata s brodovima i 22 karte s vlakovima. Djeca se igraju tako da jedno dijete izvuče kartu i vrati je natrag u šipil.
- a) Koliko ima elementarnih događaja?
  - b) Kolika je vjerojatnost da je izvučena karta s biciklom?
  - c) Kolika je vjerojatnost da je izvučena karta s vozilom iz zračnog prometa?
  - d) Kolika je vjerojatnost da je izvučena karta s vozilom koje prometuje po Hrvatskoj?

22. Matija i Luka igraju se špilom od osam karata. Na kartama su redom brojevi od 1 do 8. Iz špila se, bez gledanja, izvlači po jedna karta i nakon toga vraća se natrag.
- a) Kolika je vjerojatnost da je izvučena karta s neparnim brojem?
  - b) Kolika je vjerojatnost da je izvučena karta s brojem većim od 3?
  - c) Kolika je vjerojatnost da je izvučen broj koji nije manji od 5?
  - d) Smisli fer igru koju bi Matija i Luka mogli igrati tim kartama.

23. Matija je rješavao test s ponuđenim odgovorima. Za pojedino pitanje ponuđeno je pet odgovora od kojih je samo jedan točan.

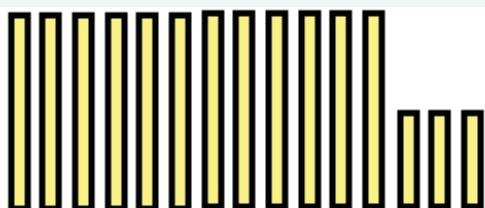
Matija, na žalost, nije učio i ne zna koji bi odgovor mogao biti točan. Kolika je vjerojatnost da će zaokružiti točan odgovor? Ima li Matija veće šanse za pogodak ako je ponuđeno više ili manje odgovora, a samo je jedan točan? Ima li Matija veće šanse da pogriješi ako je ponuđeno više ili manje odgovora, a samo je jedan točan?

- 24.** Ribič peca u čistom jezeru u kojem ima ukupno 500 riba. Od toga je 20% pastrva, 10% somova, 35% šarana, 15% smuđeva, i 20% ostalih riba. Izračunaj koliko ima pojedinih riba u tom jezeru. Odredi vjerojatnost da je ribič upecao:
- šarana;
  - pastrvu;
  - bilo koju ribu osim pastrve;
  - morskog psa.
- 25.** U špilu karata nalaze se karte sa sportašima. Tu je 10 karata s plivačima, 15 karata sa skijašima, 15 karata s nogometnima, 8 karata s tenisačima i 12 karata s rukometnima. Djeca se igraju tako da jedno dijete izvuče kartu i vrati je natrag u špil.
- Koliko ima elementarnih događaja?
  - Kolika je vjerojatnost da je izvučena karta sa zimskim sportašem?
  - Kolika je vjerojatnost da je izvučena karta s ekipnim sportašem?
  - Kolika je vjerojatnost da je izvučena karta s pojedinačnim sportašem?
  - Ana se kladila da će izvući kartu s nogometnima, a Maja se kladila da će izvući onu s plivačem. Koja ima veće šanse za pobjedu? Zašto?
- 26.** Škola je pripremila pakete s ručkom za izviđače. Postoji osam različitih paketa:
- Sendvič sa sirom i jabuka;
  - Sendvič sa salamom i banana;
  - Sendvič sa šunkom i naranča;
  - Sendvič s povrćem i jabuka;
  - Sendvič s piletinom i banana;
  - Sendvič sa salatom i naranča;
  - Sendvič sa salatom i jabuka;
  - Sendvič s piletinom i jabuka.
- Izviđač bez gledanja uzima jedan paket.
- Kolika je vjerojatnost da će dobiti sendvič sa šunkom i naranču?
  - Kolika je vjerojatnost da će dobiti sendvič sa šunkom i jabuku?
  - Kolika je vjerojatnost da će dobiti jabuku?
  - Kolika je vjerojatnost da će dobiti sendvič sa salatom?
- 27.** Ana baca kockicu iz igre "Čovječe ne ljuti se".
- Kolika je vjerojatnost da je pao broj manji od 4?
  - Kolika je vjerojatnost da je pao broj veći od 4 ili jednak 4?
- 28.** Na rođendanskom slavlju djeca izvlače nagradne paketiće. Svi paketići izgledaju jednako, ali im je sadržaj različit. 20 je paketića, u 5 su tempere, u 4 su drvene bojice, u 6 su jabuke, u 3 je čokolada i u preostala 2 karte za kino. Matija bira prvi.
- Kolika je vjerojatnost da će dobiti nešto od školskog pribora?
  - Kolika je vjerojatnost da će dobiti paketić s hranom?
  - Kolika je vjerojatnost da ćeći u kino?
- 29.** Luka je kupio na kiosku listić ekspres-lutrije i platio ga 4 kn. Na njemu piše da je tiskan u 1 000 000 listića, a fond dobitaka je sljedeći:
- |         | x |             |
|---------|---|-------------|
| 1       | x | 100 000 kn; |
| 4       | x | 5 000 kn;   |
| 8       | x | 3 000 kn;   |
| 80      | x | 1 000 kn;   |
| 400     | x | 100 kn;     |
| 400     | x | 80 kn;      |
| 400     | x | 60 kn;      |
| 10 000  | x | 28 kn;      |
| 10 000  | x | 12 kn;      |
| 30 000  | x | 8 kn;       |
| 260 000 | x | 4 kn.       |
- 
- 
- Ostale listići nisu dobitni. Odredi vjerojatnost:
- da je Luka kupio dobitni listić;
  - da nije dobio ništa;
  - da je dobio 60 ili 80 kn;
  - da je dobio 100 000 kn;
  - da je vratio svoje 4 kn.
- Što je najvjerojatnije?
- 

30. Matija i Luka igraju se špilom karata. Na kartama su redom brojevi od 19 do 26. Iz špila se, bez gledanja, izvlači po jedna karta i nakon toga vraća se natrag.

- a) Kolika je vjerojatnost da je izvučena karta s neparnim brojem?
  - b) Kolika je vjerojatnost da je izvučena karta s brojem većim od 30?
  - c) Kolika je vjerojatnost da je izvučen broj koji nije višekratnik broja 9?
  - d) Smisli fer igru koju bi Matija i Luka mogli igrati tim kartama.
31. Maja je na izletu s izviđačima. Poslije ručka dobili su sokove u jednakim neprozirnim čašama. Od 30 čaša 5 je napunjeno sokom od jabuke, 3 sokom od breskve, 6 sokom od marelice, 4 sokom od borovnice, 2 sokom od jagode i ostale sokom od naranče. Odredi vjerojatnost da Maja dobije:
- a) čašu gaziranog soka;
  - b) čašu voćnog soka;
  - c) čašu gustog soka;
  - d) čašu povrtnog soka.

32. Ti i tvoj prijatelj izvlačite slamčice, 15 je slamčica, od kojih su i 3 kraće. Kolika je vjerojatnost da izvučeš kraću? A da izvučeš dulju? Jesu li veće šanse za izvlačenje dulje ili kraće slamčice?



33. Ana i Maja slažu ogrlice od perlica koje se nalaze u zdjelicu. Imaju još mnogo perlica, a ne mogu se odlučiti koju bi boju i oblik izabrale. Odlučile su da će izvlačiti zatvorenih očiju. Perlice su ovih oblika i boja: ružičasta kuglica, srebrna kockica, zlatna perlica nepravilnog oblika, prozirna kuglica, crvena perlica nepravilnog oblika, srebrna perlica nepravilnog oblika, zlatna kuglica, crvena kockica i srebrna kuglica.

- a) Kolika je vjerojatnost da izvuku kuglicu?
- b) Kolika je vjerojatnost da izvuku srebrnu perlicu?
- 34. Luka ima špil karata sa slikama životinja. Na 5% slika su žirafe, na 15% su slonovi, na 20% su psi, na 12% su mačke, na 17% su papige, na 21% su konji, a na preostalima su orlovi. Igra se tako da jednu izvuče i onda ju vrati natrag.
- a) Kolika je vjerojatnost da Luka izvuče kartu s morskom životinjom?
- b) Kolika je vjerojatnost da izvuče kartu s domaćom životinjom?
- c) Kolika je vjerojatnost da je na karti ptica?

35. U posudi se nalazi 12 kuglica na kojima su napisana imena mjeseci u godini. Odredi vjerojatnost da je izvučena kuglica s imenom mjeseca koji:

- a) ima bar 30 dana;
- b) ima manje od 30 dana;
- c) ima 30 dana.

Vjerojatnost slučajnog događaja uvježbaj rješavajući zadatke na računalu



### Primjer 8. Karte s danima u tjednu

Maja i Matija igraju se špilom od sedam karata. Karte su označene danima u tjednu. Iz špila se, bez gledanja, izvlači po jedna karta i nakon toga vraća se natrag.

ponedjeljak	utorak	srijeda	četvrtak
petak	subota	nedjelja	

- a) Kolika je vjerojatnost da je izvučena karta na kojoj piše ponedjeljak?
- b) Kolika je vjerojatnost da je izvučena karta na kojoj ne piše ponedjeljak?

### Rješenje:

a) U špilu ima ukupno 7 karata. Postoji samo jedna karta na kojoj piše ponedjeljak.

$$P(\text{ponedeljak}) = \frac{1}{7}.$$



- b) U šipu ima šest karata na kojima ne piše ponedjeljak.

$$P(\text{nije ponedeljak}) = \frac{6}{7}.$$

Događaji u zadacima a) i b) nazivaju se **suprotnim događajima**. Kad izvučemo jednu kartu, na njoj ili "jest ponedjeljak" ili "nije ponedjeljak", ne može biti neki treći događaj. To znači da ako se dogodi događaj A, onda se nije dogodio događaj B ili ako se ne dogodi događaj A onda se dogodio događaj B.

Događaj B suprotan je događaju A ako se događaj B ostvaruje ako i samo ako se događaj A ne ostvaruje.

Zbrojimo li vjerojatnosti događaja "jest ponedjeljak" i "nije ponedjeljak", dobit ćemo broj 1.

$$\frac{1}{7} + \frac{6}{7} = \frac{1}{7} = 1.$$

Najčešće je jednostavnije računati vjerojatnost suprotnog događaja tako da od 1 oduzmemos vjerojatnost događaja.

$$P(\text{nije ponedeljak}) = 1 - P(\text{ponedeljak}) =$$

$$= 1 - \frac{1}{7} = \frac{6}{7}.$$

### Važno

Događaj koji je suprotan događaju A označavamo sa  $A^c$ , čitamo "nije A" ili "komplement od A".

Vjerojatnost suprotnog događaja od događaja A označavamo sa  $P(A^c)$ .

Vjerojatnost suprotnog događaja računamo tako da od 1 oduzmemos vjerojatnost događaja.

$$P(A^c) = 1 - P(A).$$

## Zadaci

- 36.** Maja i Matija igraju se šipom od sedam karata. Karte su označene danima u tjednu. Iz šipa se, bez gledanja, izvlači po jedna karta i nakon toga vraća se natrag.
- Kolika je vjerojatnost da je izvučena karta na kojoj piše petak?
  - Kolika je vjerojatnost da je izvučena karta na kojoj ne piše petak?
  - Kolika je vjerojatnost da je izvučena karta na kojoj piše neki od dana vikenda (subota i nedjelja)?
  - Kolika je vjerojatnost da je izvučena karta na kojoj piše neki od radnih dana (pon., uto., sri., čet., pet.)?
  - Smisli neku fer igru s tim šipom karata.
- 37.** Vjerojatnost da dobijete na lotu je 0.000001. Kolika je vjerojatnost da ne dobijete na lotu?
- 38.** Vjerojatnost da će sutra padati kiša je 0.35. Kolika je vjerojatnost da sutra neće padati kiša? Jesu li veće šanse za kišno ili lijepo vrijeme?

### Primjer 9. Bacanje dviju kockica



Maja i Ana igraju se bacajući istovremeno dvije kockice, crvenu i crnu. Zanima ih kolika je vjerojatnost da će na obje kockice pasti jednak broj.

#### Rješenje:

Bacanje dviju kockica malo je složeniji događaj. Znamo da pri bacanju jedne kockice postoji šest elementarnih događaja, a koliko ih postoji pri bacanju dviju kockica.

Zapišimo moguće elementarne događaje u obliku tablice.

		Crvena kockica					
		1	2	3	4	5	6
Crna kockica	1	1, 1	2, 1	3, 1	4, 1	5, 1	6, 1
	2	1, 2	2, 2	3, 2	4, 2	5, 2	6, 2
	3	1, 3	2, 3	3, 3	4, 3	5, 3	6, 3
	4	1, 4	2, 4	3, 4	4, 4	5, 4	6, 4
	5	1, 5	2, 5	3, 5	4, 5	5, 5	6, 5
	6	1, 6	2, 6	3, 6	4, 6	5, 6	6, 6

Pri bacanju kockice postoji 36 elementarnih događaja.

Događaj "na obje kockice pao je jednak broj" može se ostvariti na šest načina: (1, 1); (2, 2); (3, 3); (4, 4); (5, 5) i (6, 6).

$$P(\text{jednaki broj}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Igru s dvije kockice možete igrati i na računalu.



## Zadaci

39. Maja i Ana igraju se bacajući istovremeno dvije kockice, crvenu i crnu. Odredi vjerojatnosti da na kockicama padnu brojevi:
- 4 i 5 ili 5 i 4;
  - čiji je zbroj 10;
  - čiji je zbroj 20;
  - čiji je zbroj manji od 13;
  - čiji je zbroj veći od 13 ili jednak 13;
  - koji nisu jednaki.
40. Matija i Luka odlučili su bacati dvije kockice. Kad kockice padnu, gledaju brojeve na njima i računaju njihovu razliku (od većeg oduzmu manji broj). Dogovorili su se da Matija pobijeđuje ako je razlika brojeva na kockicama 0, 1 ili 2; a Luka ako je razlika brojeva na kockicama 3, 4 ili 5.
- Odigraj i ti tu igru s prijateljima i bilježi rezultate u tablicu;
- b) Tko češće pobijeđuje?
- c) Izračunaj kolika je vjerojatnost da Matija pobijedi;
- d) Izračunaj kolika je vjerojatnost da Luka pobijedi;
- e) Je li ta igra fer? Ako nije, predloži neku igru s dvije kockice koja će biti fer.
41. Matija i Maja bacaju dvije kockice. Odredi vjerojatnost da su na njima pali brojevi:
- Oba manja od 3;
  - Jedan manji od 4 ili jednak 4, a drugi jednak 3;
  - Od kojih je jedan prosti a jedan složeni broj;
  - čiji je zbroj manji od 6;
  - čija je apsolutna vrijednost razlike parni broj;
  - čiji je umnožak prosti broj.

- 42.** Ana baca dvije kockice. Odredi vjerojatnost da su na njima pali brojevi:
- Oba su parni brojevi;
  - čija je apsolutna vrijednost razlike jednaka 2;
  - čiji je zbroj manji od 10;
  - kojima je veći broj višekratnik manjeg;
  - Oba su složeni brojevi;
  - čiji je umnožak višekratnik broja 5;
  - 1 i 6 ili 6 i 1;
  - dvije šestice.
- 43.** U Lukinom razredu je 30 učenika. Profesorica iz povijesti je najavila ispitivanje jednog učenika slijedeći sat. Kolika je vjerojatnost da će profesorica pitati Luku? Kolika je vjerojatnost da ga neće pitati? Treba li Luka ipak naučiti za slijedeći sat?
- 44.** U automatu se nalazi puno olovaka. Od toga je 15% žutih, 23% bijelih, 29% crvenih, 20% plavih, a ostale su zelene. Kad ubaciš novčić, dobiješ jednu olovku.
- Kolika je vjerojatnost da ćeš dobiti žutu olovku?
  - Kolika je vjerojatnost da nećeš dobiti zelenu olovku?
  - Kolika je vjerojatnost da ćeš dobiti plavu ili crvenu olovku?
  - Kolika je vjerojatnost da nećeš dobiti crvenu olovku?
- 45.** Odredi vjerojatnost da pri bacanju dviju kockica padnu brojevi:
- 3, 4 ili 6;
  - čiji je zbroj višekratnik broja 4.
- 46.** Matija baca dvije kockice. Odredi vjerojatnost da padnu brojevi:
- čija apsolutna vrijednost razlike nije paran broj;
  - čiji umnožak nije prosti broj.
- 47.** Matija i Luka igraju se špilom karata. Na kartama su redom brojevi od 6 do 15. Iz špila se, bez gledanja, izvlači po jedna karta i nakon toga vraća se natrag.
- Kolika je vjerojatnost da je izvučena karta s dekadskom jedinicom?
  - Kolika je vjerojatnost da je izvučena karta s djeliteljem broja 17?
  - Kolika je vjerojatnost da je izvučen broj koji nije višekratnik broja 3?
- 48.** Natjecatelj na kvizu ima 3 ponuđena odgovora, od kojih je jedan točan. On ne zna odgovor pa pokušava pogoditi. Kolika je vjerojatnost da će pogoditi? Kolika je vjerojatnost da neće pogoditi?
- 49.** Pri igri bacanja dviju kockica odredi vjerojatnost da su pali brojevi:
- Jedan prosti i jedan ni prosti ni složeni broj broj;
  - čiji je zbroj manji od 5.
- 50.** Baci kockicu za igru "Čovječe ne ljuti se. Odredi vjerojatnost da padne broj:
- koji je rješenje jednadžbe  $\frac{2(1-x)}{3} - \frac{x+4}{5} = \frac{3x-1}{2} - 2$ ;
  - koji je rješenje nejednadžbe  $3(x-1) + 2x < 2(x+3) - 4$ .
- 51.** Matija i Maja bacaju dvije kockice. Odredi vjerojatnost da su na njima pali brojevi:
- Oba manja od 2;
  - Jedan manji od 2 ili jednak 2, a drugi jednak 5.
- 52.** U šeširu se nalaze kartice s brojevima od 27 do 49. Igrači izvlače po jednu karticu i vraćaju je natrag u šešir.
- Kolika je vjerojatnost da je izvučen broj  $x$ , takav da je  $5x - 5 < 200$ ?
  - Kolika je vjerojatnost da je izvučen broj  $x$ , takav da je  $\frac{3-x}{3} + \frac{5}{6} \geq -8\frac{1}{2}$ ?
- 53.** U kutiji se nalaze brojevi od 31 do 60. Igrači izvlače po jedan broj i vraćaju ga natrag u kutiju.
- Kolika je vjerojatnost da je izvučen broj  $x$ , takav da je  $21x - 37 \leq 13x + 253$ ?
  - Kolika je vjerojatnost da je izvučen broj  $x$ , takav da je  $\frac{5x-3}{8} - \frac{x-2}{3} \geq 14\frac{7}{12}$ ?
- 54.** Ana baca kockicu iz igre "Čovječe ne ljuti se".
- Kolika je vjerojatnost da je pao broj  $x$ , takav da je  $7x - 3 = 2(x-3) + 13$ ?
  - Kolika je vjerojatnost da nije pao broj  $x$  iz zadatka a)?
  - Kolika je vjerojatnost da je pao broj  $x$ , takav da je  $\frac{2(x+3)}{3} - \frac{x+3}{2} = \frac{4x+3}{6}$ ?

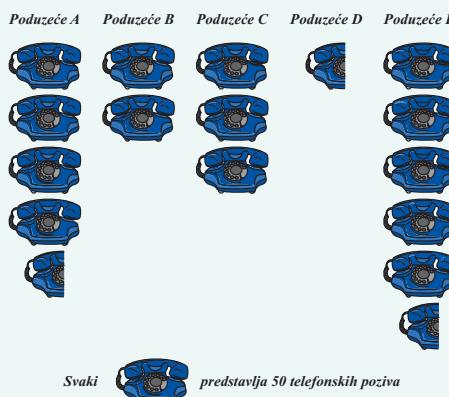
## 4.4. Ponavljanje

### **Pitanja za ponavljanje:**

1. Čime se bavi statistika?
  2. Kako možemo prikazati podatke?
  3. Nabroji neke vrste grafičkog prikaza podataka.
  4. Koji bi grafički prikaz odabrao ako su podaci zadani u obliku postotka?
  5. Što je frekvencija podataka?
  6. Kako računamo relativnu frekvenciju?
  7. Kako računamo aritmetičku sredinu nekih podataka?
  8. Što je slučajan događaj?
  9. Kako računamo vjerojatnost slučajnog događaja?
  10. Koji brojevi mogu biti vjerojatnost nekog događaja?
  11. Navedi tri oblika zapisa brojeva koje često upotrebljavamo kod računanja vjerojatnosti.
  12. O kakvu se događaju radi ako je njegova vjerojatnost 1?
  13. O kakvu se događaju radi ako je njegova vjerojatnost 0?

Zadaci za ponavljanje

1. Na slici su podaci o prošlostjednom broju telefonskih razgovora za pet poduzeća.



- a) Koje je poduzeće imalo najviše telefonskih poziva prošli tjedan? Koliko?

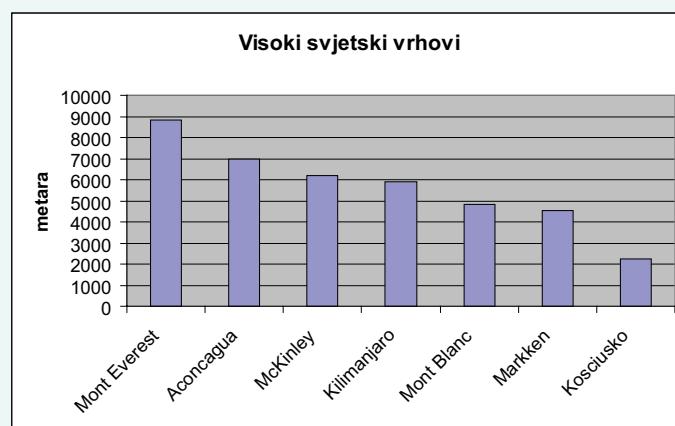
b) Koje je poduzeće imalo najmanje telefonskih poziva prošli tjedan? Koliko?

c) Koliko je poziva napravilo poduzeće B?

d) Koliki je ukupan broj prošlotjednih telefonskih poziva dvaju poduzeća s najvećim brojem poziva?

e) Koje je poduzeće dobilo najveći telefonski račun?

2. Dijagram na slici prikazuje neke od najviših vrhova svijeta.



- a) Kako nazivamo tu vrstu dijagrama?
  - b) Koji je najviši vrh? Kolika je njegova visina?
  - c) Ispiši visine svih vrhova zaokružene na tisućice.
  - d) Izračunaj prosječnu visinu tih vrhova.

3. Prikaži podatke iz tablice u obliku stupčastog dijagrama.

Vrsta	Broj stabala
Masline	900
Naranče	650
Kivi	300
Mandarine	450
Smokve	800

Vrsta	Prodano (kg)
Salata	1300
Mrkva	800
Krumpir	2100
Kupus	1500

4. U tablici je prikazan broj bodova koje su učenici dobili na testu. Prikaži zadane podatke stupčastim dijagramom i izračunaj aritmetičku sredinu broja bodova.

Učenik	Broj bodova
Marin	45
Lucija	25
Nikola	30
Ana	50
Tihana	15

5. Maja je prikupila podatke o prijevozu u školu učenika 7.b razreda.

Vrsta prijevoza	Postotak
Tramvaj	35%
Autobus	15%
Bicikl	20%
Pješice	25%
Automobil	?

- a) Izračunaj posljednji podatak u tablici;  
 b) Koja je vrsta prijevoza najzastupljenija?  
 c) Nacrtaj kružni dijagram s podacima o prijevozu;  
 d) U razredu je 20 učenika. Koliko ih dolazi u školu pješice, a koliko tramvajem?
6. Temperature zraka u °C u travnju u jednom gradu su: 16, 19, 15, 17, 16, 18, 16, 19, 16, 18, 18, 18, 19, 17, 17, 17, 20, 19, 16, 16, 18, 18, 17, 19, 17, 20, 20, 20, 21.  
 a) Nacrtaj stupčasti dijagram frekvencija;  
 b) Izračunaj relativne frekvencije i nacrtaj stupčasti dijagram za njih;  
 c) Izračunaj prosječnu temperaturu.

7.

Temperatura mora u Korčuli 2004. godine (°C)		Temperatura mora u Korčuli 2004. godine (°C)	
I	9.8	VII	22.5
II	10.4	VIII	23.1
III	11.0	IX	20.0
IV	12.1	X	18.4
V	15.6	XI	16.1
VI	21.2	XII	11.7

- a) Izračunaj srednju temperaturu mora za tu godinu u Korčuli.

- b) U kojem je mjesecu temperatura najniža, u kojem najviša, a u kojem najbliža srednjoj?  
 c) U kojim je mjesecima bilo moguće ugodno kupanje u moru?

8. Tablica sadrži podatke o vodostajima rijeka.

Rijeka	Vodostaj u cm
Sava Zagreb	- 57
Sava Županja	366
Drava Osijek	145
Drava Botovo	222
Kupa Karlovac	181
Una Kostajnica	136
Dunav Vukovar	195
Dunav Ilok	244
Korana Veljun	351

- b) Ako se za izmjereni vodostaj od 400 cm proglašavaju izvanredne mjere obrane od poplave, ima li opasnosti od poplava na nekom području?
9. 15 učenika natječe se u skoku u dalj. Rezultati su im sljedeći: 3.2 m, 3.3 m, 3.5 m, 3.5 m, 3 m, 3.7 m, 3.6 m, 3.3 m, 3.5 m, 3.7 m, 3.6 m, 3.3 m, 3 m, 3.9 m i 3.6 m.  
 a) Nacrtaj stupčasti dijagram frekvencija;  
 b) Izračunaj relativne frekvencije i nacrtaj stupčasti dijagram za njih;  
 c) Koliko bi učenika dobilo prvu nagradu?  
 d) Kolika je prosječna duljina skoka?
10. U posudi se nalazi 400 kuglica. Od toga je 25% žutih, 35% bijelih, 20% crvenih, 10% plavih, a ostale su šarene. Igrač izvlači po jednu kuglicu i vraća ju natrag u posudu.  
 a) Koliko ima pojedinih kuglica?  
 b) Kolika je vjerojatnost da je izvučena žuta kuglica?  
 c) Kolika je vjerojatnost da je izvučena bijela ili crvena kuglica?  
 d) Kolika je vjerojatnost da je izvučena jednobojna kuglica?
11. Matija baca kockicu iz igre "Čovječe ne ljuti se".  
 a) Kolika je vjerojatnost da je pao broj 3?  
 b) Kolika je vjerojatnost da je pao parni broj?  
 c) Kolika je vjerojatnost da je pao djelitelj broja 10?  
 d) Kolika je vjerojatnost da je pao broj veći od 4?  
 e) Kolika je vjerojatnost da je pao broj 8?

12. U šeširu se nalazi deset kuglica označenih brojevima od 10 do 19. Igrači izvlače po jednu kuglicu i vraćaju se natrag u šešir.
- Kolika je vjerojatnost da je izvučeni broj 15?
  - Kolika je vjerojatnost da je izvučeni broj neparni broj?
  - Kolika je vjerojatnost da je izvučeni broj dvoznamenkasti broj?
  - Kolika je vjerojatnost da je izvučeni broj 19?
  - Kolika je vjerojatnost da je izvučeni broj 6?
13. U šipilu karata nalaze se karte sa sportašima. Tu je 12 karata s plivačima, 10 karata sa skijašima, 20 karata s nogometnima, 14 karata s tenisačima i 15 karata s rukometnima. Djeca se igraju tako da jedno dijete izvuče kartu i vrati je natrag u šipil.
- Kolika je vjerojatnost da je izvučena karta s nogometnišem?
  - Kolika je vjerojatnost da je izvučena karta s ekipnim sportašem?
  - Kolika je vjerojatnost da je izvučena karta s plivačem?
  - Ana se kladila da će izvući kartu s nogometnišem, a Maja se kladila da će izvući kartu s rukometnišem. Koja ima veće šanse za pobjedu? Zašto?
14. Luka je kupio u kiosku listić Ekspres lutrije i platio ga 5 kn. Na njemu piše da je tiskan u 500 000 listića, a fond dobitaka je sljedeći:
- |         |   |               |
|---------|---|---------------|
| 1       | x | 1 000 000 kn; |
| 5       | x | 50 000 kn;    |
| 10      | x | 1 000 kn;     |
| 100     | x | 500 kn;       |
| 200     | x | 100 kn;       |
| 200     | x | 75 kn;        |
| 400     | x | 50 kn;        |
| 15 000  | x | 25 kn;        |
| 10 000  | x | 15 kn;        |
| 50 000  | x | 10 kn;        |
| 300 000 | x | 5 kn.         |
- Ostali listići nisu dobitni. Odredi vjerojatnost:
- da je Luka dobio 1 000 000 kn;
  - da nije dobio ništa
  - da je dobio 500 kn;
  - da je dobio 25 kn;
  - da je vratio svoje 5 kn.
15. Maja je na izletu s izviđačima. Poslije ručka dobili su sokove pakirane u jednakim neprozirnim čašama. Od 60 čaša 10 je napunjeno sokom od jabuke, 6 sokom od breskve, 12 sokom od marelice, 8 sokom od borovnice, 4 sokom od jagode i ostale sokom od naranče. Odredi vjerojatnost da Maja dobije:
- čašu soka od marelice;
  - čašu voćnog soka;
  - čašu soka od jabuke;
  - čašu vode.
16. Ti i tvoj prijatelj izvlačite slamčice. 20 je slamčica od kojih je 5 kraćih. Kolika je vjerojatnost da izvučeš kraću? A da izvučeš dulju? Jesu li veće šanse za izvlačenje dulje ili kraće slamčice?
17. Luka ima šipil karata sa slikama životinja. Na 8% slika su žirafe, na 12% su slonovi, na 25% su psi, na 6% su mačke, na 11% su papige, na 23% su konji, a na preostalima su orlovi. Igra se tako da jednu izvuče i onda ju vrati natrag.
- Kolika je vjerojatnost da Luka izvuče kartu sa slonom?
  - Kolika je vjerojatnost da izvuče kartu s domaćom životinjom?
  - Kolika je vjerojatnost da je na karti ptica?
  - Kolika je vjerojatnost da izvuče kartu sa psom?
18. U posudi se nalazi 12 kuglica na kojima su napisana imena mjeseci u godini. Odredi vjerojatnost da je izvučena kuglica s imenom mjeseca koji:
- ima točno 31 dan;
  - ima manje od 28 dana;
  - ima 30 ili 31 dan.
19. Matija i Luka igraju se šipilom karata. Na kartama su redom brojevi od 16 do 35. Iz šipa se, bez gledanja, izvlači po jedna karta i nakon toga vraća se natrag.
- Kolika je vjerojatnost da je izvučena karta s dekadskom jedinicom?
  - Kolika je vjerojatnost da je izvučena karta s djeliteljem broja 19?
  - Kolika je vjerojatnost da je izvučen broj koji nije višekratnik broja 3?

20. Natjecatelj na kvizu ima 5 ponuđenih odgovora, od kojih je jedan točan. On ne zna odgovor pa pokušava pogoditi. Kolika je vjerojatnost da će pogoditi? Kolika je vjerojatnost da neće pogoditi?
21. Matija baca dvije kockice. Odredi vjerojatnost da padnu brojevi:
- čija je apsolutna vrijednost razlike neparni broj;
  - čiji je zbroj 7;
  - jednaki brojevi.

## Igre

Pripremite komplete obojenih karata, kuglica, kockice i sl. Odigrajte igre izvlačenja i zapisujte rezultate. Izračunajte vjerojatnosti

pojedinih događaja. Koliko su dobiveni rezultati u skladu s izračunatom vjerojatnošću pojedinog događaja?

## Primjerak oglednog testa:

1. U tablici je prikazan broj bodova koje su učenici dobili na testu. Prikaži zadane podatke stupčastim dijagramom i izračunaj aritmetičku sredinu broja bodova.

Učenik	Broj bodova
Matija	55
Luka	20
Ana	25
Maja	30
Tanja	10

2. Temperature zraka u °C od 1. do 25. lipnja u jednom gradu mjerene u 13 sati su: 26, 29, 25, 27, 26, 28, 26, 29, 26, 28, 28, 28, 30, 29, 26, 26, 28, 28, 27, 29, 27, 30, 30, 30, 31.

- a) Razvrstaj podatke u tablicu frekvencija;  
b) Izračunaj relativne frekvencije.

3. Razred je birao predsjednika razreda. Predloženi su Ivan, Iva i Matija. Evo kako je razred glasovao:

Učenik	Postotak
Ivan	20%
Iva	50%
Matija	30%

- a) Tko je postao predsjednik razreda? Tko je zamjenik?  
b) Nacrtaj kružni dijagram s podacima o glasovanju.  
c) U razredu je 20 učenika. Koliko je glasova dobio Ivan, koliko Iva, a koliko Matija?

4. U posudi se nalaze 3 plave kuglice, 12 zelenih, 4 zlatne i 1 bijela. Ana i Luka igraju se tako da izvlače po jednu kuglicu i vraćaju je natrag u kutiju. Odredi vjerojatnost da je izvučena:

- plava kuglica;
- bijela kuglica;
- zelena kuglica;
- zlatna kuglica.

5. U šeširu se nalaze kartice s brojevima od 27 do 56. Igrači izvlače po jednu karticu i vraćaju je natrag u šešir.

- Kolika je vjerojatnost da je izvučen broj 30?
- Kolika je vjerojatnost da je izvučeni broj prosti broj?
- Kolika je vjerojatnost da je izvučeni broj manji od 60 ili jednak broju 60?
- Kolika je vjerojatnost da je izvučeno slovo?
- Kolika je vjerojatnost da je izvučeni broj neparni broj?

6. U automatu se nalazi puno olovaka. Od toga je 10% žutih, 25% bijelih, 21% crvenih, 18% plavih, a ostale su zelene. Kad ubaciš novčić, dobiješ jednu olovku.

- Kolika je vjerojatnost da ćeš dobiti žutu olovku?
- Kolika je vjerojatnost da ćeš dobiti zelenu olovku?
- Kolika je vjerojatnost da ćeš dobiti plavu ili crvenu olovku?
- Kolika je vjerojatnost da ćeš dobiti crnu olovku?

# 5. Sličnost

## Važni pojmovi

omjer dviju dužina

proporcionalne  
dužine

Talesov poučak o  
proporcionalnim  
dužinama

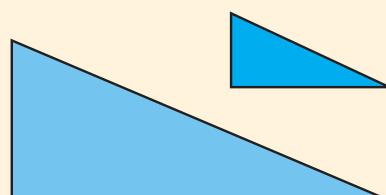
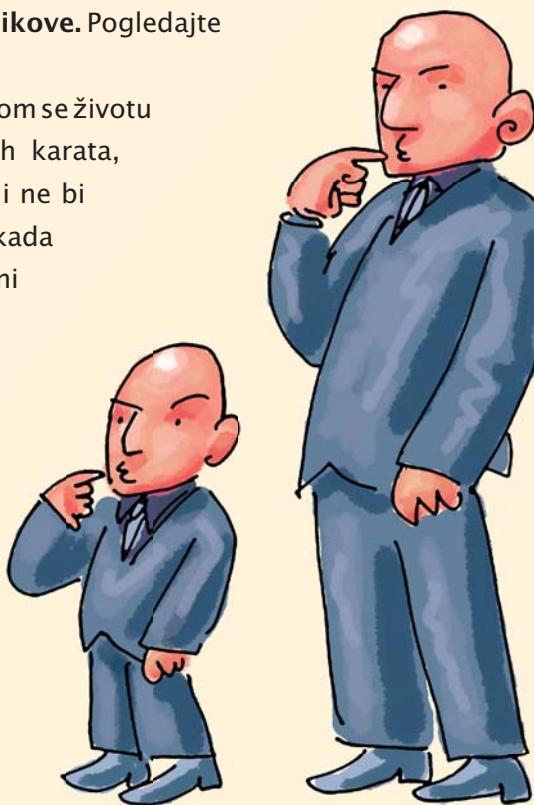
podjela dužine na  
jednake dijelove  
i u zadanom  
omjeru

slični trokuti

koeficijent sličnosti

U našoj okolini često vidimo **slične likove**. Pogledajte sliku.

Svojstva sličnih likova u svakodnevnom se životu primjenjuju pri izradi zemljopisnih karata, planova, crteža, maketa... Kad ljudi ne bi znali rabiti omjere i proporcije, nikada građevine, kipovi, strojevi i avioni ne bi bili slični svojim smanjenim crtežima i maketama.



omjer brojeva

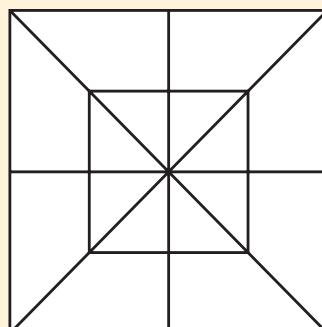
$a : b$  ili  $\frac{a}{b}$

proporcija ili razmjer

$a : b = c : d$

svodi se na

$a \cdot d = b \cdot c$



U grobnici faraona Ramzesa II. nalazi se zid na kojem je nacrtana mreža kvadratića pomoću kojih su na zid preneseni uvećani crteži s manjih originala.

U ovom ćete poglavlju, primjerice, naučiti:

- kako odabranu dužinu bez mjerjenja podijeliti u zadanom omjeru
- dijeliti odabranu dužinu bez mjerjenja na dva, tri, četiri, pet, itd. jednakih dijelova
- kakvi su to slični trokuti
- prepoznavati i crtati slične trokute pomoću poučaka o sličnosti trokuta
- kako povećati ili umanjiti neki lik dva, tri ili više puta (crtati u umanjenom mjerilu)

### Brzinski usmeni zadaci za ponavljanje

1. Kako još zovemo količnik  $a : b$ ?
2. a) Pročitaj omjere: 3 : 2; 2 : 3; 7 : 5; 8 : 5.  
b) Što iz omjera dviju veličina možemo zaključiti o tim dvjema veličinama?
3. Pri miješanju boje i vode služimo se omjerom 5 : 2. Koliko litara vode treba uliti:  
a) u 5 litara boje?  
b) u 10 litara boje?  
c) u 2.5 litre boje?
4. Navedi nekoliko omjera koji su jednakim omjeru 1 : 3.
5. U kojem je omjeru (mjerilu) izrađena karta na kojoj je udaljenost između Dubrovnika i Zagreba 40 cm, ako je udaljenost ovih gradova u prirodi 400 km?
6. Kako se zove jednakost dvaju omjera?

7. Koliki je nepoznati član proporcije

$$3 : 4 = x : 16$$

8. Kakvi su to sukladni trokuti?

9. Mozgalica kipara Ivana:

Kipar Ivan napravio je kip visok pola metra. Kip mu se jako svidio pa je odlučio napraviti jedan takav kip, ali uvećan 4 puta. Kolika će biti visina novoga kipa?



## 5.1. Dijeljenje dužine na jednakе dijelove i u jednakom omjeru

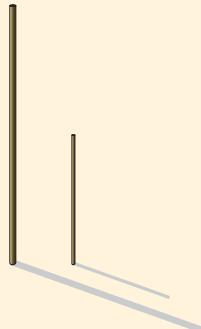
*Koliko je visoka piramida*

Tales je uspravno učvrstio štap duljine 1.80 m ispred jedne od stranica piramide tako da se kraj sjene štapa poklopio s krajem sjene piramide. Izmjerio je duljinu sjene štapa i duljinu sjene piramide. Sjena štapa bila je duga 0.6 m, a sjena piramide 54 m.

sjena piramide : sjena štapa =  
visina piramide : visina štapa

*Kolika je visina te piramide?*

*Kako možeš bez mjerenja odrediti visinu crkvenog tornja?*



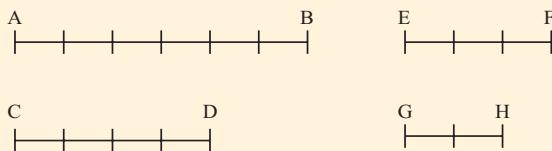
Promotrimo dva štapa duljine 2 m i 1 m zabodena u tlo.

Kad su obasjani suncem štapovi bacaju sjenu na tlo. Duljine sjena mijenjat će se ovisno o visini Sunca nad horizontom, ali omjer njihovih duljina neće se mijenjati. Naime omjer sjena uvijek će biti jednak omjeru stvarnih visina štapova. Dakle za naša dva štapa taj će omjer biti 2 : 1.

Kažemo da su duljine štapova proporcionalne duljinama njihovih sjena.

### Primjer 1. Omjer dviju dužina

Odredi omjer dužina  $\overline{AB}$  i  $\overline{CD}$ , te omjer dužina  $\overline{EF}$  i  $\overline{GD}$  na slici:



omjer  
dužina

**Omjer dužina** iskazujemo omjerom njihovih duljina izraženih istom mjernom jedinicom. Na primjer

$$\overline{AB} : \overline{CD} = |AB| : |CD|$$

## Rješenje:

Omjer duljina  $|AB| : |CD| = 6 : 4$ , tj.  $|AB| : |CD| = 3 : 2$ .

Uoči da je i omjer duljina  $|EF| : |GH| = 3 : 2$ .

Stoga možemo napisati proporciju

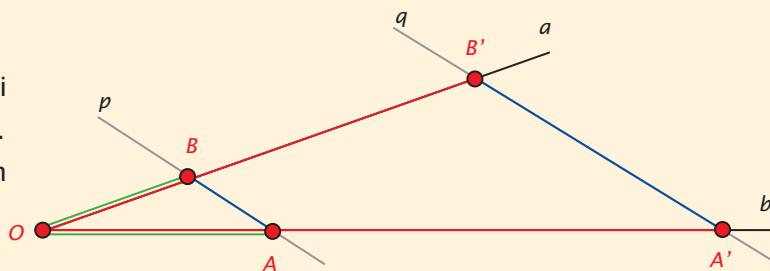
Ako vrijedi proporcija

$\overline{AB} : \overline{CD} = \overline{EF} : \overline{GH}$  za dužine  
 $\overline{AB}, \overline{CD}, \overline{EF}$  i  $\overline{GH}$ ,  
 kažemo da su te dužine  
 proporcionalne.

proporcionalne  
dužine

**Primjer 2. Proporcionalne dužine na krakovima kuta**

Na slici su krakovi kuta  $\angle aOb$  presjećeni parom usporednih pravaca  $p$  i  $q$ , ( $p \parallel q$ ).  
 a) Nabroji sve dužine koje su se pritom dobile služeći se oznakama sa slike:



b) Pažljivo izmjeri duljine dobivenih dužina i izračunaj omjere:

$$|OA| : |OA'|, |OB| : |OB'|, |AB| : |A'B'|,$$

$$|OA| : |AA'|, |OB| : |BB'|.$$

Koje jednakosti omjera uočavaš? Zapiši te proporcije!

### Rješenje:

a) Presijecanjem krakova kuta parom usporednih pravaca dobilo se osam dužina:

$\overline{OA}$ ,  $\overline{OA'}$ ,  $\overline{AA'}$ ,  $\overline{OB}$ ,  $\overline{OB'}$ ,  $\overline{BB'}$ ,  $\overline{AB}$  i  $\overline{A'B'}$ .

b)

$ OA  = 3 \text{ cm}$ ,	$ OA'  = 9 \text{ cm}$ ,	$ OB  = 2 \text{ cm}$ ,
$ OB'  = 6 \text{ cm}$ ,	$ AB  = 1.3 \text{ cm}$ ,	$ A'B'  = 3.9 \text{ cm}$ ,
$ AA'  = 6 \text{ cm}$ ,	$ BB'  = 4 \text{ cm}$ .	

Omjeri dobivenih dužina su:

$$|OA| : |OA'| = 1 : 3 = \frac{1}{3}, \quad |OB| : |OB'| = 1 : 3 = \frac{1}{3},$$

$$|AB| : |A'B'| = 1 : 3 = \frac{1}{3}, \quad |OA| : |AA'| = 1 : 2 = \frac{1}{2},$$

$$|OB| : |BB'| = 1 : 2 = \frac{1}{2}.$$

Iz jednakosti odgovarajućih omjera dobivamo sljedeće proporcije

$$|OA| : |OA'| = |OB| : |OB'| = |AB| : |A'B'| = \frac{1}{3}$$

i

$$|OA| : |AA'| = |OB| : |BB'| = \frac{1}{2},$$

poznate kao čuveni **Talesov poučak** o proporcionalnim dužinama.

Talesov poučak

### Važno

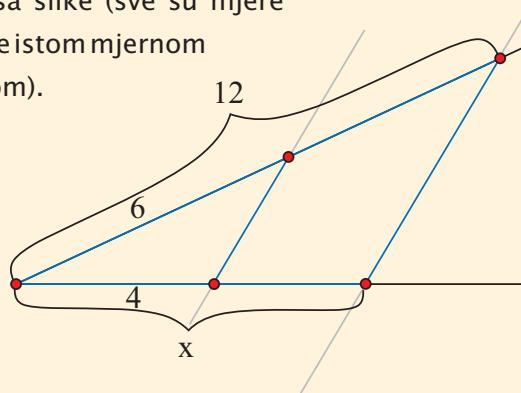
Usporedni pravci  $p$  i  $q$  na krakovima kuta  $\angle aOb$  odsijecaju proporcionalne dužine.

Na računalu možete brže i lakše obaviti veći broj mjerjenja i uvjeriti se u istinitost Talesova poučka



### Primjer 3a. Kako izračunati nepoznatu duljinu?

Izračunaj nepoznatu duljinu dužine  $x$  sa slike (sve su mjerne izražene istom mjernom jedinicom).



### Rješenje:

I. način

$$12 : 6 = x : 4$$

$$6 \cdot x = 48$$

$$x = 8$$

II. način

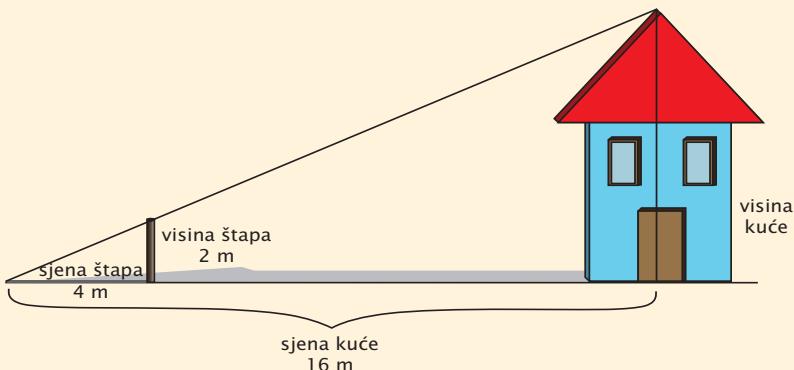
Kako je omjer  $12 : 6 = 2$ , zaključujemo da je dulja dužina na jednom kraku kuta 2 puta veća od kraće dužine na tom istom kraku. Stoga i na drugom kraku kuta odnos između dulje i kraće dužine mora biti jednak.

Stoga je  $x = 4 \cdot 2$ , tj.  $x = 8 \text{ cm}$

### Primjer 3b.

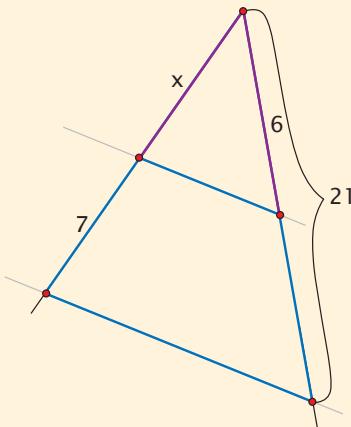
Služeći se Talesovom idejom o upotrebi sjene, želimo odrediti čemu visinu kuće.

Prikažimo primjer crtežom.



### Primjer 3c.

Izračunaj nepoznatu duljinu dužine (sve su mjere izražene istom mjerom jedinicom).



### Rješenje:

visina kuće : visina štapa = sjena kuće : sjena štapa

$$\begin{aligned} x : 2 &= 16 : 4 \\ 4 \cdot x &= 32 \\ x &= 8 \text{ m} \end{aligned}$$

UVJEM USPOREDUJ  
ISTIM REDOM I LI ISTU  
VRSTU VELIČINE:  
SJENU SA SJENOM,  
VISINU S VISINOM.

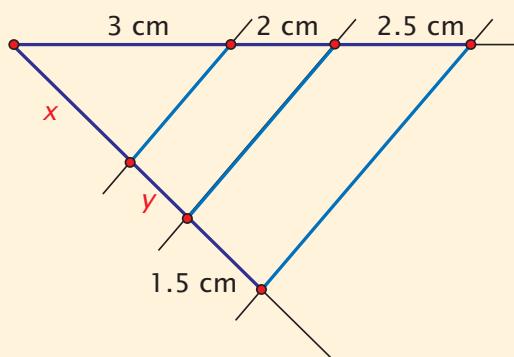


### Rješenje:

$$\begin{aligned} x : 6 &= 7 : (21 - 6) \\ x : 6 &= 7 : 15 \\ 15 \cdot x &= 42 \\ x &= 2.8 \end{aligned}$$

### Primjer 3d.

Izračunaj nepoznate duljine dužina (sve su mjere izražene istom mjerom jedinicom).



### Rješenje:

Prema Talesovu poučku usporedni pravci na krakovima kuta odsijecaju proporcionalne duljine. Mudro je uzeti onu proporciju u kojoj će tri člana biti poznate duljine:

$$\begin{array}{ll} x : 3 \text{ cm} = 1.5 \text{ cm} : 2.5 \text{ cm} & y : 2 \text{ cm} = 1.5 \text{ cm} : 2.5 \text{ cm} \\ 2.5 \cdot x = 1.5 \cdot 3 & 2.5 \cdot y = 1.5 \cdot 2 \\ 2.5 \cdot x = 4.5 & 2.5 \cdot y = 3 \\ x = 1.8 \text{ cm} & y = 1.2 \text{ cm} \end{array}$$

# Zadaci

1. Napamet odredi omjer dužina ako su zadane njihove duljine:

a)  $|AB| = 52 \text{ cm}, |CD| = 26 \text{ cm};$

b)  $|EF| = 8 \text{ dm}$ ,  $|GH| = 40 \text{ dm}$ ;

c)  $|CD| = 30 \text{ cm}$ ,  $|DE| = 5 \text{ dm}$ ;

d)  $|XY| = 0.6 \text{ m}$ ,  $|KL| = 36 \text{ dm}$ .

2. Kolika je duljina dužine  $\overline{MN}$  ako je dužina  $\overline{OP}$  duga 30 mm, a omjer

a)  $|MN| : |OP| = 3 : 5$  ;

b)  $|MN| : |OP| = 1 : 5$  ;

c)  $|OP| : |MN| = 2 : 3$  .

3. Kolika je duljina dužine  $\overline{CD}$  ako je dužina  $\overline{AB}$  duga 7 cm, a omjer

a)  $|CD| : |AB| = 1 : 14$  ;

b)  $|AB| : |CD| = 1 : 2$  ;

c)  $|AB| : |CD| = 2 : 5$ .

4. Izračunaj nepoznatu duljinu ako je:

a)  $\frac{|AB|}{2} = \frac{6}{5}$  (sve su mjere u metrima);

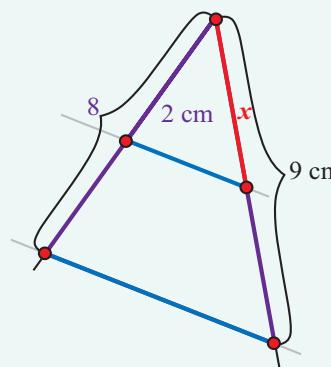
b)  $\frac{24}{|MN|} = \frac{6}{20}$  (sve su mjere u metrima);

c)  $|MN| : 9 \text{ m} = 50 \text{ dm} : 15 \text{ m};$

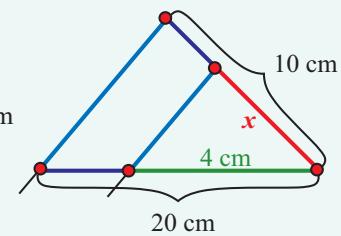
$$d) 120 \text{ mm} : 0.4 \text{ dm} = 9 \text{ cm} : |MN| .$$

5. Izračunaj nepoznatu duljinu  $x$ :

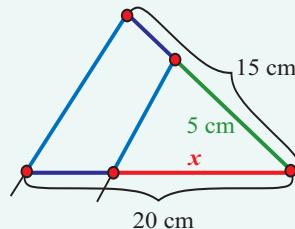
a)



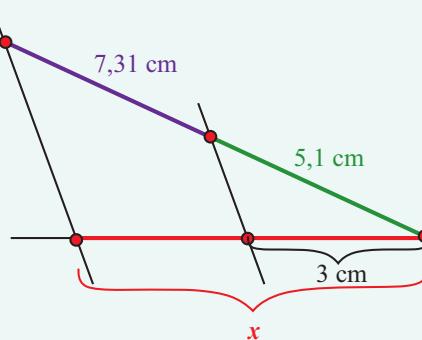
b)



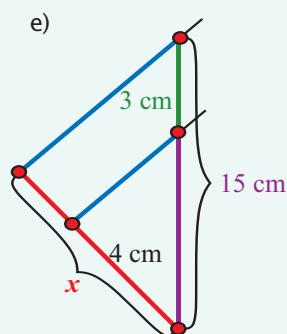
c)



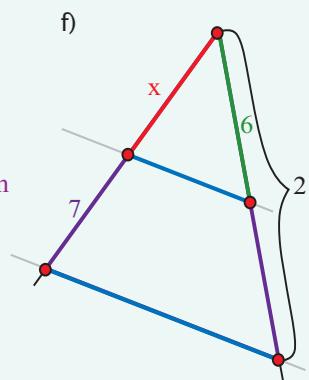
d)



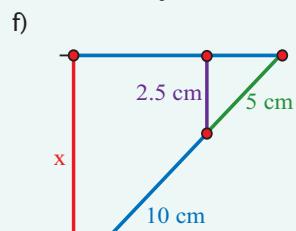
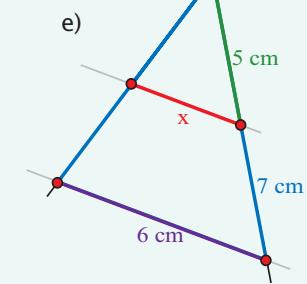
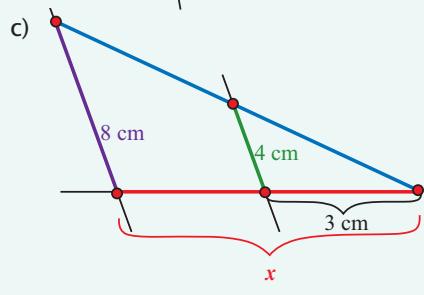
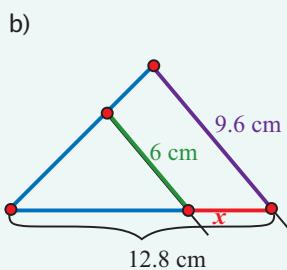
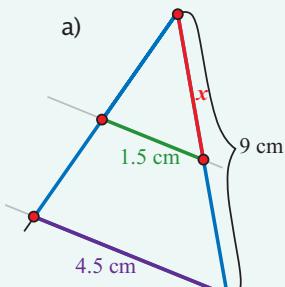
e)



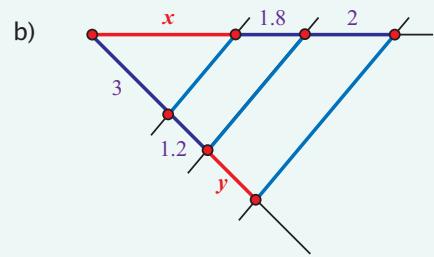
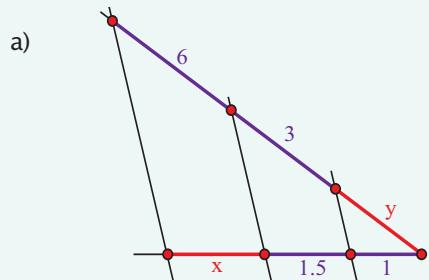
1



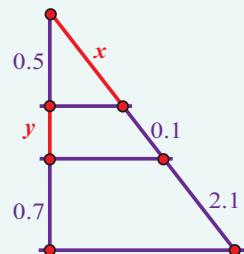
6. Izračunaj nepoznatu duljinu  $x$ . Sve su zadane duljine u centimetrima.



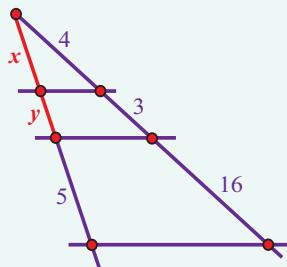
7. Izračunaj nepoznate duljine  $x$  i  $y$ . Sve su zadane duljine u decimetrima.



c)

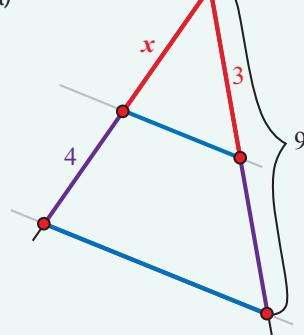


d)

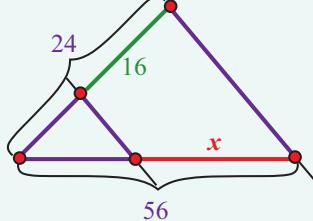


8. Izračunaj nepoznate duljine  $x$  i  $y$ . Sve su zadane duljine u metrima.

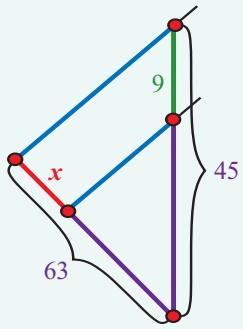
a)



b)



c)



**Primjer 4.****Dijeljenje dužine na jednake dijelove**

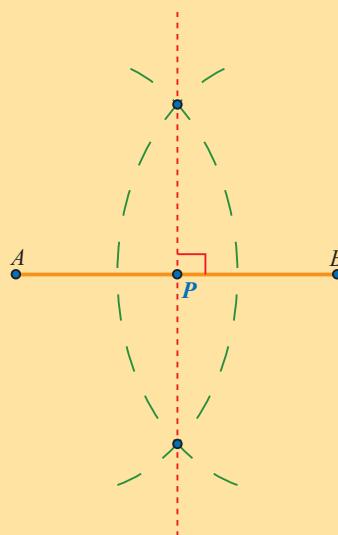
Kako bismo zadanu dužinu  $\overline{AB}$  podijelili na dva jednaka dijela bez mjeranja?

**Rješenje:**

Zadanu dužinu  $\overline{AB}$  podijelit ćemo bez mjeranja na dva jednaka dijela ako joj konstruiramo simetralu.



Simetralama možemo svaku dužinu podijeliti na 2, 4, 8, 16 itd. jednakih dijelova.



Simetrala dužine je pravac koji je okomit na tu dužinu i prolazi njezinim polovištem.

Svaka točka simetrale dužine jednako je udaljena od krajeva te dužine.

**Zadaci**

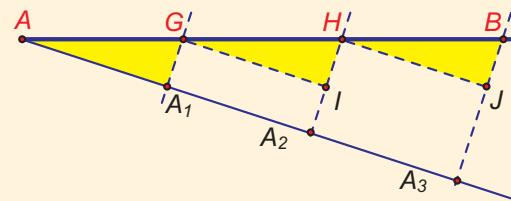
9. Nacrtaj dužine zadanih duljina i simetralama dužina podijeli ih na četiri jednaka dijela. Šestarom provjeri jesu li dobiveni dijelovi doista jednakih duljina.  
a)  $|CD| = 8 \text{ cm}$  ;      b)  $|EF| = 9.5 \text{ cm}$  .

No kako bismo zadanu dužinu  $\overline{AB}$  bez mjeranja podijelili na 3, 5, 6, 7, 9 itd. jednakih dijelova?



Pažljivo pogledaj skicu kuta koji je presječen usporednim pravcima tako da je  $|AA_1| = |A_1A_2| = |A_2A_3|$  .

Trokuti koji su obojeni žutom bojom međusobno su sukladni (KSK). Zašto?  
Iz sukladnosti ovih trokuta proizlazi da je  $|AG| = |GH| = |HB|$  .



**Primjer 5.****Dijeljenje dužine na jednake dijelove**

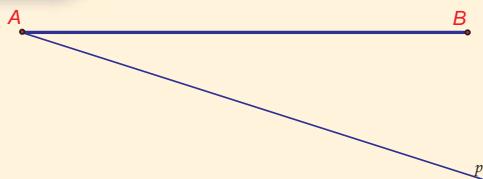
Podijelimo zadatu dužinu  $\overline{AB}$  na pet jednakih dijelova bez mjerena.



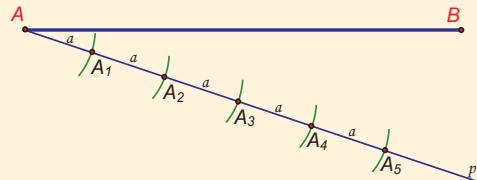
dijeljenje  
dužine na  
jednake  
dijelove

**Rješenje:****I. korak**

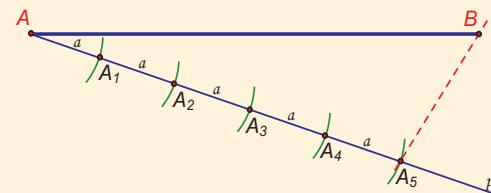
Nacrtamo proizvoljni polupravac  $p$  s početkom u točki  $A$ ;

**II. korak**

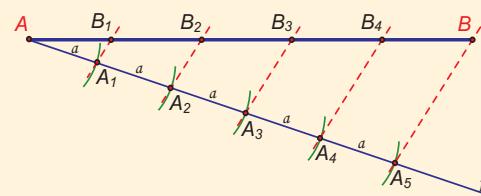
Počevši od točke  $A$ , na polupravac  $p$  nanosimo (šestarom) pet puta dužinu proizvoljne duljine  $a$ ;

**III. korak**

Nacrtamo pravac  $A_5B$ , tj. spojimo zadnju točku s krajem dužine;

**IV. korak**

Točkama  $A_4$ ,  $A_3$ ,  $A_2$  i  $A_1$  nacrtamo pravce usporedne s pravcem  $A_5B$ ;



Sjecišta usporednica i dužine  $\overline{AB}$  dijele dužinu  $\overline{AB}$  na pet jednakih dijelova.

**Zadaci**

10. Nacrtaj dužinu  $\overline{PQ}$  duljine 8 cm i bez mjerena je podijeli na:
  - a) šest jednakih dijelova;
  - b) sedam jednakih dijelova;
  - c) osam jednakih dijelova.
11. Proizvoljnu dužinu  $\overline{MN}$  geometrijskom konstrukcijom podijeli na tri jednakih dijela. Dobivene diobene točke označi redom:  $A$  i  $B$ . Prepiši, pa dopuni i objasni na crtežu omjere dobivenih dužina:

- a)  $|MA| : |AN| = \underline{\hspace{1cm}} : \underline{\hspace{1cm}}$  ;
- b)  $|MB| : |BN| = \underline{\hspace{1cm}} : \underline{\hspace{1cm}}$  ;
- c)  $|MN| : |MA| = \underline{\hspace{1cm}} : \underline{\hspace{1cm}}$  ;
- d)  $|MN| : |MB| = \underline{\hspace{1cm}} : \underline{\hspace{1cm}}$  ;

12. Opseg jednakostraničnog trokuta  $\triangle ABC$  iznosi 10 cm. Nacrtaj dužinu kojoj je duljina jednaka opsegu toga trokuta, a zatim konstruiraj taj trokut.

**Primjer 6.****Dijeljenje dužina u zadanim omjeru**

a) U kojem omjeru točka C dijeli dužinu  $\overline{MN}$  na slici?



b) U kojem omjeru točka L dijeli dužinu  $\overline{EF}$ ?



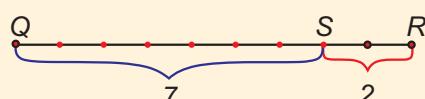
c) Zadanu dužinu  $\overline{QR}$  dužinu točkom S podijeli u omjeru 7 : 2.

**Rješenje:**

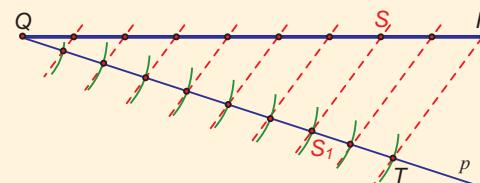
a) Dužina  $\overline{MN}$  podijeljena je na šest jednakih dijelova. Točka C je od točke M udaljena za jedan takav dio, a od točke N za pet takvih dijelova. Zaključujemo da točka C dijeli dužinu  $\overline{MN}$  u omjeru 1 : 5, tj.  $|MC| : |CN| = 1 : 5$ .

b) Točka L dijeli dužinu  $\overline{EF}$  u omjeru 4 : 3, tj.  $|EL| : |LF| = 4 : 3$ .

c) Dobro je nacrtati prostoručnu skicu.

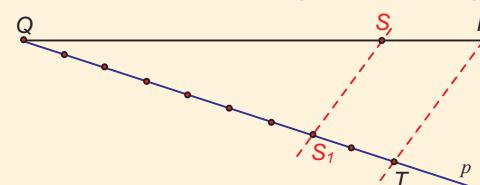


Iz skice se vidi da zadalu dužinu  $\overline{QR}$  treba podijeliti na  $7 + 2 = 9$  jednakih dijelova. Nakon toga nije teško uočiti točku S dužine  $\overline{QR}$ , koja dijeli ovu dužinu u omjeru 7 : 2.



Zadatak možemo i brže riješiti. Naime, dovoljno je samo na polupravcu  $p$  naznačiti točku  $S_1$  koja dijeli dužinu  $|QT|$  u omjeru 7 : 2.

Točkom  $S_1$  nacrtamo usporednicu s pravcem



$RT$ . Usporednica će presjeći dužinu  $\overline{QR}$  u točki S koja dijeli i ovu dužinu u omjeru 7 : 2 jer je:  $|QS_1| : |S_1T| = |QS| : |SR|$ .

**Zadaci**

13. Nacrtaj po volji dužinu  $\overline{PQ}$ . Na toj dužini konstrukcijom odredi točku S koja dužinu  $\overline{PQ}$  dijeli u omjeru
- 2 : 3;
  - 1 : 3;
  - 5 : 1.

14. Dužinu  $\overline{AB}$  duljine 7 cm podijeli točkama  $A_1$ ,  $A_2$  i  $A_3$  na četiri jednakaka dijela. U kojem su omjeru:
- $|AA_1| : |A_1B|$ ;
  - $|AA_2| : |A_2B|$ ;
  - $|AA_3| : |A_3B|$ ;
  - $|AB| : |A_1B|$ ;
  - $|AB| : |A_2B|$ ;
  - $|AB| : |A_3B|$ .

## Zadaci

15. Nacrtaj dužinu  $\overline{AB}$  duljine 10 cm. Na toj dužini konstruiraj točku  $C$  tako da vrijedi:  
 $|AC| : |CB| = 1 : 2$
16. Konstruiraj kvadrat opsega 11 cm.
17. Konstruiraj pravokutnik opsega 20 cm kojemu se stranice odnose u omjeru 4 : 5.
18. Konstruiraj trokut opsega 13 cm tako da mu se duljine stranica odnose kao 2 : 3 : 4.
19. Konstruiraj trokut opsega 15 cm tako da mu se duljine stranica odnose kao 3 : 4 : 6.

## 5.2. Sličnost trokuta

### Slični likovi

Potraži parove odgovarajućih likova.

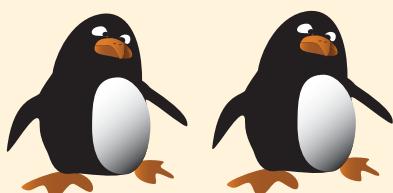


Probajte objasniti po čemu ste prepoznali parove odgovarajućih likova. Što je kod njih jednak, a što različito?

U svojoj okolini često vidimo **slične likove** – to su likovi koji imaju **jednak oblik**, ali veličina im može biti različita.

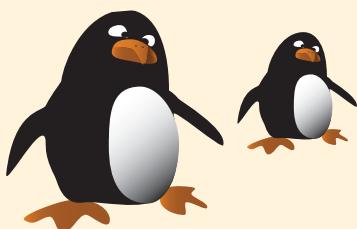
## Primjer 1. Parovi pingvina

a)



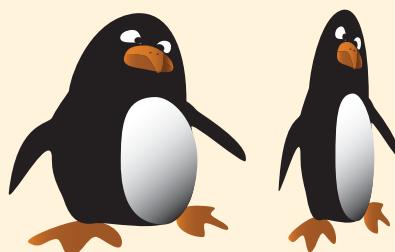
Pogledajmo pingvine na slici. Ta su dva pingvina su jednakog oblika i veličine. Na matematičkom jeziku kažemo da su pingvini **sukladni**.

b)



Pingvini na drugoj slici jednakog su oblika, ali nisu jednake veličine. Za njih kažemo da su **slični**. Oni nisu sukladni.

c)



Pingvini na trećoj slici nemaju ni jednak oblik ni jednaku veličinu. Oni nisu ni slični ni sukladni.

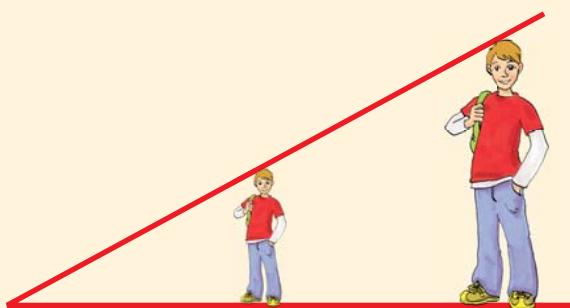


## Primjer 2. Povećanje - smanjenje

Kako ćemo dobiti dva slična lika?

**Proporcionalno povećana (smanjena)**  
slika nekoga lika dobije se ako se tom liku sve duljine **povećaju (smanje)** jednak broj puta.

Pogledajte Luku na ovim slikama.

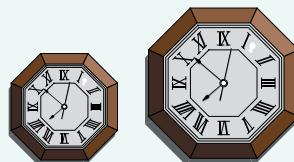


Veća slika dobila se proporcionalnim povećanjem manje slike. Primjerice, ako smo Lukinu visinu na manjoj slici povećali dva puta, tada trebamo dva puta povećati i duljinu stopala, nogu, ruku, prstiju, širinu ramena itd. kako bi se dobio sličan lik, tj. lik jednakog oblika, samo povećan. Sjetite se, ovo ste svojstvo ste već upotrijebili za računanje duljine Orlandova kažiprsta!

proporcionalno  
povećanje  
proporcionalno  
smanjenje

## Zadaci

1. Guliver je u Liliputu susreo "male ljude", Liliputance, čija je visina iznosila jednu petinu naše. Kolika je visina prosječnog Liliputanca ako je visina prosječnog čovjeka 180 cm?



2. Koji su likovi slični, a koji nisu? Zašto?



### Primjer 3. Sličnost likova u geometriji

Uočili smo da oblik, a ne veličina određuje sličnost dvaju likova.

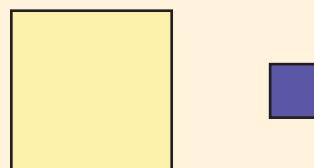
Jesu li geometrijski likovi na slici slični?

a)



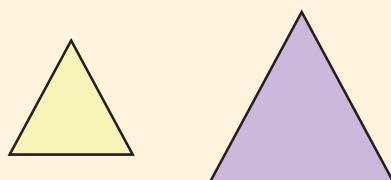
Složit ćete se da sve kružnice imaju jednak oblik, ali nemaju nužno jednaku veličinu. Dakle možemo reći da su svake dvije kružnice slične.

b)

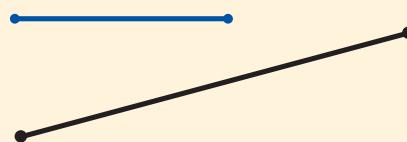


Isto vrijedi i za kvadrate. Svi kvadrati imaju jednak oblik, a mogu se razlikovati jedino po veličini. Svaka su dva kvadrata međusobno slična.

c)

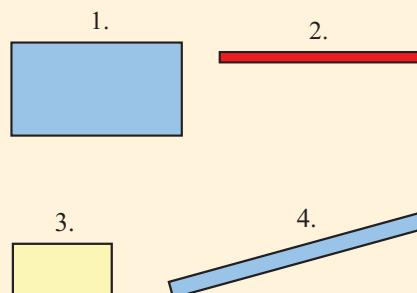


Na isti način možemo zaključiti da su svaka dva jednakostranična trokuta slična.



Svake dvije dužine međusobno su slične.

d) Jesu li svaka dva pravokutnika slična?

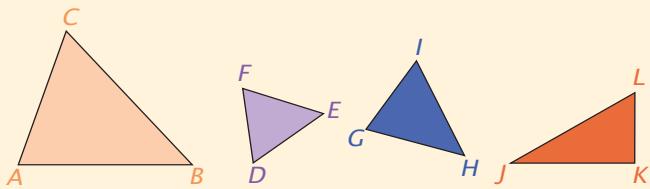


Naravno da nisu! Pravokutnici ne moraju biti slični.

Prvi i treći pravokutnik na slici imaju jednak oblik. Kažemo da su slični. Isto tako međusobno su slični drugi i četvrti pravokutnik. Uvjeri se mjeranjem da u ova dva primjera parovi sličnih pravokutnika imaju jednakomjere duljine i visine. Međutim, prvi i drugi pravokutnik nisu slični, nemaju jednak oblik. Koji još pravokutnici na slici nisu slični?

## Primjer 4. Sličnost trokuta

a) Pogledaj trokute na slici.

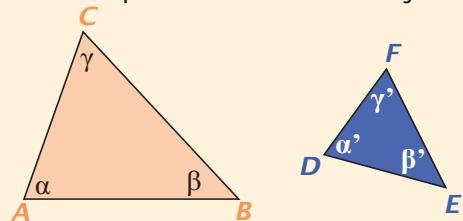


Procijeni koji je trokut sličan trokutu  $\Delta ABC$ .

### Rješenje:

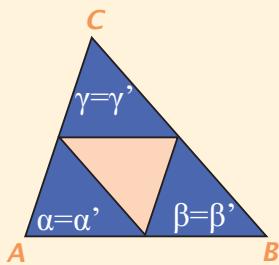
Procjenjujemo da su trokuti  $\Delta ABC$  i  $\Delta GHI$  slični jer imaju jednak oblik, bez obzira na to što su različite veličine i što im je položaj u ravnini različit.

Oblik trokuta ovisi o njegovim kutovima. Da bismo bili sigurni, izmjerimo trokutima  $\Delta ABC$  i  $\Delta GHI$  kutove i usporedimo dobivene mjere.



Ili, precrtajmo trokut  $\Delta GHI$  na proziran papir i izrežimo ga.

Prislanjanjem kutova trokuta  $\Delta GHI$  na kutove trokuta  $\Delta ABC$  vidimo da se ovi trokuti podudaraju u sva tri kuta, tj. da imaju parove kutova jednake veličine.



$$\alpha = \alpha', \beta = \beta', \gamma = \gamma'.$$

Dakle prema jednakosti odgovarajućih kutova možemo reći da su dva trokuta  $\Delta ABC$  i  $\Delta GHI$  slična.

Matematička oznaka za sličnost je  $\sim$ . Sličnost trokuta u ovom primjeru zapisujemo ovako:  $\Delta ABC \sim \Delta GHI$ . Čitamo: "  $\Delta ABC$  sličan je trokutu  $\Delta GHI$  ".

Promotrimo stranice sličnih trokuta u našem primjeru.

Kakve su duljine stranica trokuta  $\Delta ABC$  u odnosu na duljine stranica trokuta  $\Delta GHI$ ?

Već na prvi pogled vidimo da su duljine odgovarajućih stranica sličnih trokuta različite.

No njihovi omjeri međusobno su jednaki.

Vrijednost tog omjera zove se **koeficijent sličnosti** i označava se slovom  $k$ .

U našem primjeru  $k = 2$ , tj.

$$\frac{|AB|}{|GH|} = \frac{|BC|}{|HI|} = \frac{|CA|}{|IG|} = 2.$$

To znači da je svaka stranica većega trokuta dva puta dulja od odgovarajuće stranice manjega trokuta.

**sličnost trokuta**

$\sim$

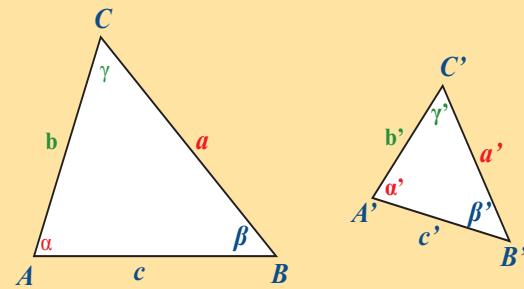
"je sličan"

**koeficijent sličnosti  
 $k$**

### Važno

Dva su trokuta međusobno slična ako su im kutovi jednakih veličina, a duljine odgovarajućih stranica proporcionalne.

$$\alpha = \alpha', \beta = \beta', \gamma = \gamma';$$



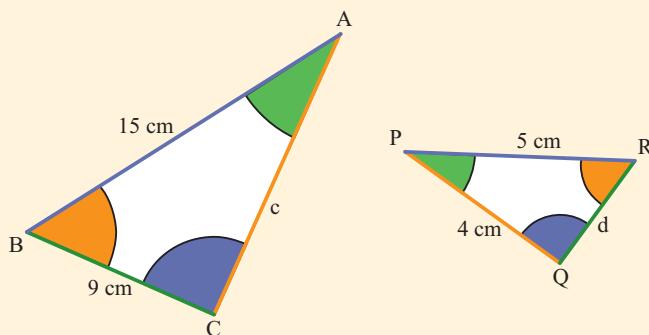
Omjer duljina odgovarajućih stranica sličnih trokuta nazivamo koeficijent sličnosti.

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k;$$

## Primjer 5. Koeficijent sličnosti

Trokuti na slici međusobno su slični:  $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ . Kutovi jednake veličine obojeni su istom bojom.

Parovi odgovarajućih stranica sličnih trokuta leže nasuprot kutova iste veličine.



Odredi koeficijent sličnosti i duljinu preostalih stranica.

### Rješenje:

Sličnim trokutima omjeri **odgovarajućih** stranica su jednaki. Naučili smo da se vrijednost tog omjera zove koeficijent sličnosti za ta dva trokuta. Kako bismo odredili koeficijent sličnosti, potražimo na slici onaj par odgovarajućih stranica koje imaju poznatu duljinu.

$$k = \frac{|AB|}{|PR|} = \frac{15}{5} = 3. \text{ Koeficijent sličnosti između}$$

trokuta  $\Delta ABC$  i  $\Delta PQR$  je 3, tj.  $k = 3$ .

$$\text{To znači da je } \frac{|BC|}{|RQ|} = k \text{ i , tj. } \frac{9}{d} = 3 \text{ , pa}$$

zaključujemo da je  $d = 3 \text{ cm}$ .

$$\text{Isto tako je } \frac{|AC|}{|PQ|} = k \text{ , tj. } \frac{c}{4} = 3 \text{ ,}$$

pa zaključujemo da je  $c = 12 \text{ cm}$ .

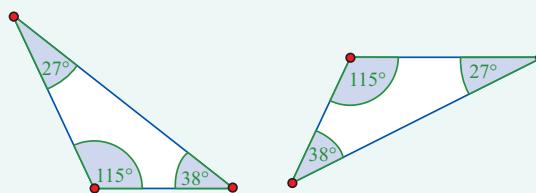
Zadatak smo mogli riješiti na više načina. Primjerice, nakon što smo odredili koeficijent sličnosti  $k = 3$ , mogli smo odmah zaključiti da su stranice većega trokuta tri puta dulje od odgovarajućih stranica manjega trokuta i obrnuto. Stranici  $d$  manjega trokuta odgovara stranica većega trokuta, koja je duga 9 cm. Lako je zaključiti da je  $d = 3 \text{ cm}$ . Isto tako stranici  $c$  većega trokuta odgovara stranica manjeg trokuta duljine 4 cm, pa je  $c = 12 \text{ cm}$ .

## Zadaci

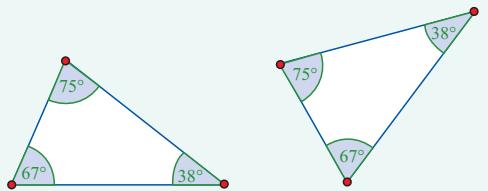
3. a) Kakvi su kutovi kod dva međusobno slična trokuta?
- b) Što znači kada kažemo da su stranice sličnih trokuta proporcionalne?
- c) Kako ćeš odrediti koeficijent sličnosti dvaju sličnih trokuta?
- d) Što nam otkriva koeficijent sličnosti dvaju sličnih trokuta?

4. Sličnim trokutima na slici istom bojom oboji parove odgovarajućih stranica.

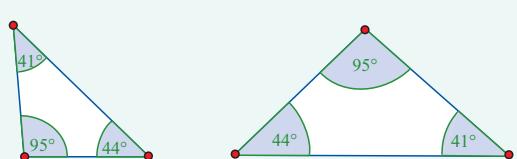
a)



b)

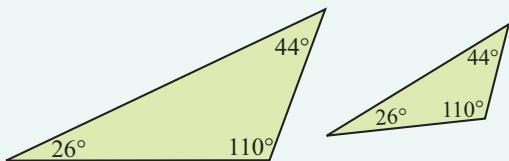


c)

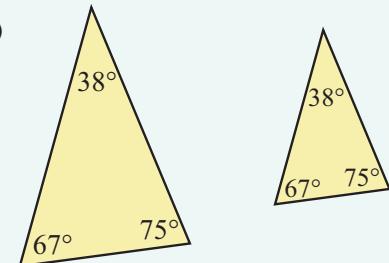


5. Sličnim trokutima na slici istom bojom oboji parove odgovarajućih stranica.

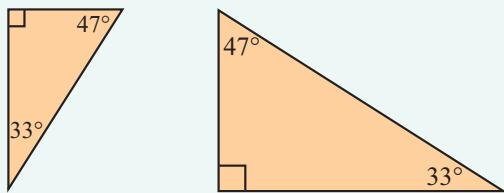
a)



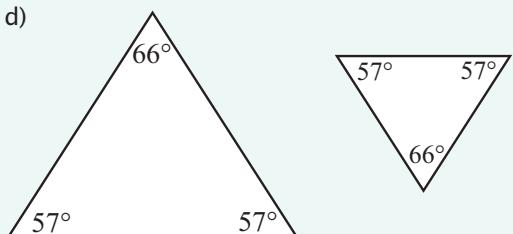
b)



c)



d)



6. Nacrtaj jednakostrojaničan trokut  $\Delta ABC$  kojemu je stranica  $a = 4$  cm i neki njemu sličan trokut  $\Delta A'B'C$ .

a) Napiši matematičkim simbolima da su ta dva trokuta slična;

b) Mora li trokut  $\Delta A'B'C$  također biti jednakostrojaničan?

c) Koliki je koeficijent sličnosti između trokuta  $\Delta ABC$  i  $\Delta A'B'C$  u tvom primjeru?

d) Jesu li svaka dva jednakostrojanična trokuta slična? Zašto?

7. Konstruiraj trokut  $\Delta ABC$  kojemu su stranice duge: 0.7 dm, 5 cm i 6 cm;

a) Konstruiraj trokut  $\Delta A'B'C$  kojemu su stranice dva puta manje od odgovarajućih stranica trokuta  $\Delta ABC$ ;

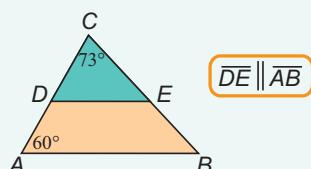
b) Jesu li ti trokuti slični? Ako jesu, koliki im je koeficijent sličnosti?

8. Trokutima  $\Delta ABC$  i  $\Delta CDE$  sa slike odredi veličine preostalih kutova.

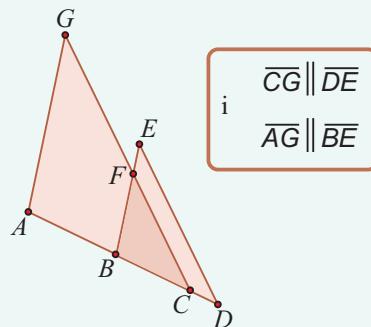
Jesu li trokuti  $\Delta ABC$  i  $\Delta CDE$  slični?

Možeš li povezati Talesov poučak o proporcionalnim dužinama sa sličnosti trokuta?

Sjeti se kutova s usporednim kracima



9. Napiši sve parove međusobno sličnih trokuta sa slike.



## 5.3. Poučci o sličnim trokutima

### Sukladnost trokuta

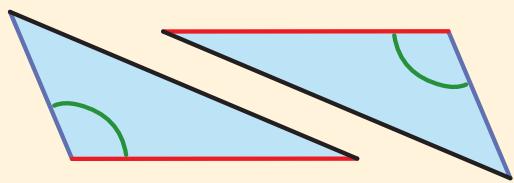
Sjetimo se poučaka o sukladnosti trokuta. Ispod svake slike zapiši na osnovi kojeg su poučka zadani trokuti sukladni.

$\cong$   
"je sukladan"

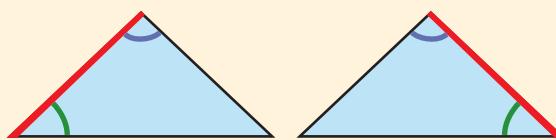
a)



b)



c)



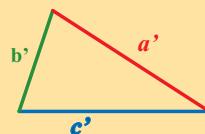
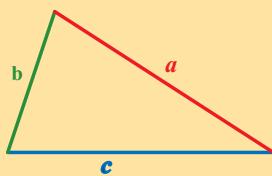
Naučili smo da slični trokuti imaju jednake veličine svih triju kutova. To znači da bismo trebali, želimo li sa sigurnošću utvrditi jesu li dva trokuta slična, svaki put mjeriti sve kutove jednoga i sve kutove drugoga trokuta. Zanima nas možemo li i na temelju manje podataka o kutovima trokuta zaključiti jesu li oni slični. Matematičari su utvrdili i dokazali da možemo. Lako ih je upamtiti jer nalikuju na poučke o sukladnosti trokuta.

### Važno

#### 1. Poučak o sličnosti trokuta:

stranica – stranica – stranica (SSS)

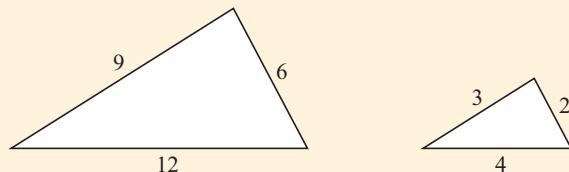
Ako su omjeri duljina svih triju odgovarajućih stranica jednaki, onda su ti trokuti slični.



ako je  $a : a' = b : b' = c : c'$   
onda je  $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

## Primjer 1.

### Omjeri odgovarajućih stranica.



Jesu li trokuti na slici slični?

#### Rješenje:

Poredajmo duljine stranica zadanih trokuta po veličini, i to jedne ispod drugih kako bismo bolje uočili parove odgovarajućih stranica:

6,      9,      12

2,      3,      4

Napravimo omjere odgovarajućih stranica:

$$\frac{6}{2} = \frac{9}{3} = \frac{12}{4} = 3$$

Budući su omjeri duljina odgovarajućih stranica jednaki, tada su zadani trokuti slični

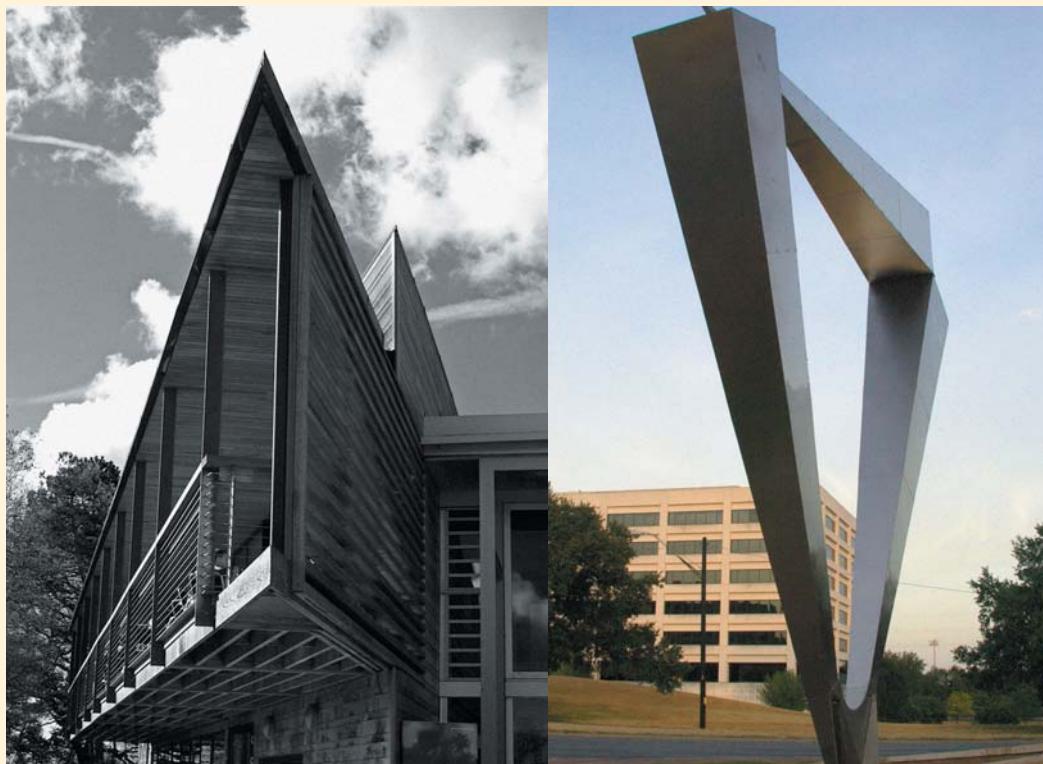
prema poučku o sličnosti stranica – stranica – stranica (SSS).

Stranice trokuta u omjerima se moraju uvijek slagati istim redoslijedom:

$$\begin{array}{lcl} \text{najkraća} & : & \text{najkraća} \\ \text{stranica} & & \text{stranica} \\ \text{malog} & & \text{velikog} \\ \text{trocata} & & \text{trocata} \end{array} =$$

$$\begin{array}{lcl} \text{srednja} & : & \text{srednja} \\ \text{stranica} & & \text{stranica} \\ \text{malog} & & \text{velikog} \\ \text{trocata} & & \text{trocata} \end{array} =$$

$$\begin{array}{lcl} \text{najdulja} & : & \text{najdulja} \\ \text{stranica} & & \text{stranica} \\ \text{malog} & & \text{velikog} \\ \text{trocata} & & \text{trocata} \end{array} =$$



**Primjer 2.****Izračunavanje stranice sličnoga trokuta**

Trokut  $\Delta ABC$  sličan je **manjem** trokutu  $\Delta A'B'C'$ . Izračunaj nepoznate duljine stranica ovih trokuta ako je za  $\Delta ABC$  zadano:  $a = 7.5 \text{ cm}$  i  $c = 10.5 \text{ cm}$ , za  $\Delta A'B'C'$   $b' = 4 \text{ cm}$  i koeficijent sličnosti  $k = \frac{2}{3}$ .

**Rješenje:**

Pregledno zapišimo zadane i tražene podatke.

$\Delta ABC$	$\Delta A'B'C'$
$a = 7.5 \text{ cm}$	$a' = ?$
$b = ?$	$b' = 4 \text{ cm}$
$c = 10.5 \text{ cm}$	$c' = ?$

Već smo naučili da se stranice trokuta u omjerima moraju uvijek slagati istim redoslijedom.

Kako je koeficijent sličnost  $k = \frac{2}{3}$ , zaključujemo da je:

stranica manjeg  $\Delta$  : stranica većeg  $\Delta$  = 2:3

Napišimo omjere odgovarajućih stranica i izračunajmo nepoznati član omjera vodeći računa da je u ovom zadatku trokut  $\Delta A'B'C'$  manji trokut.

$$a' : a = 2 : 3, \quad 3 \cdot a' = 2 \cdot a,$$

$$3 \cdot a' = 2 \cdot 7.5, \quad a' = 5 \text{ cm}$$

$$b' : b = 2 : 3, \quad 3 \cdot b' = 2 \cdot b,$$

$$3 \cdot 4 = 2 \cdot b, \quad b = 6 \text{ cm}$$

$$c' : c = 2 : 3 \quad 3 \cdot c' = 2 \cdot c,$$

$$3 \cdot c' = 2 \cdot 10.5, \quad c' = 7 \text{ cm}$$

**Zadaci**

- Provjeri jesu li dva trokuta slična ako su duljine stranica:
  - jednoga trokuta 4 cm, 7 cm i 9 cm, a drugoga 6 cm, 10.5 cm i 13.5 cm;
  - jednoga trokuta 6 cm, 5.4 cm, 4.2 cm, a drugoga 2.8 cm, 4 cm i 3.6 cm;
  - jednoga trokuta 7 cm, 5 cm, 10 cm, a drugoga 6 cm, 3 cm, 4 cm;
  - jednoga trokuta 11 dm, 21 dm, 3.5 m, a drugoga 77 dm, 2.31 m, 3.85 m;
  - jednoga trokuta 1 m, 2 m, 5 m, a drugoga 2 m, 1 m, 5 m.
- Za sve parove sličnih trokuta iz prethodnoga zadatka odredi koeficijent sličnosti.
- Svaka dva sukladna trokuta su i slična. Objasni zašto.
- Trokut  $\Delta ABC$  sličan je manjem trokutu  $\Delta A'B'C'$ . Izračunaj nepoznate duljine stranica ovih trokuta ako je za  $\Delta ABC$  zadano:  $b = 10.5 \text{ cm}$  i  $c = 26.5 \text{ cm}$ , za  $\Delta A'B'C'$   $a' = 6 \text{ cm}$  i koeficijent sličnosti  $k = \frac{1}{5}$ .
- Trokuti  $\Delta PQR$  i  $\Delta P'Q'R'$  su slični. Koeficijent sličnosti je  $k = \frac{3}{4}$ . Duljine stranica trokuta  $\Delta PQR$  su:  $p = 24 \text{ cm}$ ,  $q = 48 \text{ cm}$  i  $r = 42 \text{ cm}$ . Izračunaj duljine stranica trokuta  $\Delta P'Q'R'$ 
  - ako je on manji od trokuta  $\Delta PQR$ ;
  - ako je on veći od trokuta  $\Delta PQR$ .

### Primjer 3. Još o računanju duljina stranica sličnih trokuta

Trokuti  $\Delta ABC$  i  $\Delta A'B'C'$  su slični. Izračunaj nepoznate duljine stranica ako je:

- a)  $a = 4 \text{ cm}$ ,  $b' = 8 \text{ cm}$ ,  $c = 6.4 \text{ cm}$  i  
 $a : a' = 4 : 5$ ;
- b)  $a' = 28 \text{ mm}$ ,  $b = 12 \text{ mm}$ ,  $c' = 3.2 \text{ cm}$  i  
 $c = 8 \text{ mm}$ .

#### Rješenje:

a) Zapišimo zadane i tražene podatke.

$\Delta ABC$	$\Delta A'B'C'$
$a = 4 \text{ cm}$	$a' = ?$
$b = ?$	$b' = 8 \text{ cm}$
$c = 6.4 \text{ cm}$	$c' = ?$

Još nam je zadan omjer stranica

$a : a' = 4 : 5$ . Taj podatak nam kaže, budući da su trokuti slični, da se i sve ostale stranice trokuta  $\Delta ABC$  odnose prema odgovarajućim stranicama trokuta  $\Delta A'B'C'$  u omjeru  $4 : 5$ .



## Zadaci

6. Trokuti  $\Delta ABC$  i  $\Delta A'B'C'$  su slični. Izračunaj nepoznate duljine stranica ako je:
- a)  $a = 15 \text{ cm}$ ,  $b' = 24 \text{ cm}$ ,  $c = 36 \text{ cm}$  i  
 $a : a' = 4 : 3$ ;
  - b)  $\frac{b'}{b} = \frac{5}{3}$  i  $b' = 10 \text{ cm}$ ,  $a = 5.4 \text{ cm}$ ,  $c' = 15 \text{ cm}$ ;
  - c)  $a' = 25 \text{ mm}$ ,  $b = 80 \text{ mm}$ ,  $c' = 30 \text{ mm}$  i  $c = 6 \text{ cm}$ .

$$a : a' = 4 : 5, \quad 4 : a' = 4 : 5, \quad 4 \cdot a' = 5 \cdot 4, \quad a' = 5 \text{ cm}$$

$$b : b' = 4 : 5, \quad b : 8 = 4 : 5, \quad 5 \cdot b = 4 \cdot 8, \quad b = 6.4 \text{ cm}$$

$$c : c' = 4 : 5, \quad 6.4 : c' = 4 : 5, \quad 4 \cdot c' = 5 \cdot 6.4, \quad c' = 8 \text{ cm}$$

b) Ovaj zadatak rješavamo kao i zadatak a), samo što ovdje nije zadan omjer dviju odgovarajućih stranica.

$$\Delta ABC \qquad \qquad \qquad \Delta A'B'C'$$

$$a = ? \qquad \qquad \qquad a' = 28 \text{ mm}$$

$$b = 12 \text{ mm} \qquad \qquad \qquad b' = ?$$

$$c = 8 \text{ mm} \qquad \qquad \qquad c' = 3.2 \text{ cm} = 32 \text{ mm}$$

No kako su nam poznate dvije odgovarajuće stranice,  $c$  i  $c'$ , sami određujemo njihov omjer. Možemo se odlučiti za omjer  $c' : c$  ili za omjer  $c : c'$ .

$$c' : c = 32 : 8, \text{ tj. } c' : c = 4. \text{ Evo rješenja:}$$

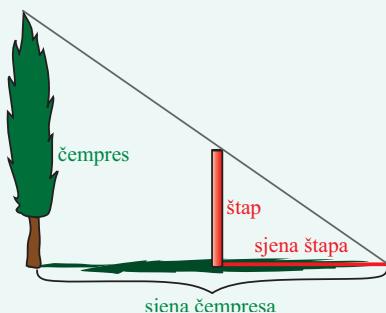
$$a' : a = 4, \quad 28 : a = 4, \quad a = 28 : 4, \quad a = 7 \text{ mm};$$

$$b' : b = 4, \quad 12 : b = 4, \quad b' = 12 \cdot 4, \quad b' = 48 \text{ mm}.$$

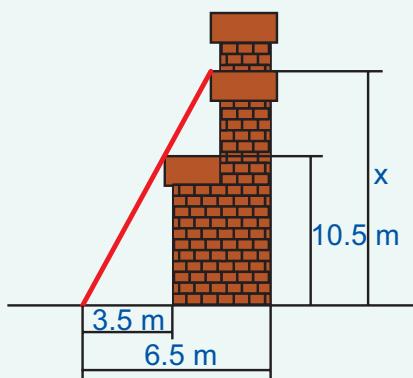
7. Duljine stranica jednoga trokuta su:  $51 \text{ mm}$ ,  $36 \text{ mm}$  i  $42 \text{ mm}$ . Kolike su duljine njemu sličnoga trokuta, ako je:
- a) duljina njegove najkraće stranice  $30 \text{ mm}$ ;
  - b) duljina njegove najdulje stranice  $3 \text{ cm}$ ?

8. Maja, Luka i Matija mjerili su visinu čempresa u školskom dvorištu. Matija je učvrstio u tlo te mjeranjem utvrdio da je duljina sjene čempresa 10 m, a duljina sjene štapa 1.25 m.

Koliko je visok čempres ako je visina štapa 1 m?



9. Motka je naslonjena na zid kao na slici. Na kojoj visini ona dodiruje stražnji zid?



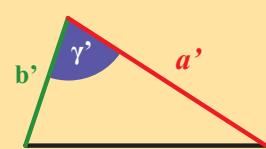
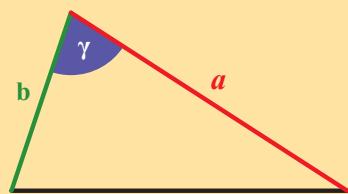
### Važno

#### 2. Poučak o sličnosti trokuta:

stranica – kut – stranica (SKS)

Ako je jedan unutarnji kut

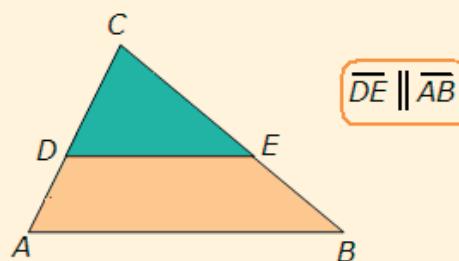
jednoga trokuta jednak po veličini odgovarajućem kutu drugoga trokuta i ako su omjeri duljina stranica uz taj kut jednaki, onda su ti trokuti slični.



ako je  $\gamma = \gamma'$  i  $a : a' = b : b'$ , onda je  $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

### Primjer 4. Talesovim poučkom do sličnih trokuta

Pogledaj ova dva trokuta na slici. Objasni zašto su trokuti  $\triangle ABC$  i  $\triangle CDE$  slični.



### Rješenje:

Dužine  $\overline{DE}$  i  $\overline{AB}$  usporedne su i presijecaju krakove kuta  $\angle BCA$ .

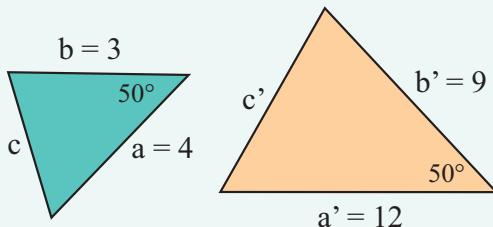
Stoga, prema Talesovu poučku, vrijedi proporcija:  $|CA| : |CD| = |CB| : |CE|$ .

Također vidimo da trokuti  $\triangle ABC$  i  $\triangle CDE$  imaju jedan par sukladnih kutova:  $\angle BCA \cong \angle ECD$ .

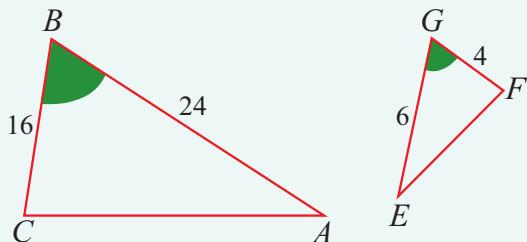
Stoga je  $\triangle ABC \sim \triangle CDE$  prema poučku o sličnosti trokuta stranica – kut – stranica (SKS).

## Zadaci

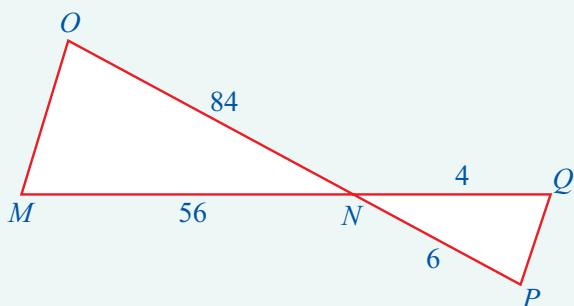
10. jesu li trokuti na slici slični? Objasni zašto. Ako jesu, odredi koeficijent sličnosti.



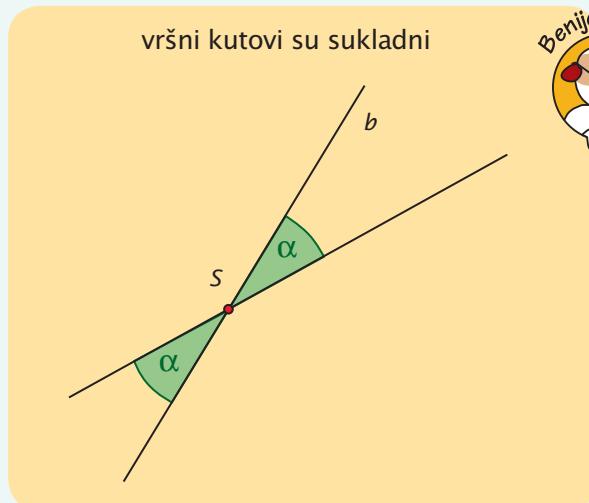
11. Pogledaj skice trokuta  $\Delta ABC$  i  $\Delta EFG$ . Unutarnji kut trokuta  $\Delta ABC$  s vrhom u točki  $B$  sukladan je unutarnjem kutu trokuta  $\Delta EFG$  s vrhom u točki  $G$ .  
Objasni jesu li ovi trokuti slični.  
Ako jesu, napiši preostala dva para sukladnih kutova.  
Kolika je duljina stranice  $\overline{EF}$  ako je  $|AC| = 20$ ?



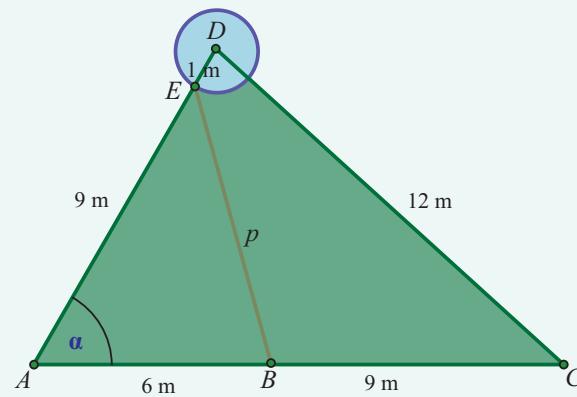
12. Na slici je skica trokuta  $\Delta MNO$  i  $\Delta NPQ$ .



- a) objasni zašto su trokuti  $\Delta MNO$  i  $\Delta NPQ$  slični;  
b) odredi omjer odgovarajućih stranica;  
c) izračunaj duljinu dužine  $\overline{MO}$  ako je  $|PQ| = 3$ .



13. Matijin tata napravio je nacrt za vrt u obliku trokuta. Predviđao je i mali bazen s vodom.  
Do bazena se dolazi puteljkom označenim slovom  $p$ . Na skici je zapisao dimenzije vrta, ali nikako ne može izračunati koliko će biti dug puteljak  $p$ .  
Pažljivo prouči skicu i potraži slične trokute. Nakon toga probaj izračunati koliko je dug puteljak  $p$ .

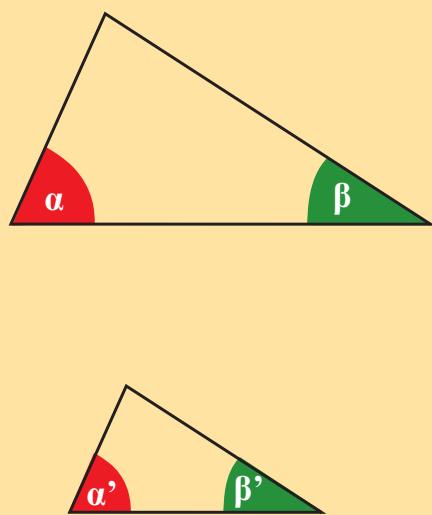


## Važno

## 3. Poučak o sličnosti trokuta:

kut – kut (KK)

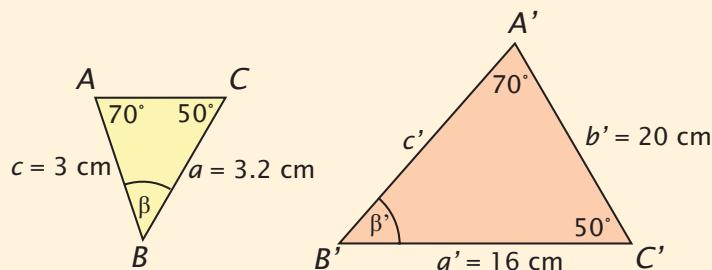
Ako su dva unutarnja kuta jednoga trokuta jednaka po veličini dvama kutovima drugoga trokuta, onda su ti trokuti slični.



ako je  $\alpha = \alpha'$  i  $\beta = \beta'$ , onda je  
 $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

## Primjer 5. Primjena poučka o sličnosti trokuta kut – kut

Izračunaj nepoznate duljine stranica i veličine kutova trokuta sa slike.



## Rješenje:

Trokuti na slici imaju dva unutarnja kuta jednaka po veličini. Prema poučku o sličnosti trokuta kut – kut (KK) ovi su trokuti slični.

U ovim trokutima nasuprot kutovima od  $70^\circ$  leže stranice  $a$  i  $a'$  čije su nam duljine poznate. Zato ćemo izračunati omjer ovih stranica i tako dobiti koeficijent sličnosti:

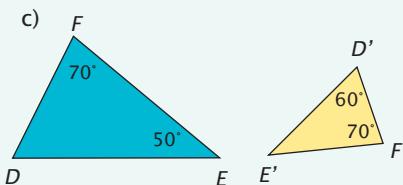
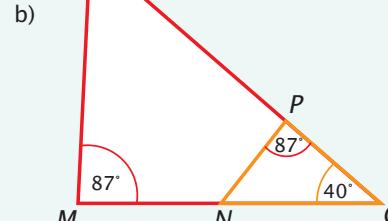
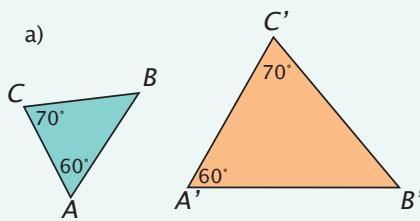
$k = a : a' = 16 : 3.2 = 5$ . To znači da je svaka stranica većega trokuta pet puta dulja od odgovarajuće stranice manjega trokuta i obrnuto:

$$c' = 5 \cdot 3 = 15 \text{ cm}, \quad b = 20 : 5 = 4 \text{ cm}.$$

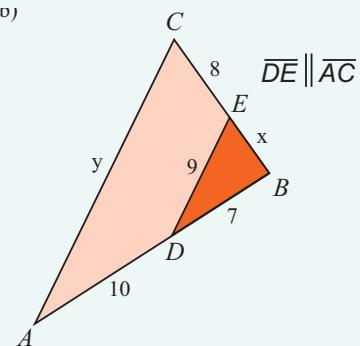
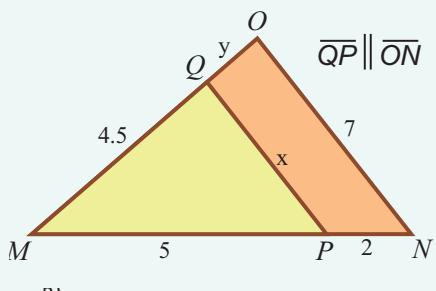
Kut  $\beta = 180^\circ - (70^\circ + 50^\circ) = 60^\circ$ . Odmah možemo zaključiti da je kut  $\beta' = 60^\circ$  jer su sličnim trokutima odgovarajući kutovi jednake veličine.

## Zadaci

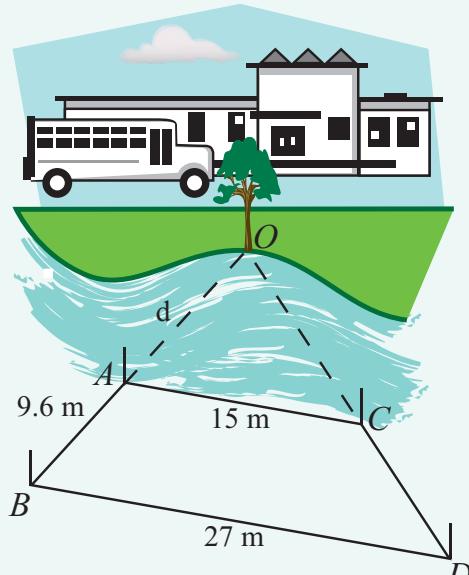
14. Jesu li trokuti sa slike slični? Zapiši to matematičkim simbolima.



15. Izračunaj duljine  $x$  i  $y$  sa slike.



16. Učenici mjeru širinu rijeke. Probaj opisati postupak. Kolika je širina rijeke  $d$ ?



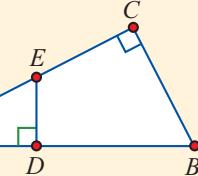
### Primjer 6.

#### Primjena poučka KK o sličnosti trokuta na pravokutni trokut

- Jesu li svaka dva pravokutna trokuta međusobno slična?
- Provjeri sličnost trokuta  $\triangle ABC$  i  $\triangle ADE$  sa slike.

#### Rješenje:

- a) Svi pravokutni trokuti imaju jedan kut jednak veličine. To je pravi kut koji iznosi  $90^\circ$ .

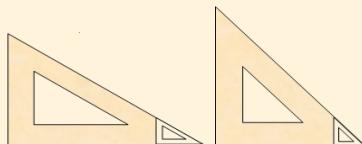


Međutim njihovi šiljasti kutovi mogu biti različitih veličina. Primjerice, pravokutni trokut kojemu je jedan šiljasti kut  $38^\circ$  nije sličan pravokutnom trokutu kojemu je jedan šiljasti kut  $50^\circ$ . Stoga zaključujemo da svaka dva pravokutna trokuta nisu međusobno slična jer njihovi šiljasti kutovi mogu imati različite veličine.

- b) Za trokute sa slike zaključujemo da vrijedi:  $\triangle ABC \sim \triangle ADE$  prema poučku o sličnosti trokuta kut – kut (KK).

Naime oba su trokuta pravokutna i uz to imaju jedan šiljasti kut jednak veličine.

sličnost  
pravokutnih  
trokuta



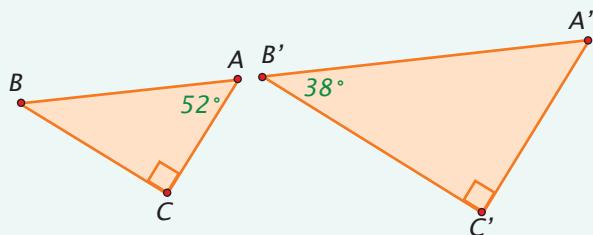
UČITELJICE, PA NAŠI TROKUTI ZA CRTANJE SU SLIČNI VAŠIM!



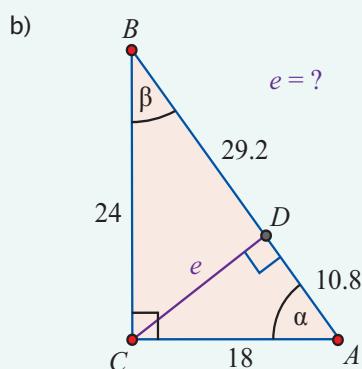
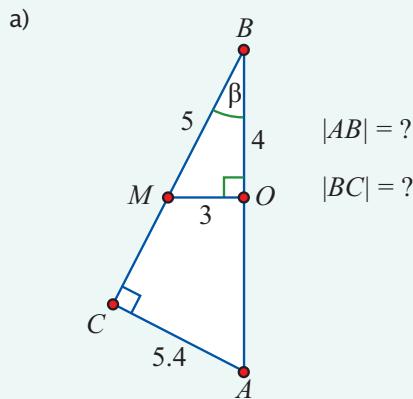
TAKO JE!  
UTVRDIMO KOLIKI  
JE KOEFICIJENT  
SЛИЧНОСТИ!

## Zadaci

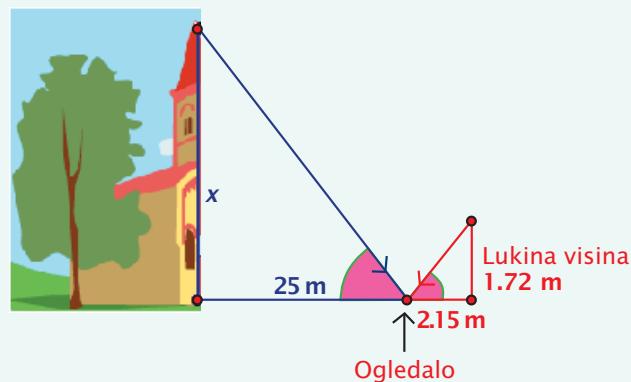
17. Obrazloži zašto je  $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ . Odredi veličine kutova  $\angle ABC$  i  $\angle C'A'B$ .



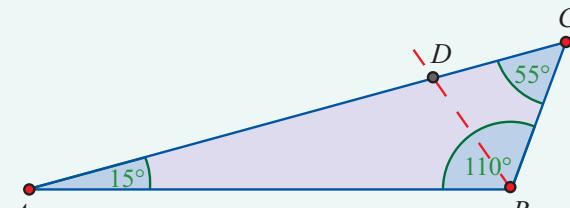
18. Potraži slične trokute na slici i odredi nepoznate duljine stranice.



19. Luka želi izmjeriti visinu crkvenoga tornja. Kako nije bio sunčan dan, odlučio je to učiniti pomoću zrcala. Luka zna da se zrake svjetlosti odbijaju od zrcala pod istim kutom pod kojim i padaju na zrcalo. Udaljio se 25 m od tornja i položio zrcalo na tlo. Zatim se nastavio odmicati sve dok u zrcalu nije ugledao vrh tornja. Zadatak je riješio prema poučku o sličnosti trokuta kut – kut (KK). Služeći se podacima sa slike, izračunaj visinu crkvenog tornja.



20. Pogledaj trokut  $\Delta ABC$  na slici. Polupravac  $BD$  koji je simetrala kuta  $\angle ABC$  sijeće nasuprotnu stranicu  $AC$  u točki  $D$  i tako dijeli trokut  $\Delta ABC$  na dva trokuta. Pronađi trokut koji je sličan trokutu  $\Delta ABC$ .

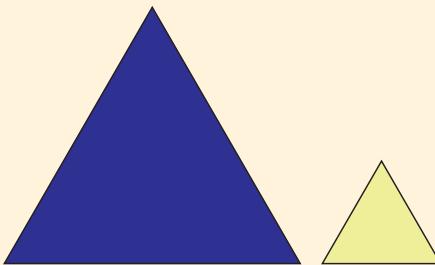


## 5.4. Opseg i površina sličnih trokuta

Pogledaj slične trokute na slici. Manji trokut opasan je vrpcom.

a) Koliko puta dulja vrpca ti treba da bi opasao veliki trokut?

b) S koliko malih trokuta možeš prekriti veliki trokut?

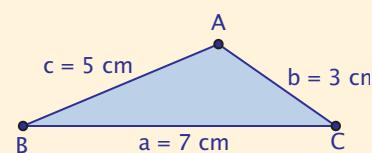
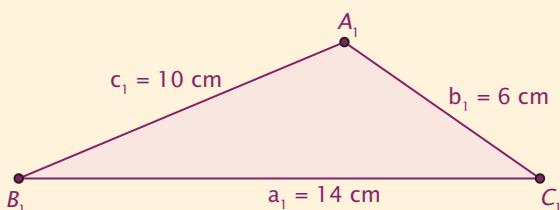


### Primjer 1.

#### Omjer opsega sličnih trokuta

a) Uvjeri se da su trokuti  $\Delta ABC$  i  $\Delta A_1B_1C_1$  sa slike slični.

b) Kako se odnose opsezi tih trokuta?



#### Rješenje:

a) Najprije treba postaviti stranice trokuta po veličini:

Napravimo omjere odgovarajućih stranica:  
 $\frac{6}{3} = \frac{10}{5} = \frac{14}{7} = 2$ . Budući da su omjeri odgovarajućih stranica jednaki, trokuti su slični s koeficijentom sličnosti  $k = 2$ .

b) Da bismo vidjeli kako se odnose opsezi trokuta moramo izračunati koliko je puta

opseg jednoga trokuta veći od opsega drugoga trokuta, tj. moramo odrediti njihov omjer  $\frac{o_1}{o}$ .

Opseg  $\Delta ABC$  jednak je:  
 $o_1 = a_1 + b_1 + c_1$ ,  $o_1 = 30 \text{ cm}$

Opseg  $\Delta A_1B_1C_1$  jednak je:  
 $o = a + b + c$ ,  $o = 15 \text{ cm}$ .

$$\frac{o_1}{o} = \frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \frac{c_1}{c} = k$$

omjer opsega sličnih trokuta

$$\frac{o_1}{o} = k$$

**Omjer opsega**  $\frac{o_1}{o} = \frac{30}{15} = 2$ , a upravo je toliki i koeficijent sličnosti  $k$  za ova dva trokuta.

Opsezi sličnih trokuta odnose se kao duljine bilo kojih dviju odgovarajućih stranica tih trokuta:

Dokažimo da jednakost  $\frac{o_1}{o} = \frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \frac{c_1}{c} = k$  vrijedi za svaka dva slična trokuta.

Budući da je  $\frac{a_1}{a} = k$ ,  $\frac{b_1}{b} = k$  i  $\frac{c_1}{c} = k$ , tada

vrijedi:  $a_1 = k \cdot a$ ,  $b_1 = k \cdot b$  i  $c_1 = k \cdot c$ .

Opseg  $o_1 = a_1 + b_1 + c_1 = k \cdot a + k \cdot b + k \cdot c$ .

Izlučivanjem zajedničkog faktora  $k$  dobije se:

$o_1 = k \cdot (a + b + c)$ . A kako je  $a + b + c = o$ ,

onda je  $o_1 = k \cdot o$  tj.  $\frac{o_1}{o} = k$ .

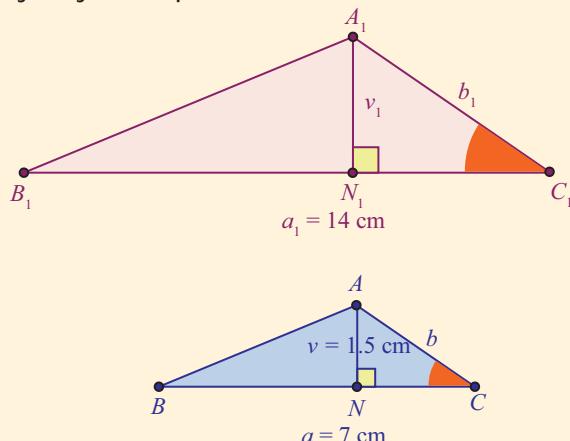


## Zadaci

1. Opseg trokuta  $\Delta ABC$  je 24 cm. Izračunaj opseg njemu sličnoga trokuta  $\Delta A_1B_1C_1$  ako se zna da je duljina najkraće stranice trokuta  $\Delta ABC$  3 cm, a duljina najkraće stranice  $\Delta A_1B_1C_1$  12 cm.
2. Trokuti  $\Delta ABC$  i  $\Delta A'B'C'$  su slični. Izračunaj duljine stranica trokuta  $\Delta A'B'C'$  ako su zadane:
  - a) duljine stranica  $a = 5$  dm,  $b = 12$  dm i  $c = 8$  dm  $\Delta ABC$  i opseg  $o' = 20$  cm  $\Delta A'B'C'$ ;
  - b) duljine stranica  $a = 7.8$  m,  $b = 9$  m i  $c = 10$  m  $\Delta ABC$  i opseg  $o' = 20.1$  m  $\Delta A'B'C'$ ;

### Primjer 2. Koliko sam puta veći

Trokuti  $\Delta A_1B_1C_1$  i  $\Delta ABC$  su slični. Izračunaj omjer njihovih površina.



#### Rješenje:

Trokuti  $\Delta A_1B_1C_1$  i  $\Delta ABC$  slični su, s koeficijentom sličnosti  $k = \frac{a_1}{a} = \frac{14}{7} = 2$ .

Dužine  $A_1N_1$  i  $AN$  su visine tim trokutima.

c) duljine stranica  $a = 4$  cm,  $b = 5$  cm i  $c = 7$  cm  $\Delta ABC$  i opseg  $o' = 10$  cm  $\Delta A'B'C'$ .

3. Duljine odgovarajućih stranica dvaju međusobno sličnih trokuta su 35 cm i 21 cm.
  - a) Izračunaj opseg manjega trokuta ako je opseg većega 91 cm;
  - b) Izračunaj opseg većega trokuta ako je opseg manjega 63 cm.

Primijetimo da je  $\Delta A_1N_1C_1 \sim \Delta ANC$  prema poučku o sličnosti trokuta kut – kut (KK). Budući da znamo da je omjer  $\frac{b_1}{b} = 2$ , onda znamo i koeficijent sličnosti trokuta  $\Delta A_1N_1C_1$  i  $\Delta ANC$ , tj.  $k = 2$ .

Zbog toga je omjer  $\frac{v_1}{v} = 2$ , tj.  $v_1 = 2 \cdot v = 3$  cm.

Duljine visina sličnih trokuta odnose se kao duljine bilo kojih dviju odgovarajućih stranica tih trokuta:  $\frac{v_1}{v} = k$



Površina trokuta  $\Delta ABC$  je

$$P_1 = \frac{a \cdot v_1}{2} = \frac{14 \cdot 3}{2} \text{ cm}^2 = 21 \text{ cm}^2,$$

a površina trokuta  $\Delta A_1B_1C_1$

$$\text{je } P = \frac{a_1 \cdot v}{2} = \frac{7 \cdot 1.5}{2} \text{ cm}^2 = 5.25 \text{ cm}^2.$$

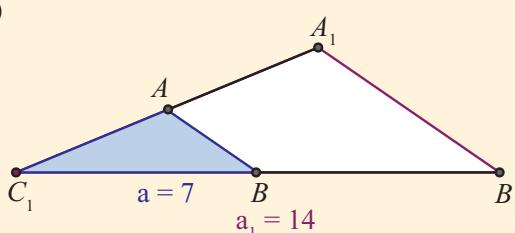
$$\text{Omjer površina } \frac{P_1}{P} = \frac{21}{5.25} = \frac{2100}{525} = 4.$$

Procijeni koliko ti treba manjih trokuta da bi prekrio površinu većega trokuta.

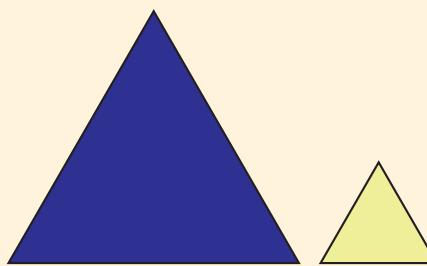
### Primjer 3. Omjer površina sličnih trokuta

Pogledaj parove sličnih trokuta na slici.

a)



b)

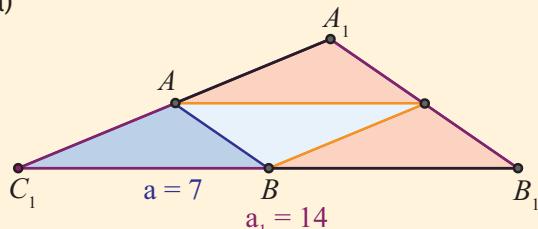


## Rješenje:

omjer  
površina  
sličnih trokuta

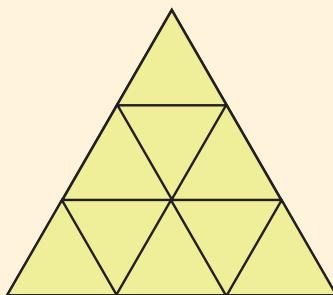
Od dvaju sličnih trokuta pre-  
crtajmo na papir manji trokut,  
izrežimo ga i položimo na veći  
trocuk.

a)



Premjerimo površinu većega trokuta površinom manjega trokuta.

b)



Što zaključuješ?

Na slici a) površina većeg : površina manjeg = 4, dok je omjer odgovarajućih stranica 2, tj.  $k = 2$ . Zaključujemo  $\frac{P_1}{P} = 2 \cdot 2$ .

Na slici b) površina većeg : površina manjeg = 9, a omjer odgovarajućih stranica je 3, tj.  $k = 3$ . Zaključujemo  $\frac{P_1}{P} = 3 \cdot 3$ .

$$\frac{P_1}{P} = k \cdot k$$

Omjer površina dvaju sličnih trokuta jednak je umnošku koeficijenta sličnosti  $k$  sa samim sobom:



Omjer površina dvaju sličnih trokuta. Neka je  $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$  s koeficijentom sličnosti  $k$ .

$$\frac{P_1}{P} = \frac{a_1 \cdot v_1}{2} : \frac{a \cdot v}{2} = \frac{a_1 \cdot v_1}{2} \cdot \frac{2}{a \cdot v} .$$

$$\text{Nakon skraćivanja dobije se: } \frac{P_1}{P} = \frac{a_1 \cdot v_1}{a \cdot v} .$$

Pritom vrijedi  $a_1 = k \cdot a$  i  $v_1 = k \cdot v$  te je

$$\frac{P_1}{P} = \frac{a_1 \cdot v_1}{a \cdot v} = \frac{k \cdot a \cdot k \cdot v}{a \cdot v} = k \cdot k$$

Dakle  $\frac{P_1}{P} = k \cdot k$ . Umnožak  $k \cdot k$  kraće se piše  $k^2$  i čita "ka na kvadrat". Zato se često kaže da se površine sličnih trokuta odnose kao kvadrati duljina odgovarajućih stranica:

$$\frac{P_1}{P} = k^2$$

## Zadaci

4. Koliki je omjer površina dvaju sličnih trokuta:
  - a) ako su duljine dviju odgovarajućih stranica tih trokuta  $15\text{ cm}$  i  $3\text{ cm}$ ;
  - b) ako je visina većega trokuta  $84\text{ mm}$ , a odgovarajuća visina manjega trokuta  $12\text{ mm}$ ;
  - c) ako je omjer njihovih opsega .
5. Trokut ima osnovicu duljine  $a = 6\text{ dm}$ , a pripadnu visinu. Kolika je površina njemu sličnoga trokuta kojemu je osnovica  $a' = 3\text{ cm}$ .
6. Duljine odgovarajućih stranica dvaju međusobno sličnih trokuta su  $35\text{ cm}$  i  $21\text{ cm}$ .
  - a) Izračunaj površinu manjega trokuta ako je površina većega  $91$ ;
  - b) Izračunaj površinu većega trokuta ako je površina manjega  $63$  .
7. Travnjak u obliku trokuta ima osnovicu dugu  $15\text{ m}$  i visinu duljine  $8.5\text{ m}$ . U sredini je napravljena gredica za tulipane. Gredica je u obliku trokuta istog oblika kao i travnjak. Duljina osnovice trokutaste gredice je  $5\text{ m}$ .
  - a) Kolika je ukupna površina travnjaka?
  - b) Koliki dio travnjaka otpada na gredicu za tulipane?
  - c) Da bi se travnjak zasijao tulipanima potrebno je  $20\text{ g}$  sjemena. Koliko je sjemena potrebno za cijelu gredicu?
8. Površine dvaju sličnih trokuta su  $36\text{ cm}^2$  i  $25\text{ cm}^2$ . Duljine stranice manjega trokuta su:  $5\text{ cm}$ ,  $6.5\text{ cm}$  i  $7.5\text{ cm}$ . Koliki su opsezi tih trokuta?

## 5.5. Ponavljanje gradiva

### Pitanja za ponavljanje:

1. Na koliko dijelova možeš podijeliti dužinu njezinom simetralom? Nabroji nekoliko primjera.
2. Opiši kako možeš izračunati visinu neke zgrade, stabla, crkvenog tornja.
3. Izreci Talesov poučak o proporcionalnim dužinama na krakovima kuta.
4. Što je jednako, a što različito dvama sličnim likovima?
5. Mogu li krug i trokut sličiti jedan drugome?
6. Nabroji nekoliko geometrijskih likova koji su uvijek međusobno slični.
7. Kada kažemo da su dva trokuta slična?
8. Kakvi su kutovi kod dvaju međusobno sličnih trokuta?
9. Što znači kada kažemo da su odgovarajuće stranice sličnih trokuta proporcionalne?
10. Kako ćeš odrediti koeficijent sličnosti dvaju sličnih trokuta?
11. Što nam otvara koeficijent sličnosti dvaju sličnih trokuta?
12. Objasni što znači kada kažemo da su dva trokuta slična u omjeru:
  - a)  $1 : 2$ ;
  - b)  $2 : 5$ ;
  - c)  $6 : 1$ .
13. Izreci i crtežom poprati poučak o sličnosti trokuta stranica – stranica – stranica (SSS).
14. Izreci i crtežom poprati poučak o sličnosti trokuta stranica – kut – stranica (SKS).
15. Izreci i crtežom poprati poučak o sličnosti trokuta kut – kut (KK).

16. Ako su dva unutarnja kuta jednoga trokuta po veličini jednaka odgovarajućim kutovima drugoga trokuta, jesu li svi kutovi tih trokuta jednakih veličina? Zašto?
17. Jesu li dva sukladna trokuta uvijek slična?
18. Jesu li dva slična trokuta uvijek sukladna?
19. Kako se odnose opsezi sličnih trokuta?
20. Kako se odnose odgovarajuće visine sličnih trokuta?
21. Kako se odnose površine sličnih trokuta?
22. Objasni što znači kada kažemo da se površine dvaju sličnih trokuta odnose kao umnožak koeficijenta sličnosti  $k$  sa samim sobom. Navedi jedan primjer!
23. Ako nekom trokutu uvećamo svaku njegovu stranicu 4 puta, koliko se puta povećala površina toga trokuta?

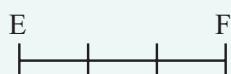
## Zadaci za ponavljanje

1. Odredi omjer dužina  $\overline{AB}$  i  $\overline{CD}$  te omjer dužina  $\overline{EF}$  i  $\overline{GH}$  sa slike:

a)



b)

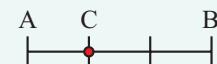


2. U kojem omjeru točka  $C$  dijeli dužinu  $\overline{AB}$ ?

a)



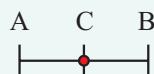
b)



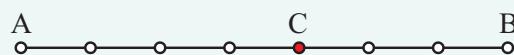
c)



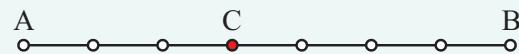
d)



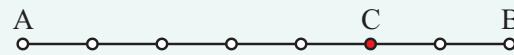
e)



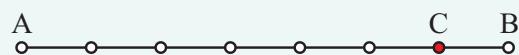
f)



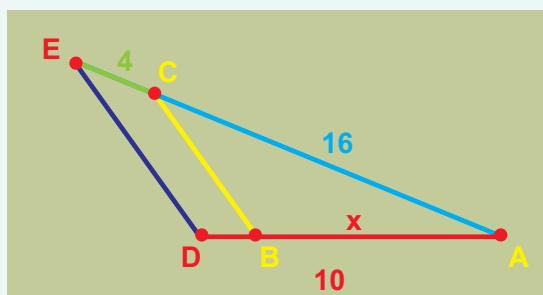
g)



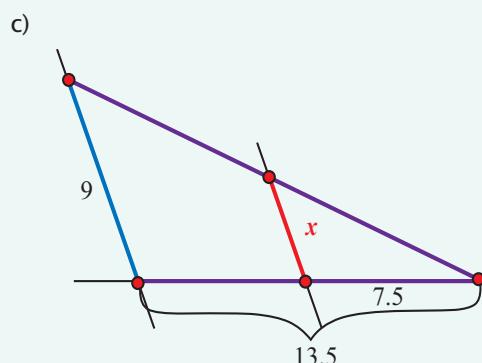
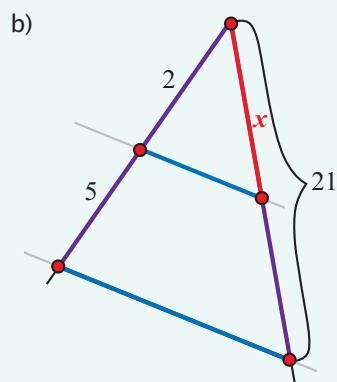
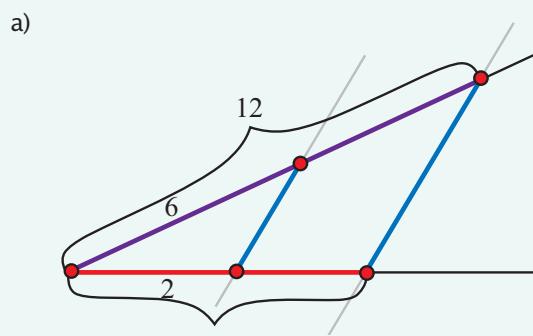
h)



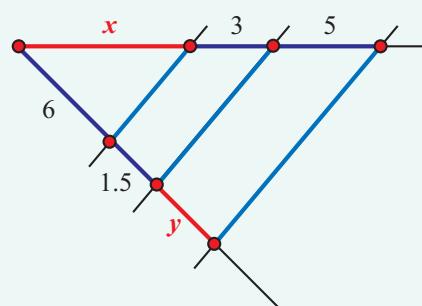
3. Izračunaj nepoznatu duljinu dužine sa skice (sve su mjere izražene istom mjerom jedinicom).



4. Izračunaj nepoznatu duljinu dužine sa skice (sve su mjere izražene istom mjerom jedinicom).

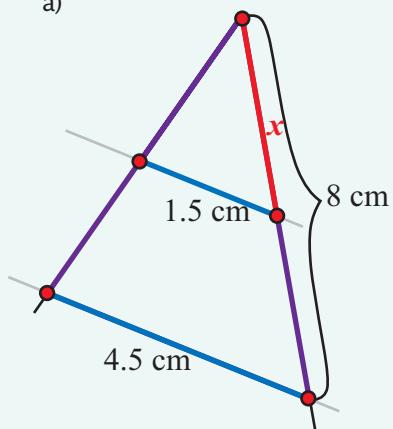


d)

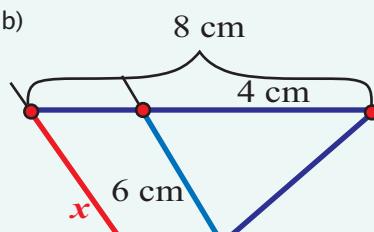


5. Izračunaj nepoznate duljine:

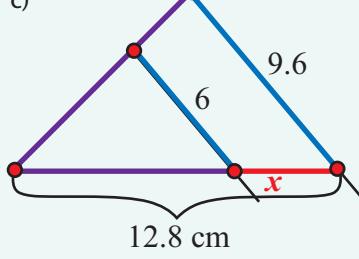
a)



b)



c)

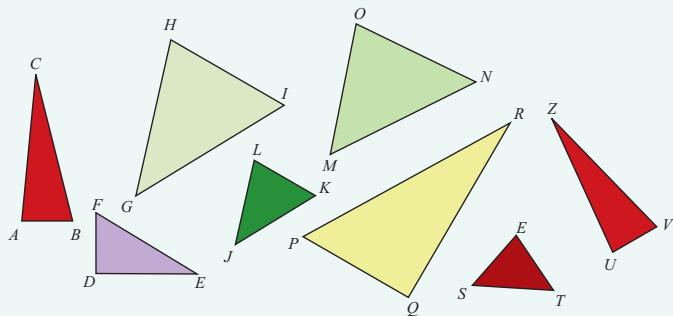


6. Dužinu  $\overline{AB}$  duljine 9 cm podijeli točkama  $A_1, A_2$  i  $A_3$  na četiri jednaka dijela. U kojem su omjeru:
- $|AA_1| : |A_1B|$ ;
  - $|AA_2| : |A_2B|$ ;
  - $|AA_3| : |A_3B|$ ;
  - $|AB| : |A_1B|$ ;
  - $|AB| : |A_2B|$ ;
  - $|AB| : |A_3B|$ .
7. Nacrtaj dužinu  $\overline{AB}$  duljine 10 cm. Na toj dužini konstruiraj točku  $C$  tako da vrijedi:  $|AC| : |CB| = 1 : 2$ .
8. Konstruiraj kvadrat opsega 11 cm.
9. Konstruiraj trokut opsega 11 cm tako da mu se duljine stranica odnose kao  $2 : 3 : 4$ .
10. Konstruiraj trokut opsega 13 cm tako da mu se duljine stranica odnose kao  $3 : 4 : 6$ .

11. Spoji parove sličnih likova:

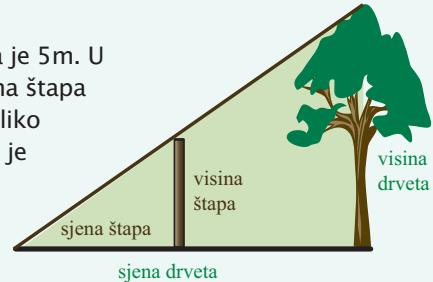


12. Napiši parove sličnih trokuta koji se nalaze na slici.



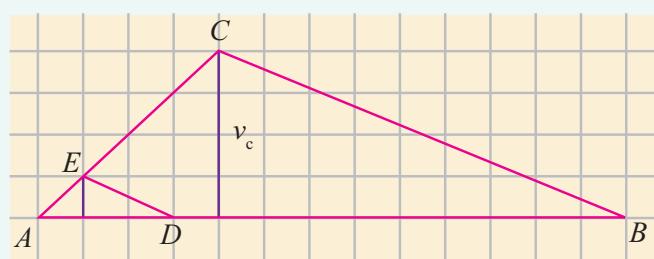
13. Provjeri jesu li dva trokuta slična ako su duljine stranica:
- jednoga trokuta 4 cm, 6 cm, 5 cm, a drugoga 8 cm, 10 cm, 12 cm?
  - jednoga trokuta 18 dm, 10 dm, 12 dm, a drugoga 9 dm, 5 dm, 6 dm?
  - jednoga trokuta 7 cm, 24 cm i 28 cm, a drugoga 10.5 cm, 36 cm i 42 cm;
  - jednoga trokuta 6 cm, 5.4 cm, 4.2 cm, a drugoga 3.15 cm, 4.5 cm i 4.05 cm?
  - jednoga trokuta 1 m, 2 m, 5 m, a drugoga 2 m, 1 m, 5 m?
14. Trokuti  $\Delta ABC$  i  $\Delta A'B'C'$  su slični. Izračunaj nepoznate duljine stranica ako je:
- $a = 15 \text{ cm}$ ,  $b' = 24 \text{ cm}$ ,  $c = 36 \text{ cm}$  i  $a : a' = 1 : 3$ ;
  - $a' = 21 \text{ mm}$ ,  $b = 80 \text{ mm}$ ,  $a = 49 \text{ mm}$  i  $c = 84 \text{ cm}$ ;
  - $a' = 17 \text{ mm}$ ,  $c' = 9 \text{ mm}$ ,  $b = 5.2 \text{ cm}$  i  $c = 3.6 \text{ cm}$ .

15. Sjena bora duga je 5m. U isto vrijeme sjena štapa duga je 1 m. Koliko je visok bor ako je duljina štapa 1.5 m?



16. Izračunaj visinu električnog stupa ako u isto doba dana štap dug 2 m baca sjenu dugačku 1 m, a stup sjenu dugačku 35 dm. Skiciraj zadatak tako da sve duljine umanjиш 100 puta.

17. Opsezi sličnih trokuta odnose se  $2 : 3$ .
- Koliki je opseg manjega trokuta ako je opseg većega trokuta 45 cm?
  - Koliki je opseg većega trokuta ako je opseg manjega trokuta 18 cm?
18. U kojem su omjeru površine trokuta na slici?



19. Trokutu  $\Delta PQR$  stranice su dugačke 5 dm, 9 dm i 6 dm. Opseg njemu sličnoga trokuta  $\Delta P'Q'R'$  je 15 dm, a površina  $45 \text{ dm}^2$ . Kolika je površina trokuta  $\Delta PQR$ ?

20. Luka je u dvorištu nacrtao trokut sa stranicama duljine 12 cm, 18 cm i 27 cm. Zatim je Maja nacrtala trokut koji je sličan Lukinu. Jedna stranica njezina trokuta duga je 24 cm, a druga 36 cm. Možeš li otkriti koliko je duga treća stranica Majina trokuta? Razmotri sve mogućnosti.

## Primjerak oglendog testa:

1. U kojem omjeru točka  $P$  dijeli dužinu  $MN$ ?

a)



b)



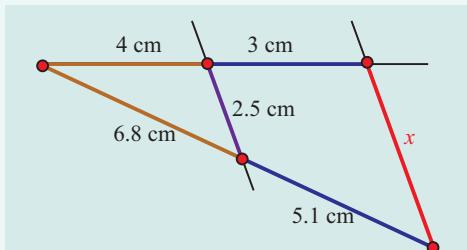
c)



d)



2. Izračunaj nepoznatu duljinu  $x$  sa slike.



3. Proizvoljnu dužinu  $\overline{AB}$  geometrijskom konstrukcijom podijeli na tri jednaka dijela.

Dobivene diobene točke označi redom:  $M$  i  $N$ .

Napiši i objasni na crtežu omjere dobivenih dužina:

a)  $|AM| : |AN| = \underline{\quad} : \underline{\quad}$  ;

b)  $|MB| : |BN| = \underline{\quad} : \underline{\quad}$  ;

c)  $|MN| : |MA| = \underline{\quad} : \underline{\quad}$  ;

d)  $|MN| : |MB| = \underline{\quad} : \underline{\quad}$  .

4. Nacrtaj dužinu  $\overline{AB}$  duljine 7 cm. Na toj dužini konstruiraj točku  $C$  tako da vrijedi:

$$|AC| : |CB| = 1 : 3.$$

5. Trokuti  $\Delta PQR$  i  $\Delta P'Q'R'$  su slični. Koeficijent sličnosti je  $k = \frac{3}{4}$ . Duljine stranica trokuta  $\Delta PQR$  su:  $p = 12 \text{ cm}$ ,  $q = 24 \text{ cm}$  i  $r = 30 \text{ cm}$ . Izračunaj duljine stranica trokuta  $\Delta P'Q'R'$

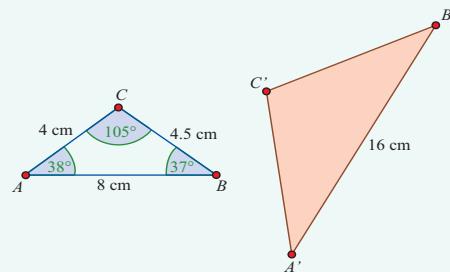
a) ako je on manji od trokuta  $\Delta PQR$  ;

b) ako je on veći od trokuta  $\Delta PQR$  .

6. Trokuti  $\Delta ABC$  i  $\Delta A'B'C'$  sa slike su slični.

a) Odredi nepoznate duljine stranica i veličine kutova;

b) Izračunaj opsege ovih trokuta.

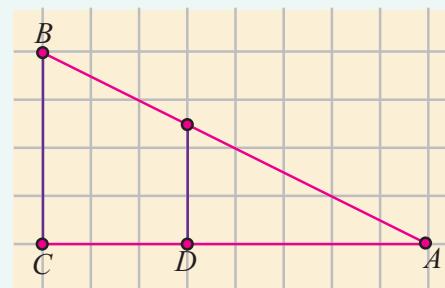


7. Duljine odgovarajućih stranica dvaju međusobno sličnih trokuta su 16 cm i 24 cm.

a) Izračunaj opseg manjega trokuta ako je opseg većega 81 cm;

b) Izračunaj opseg većega trokuta ako je opseg manjega 54 cm.

8. Odredi omjer površina trokuta sa slike.



## 0. Uvodno ponavljanje

## 0.1 Geometrija

1.

	Razno-straničan	Jednako-kraćan
Šiljastokutan	3	2
Pravokutan	5	4
Tupokutan	1	7
	Jednako-straničan	
Šiljastokutan	6	
Pravokutan	Ne postoji	
Tupokutan	Ne postoji	

2.

$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\delta$
100°	25°	125°	110°
94°	88°	72°	106°
67°	111°	81°	101°
85°	89°	91°	95°

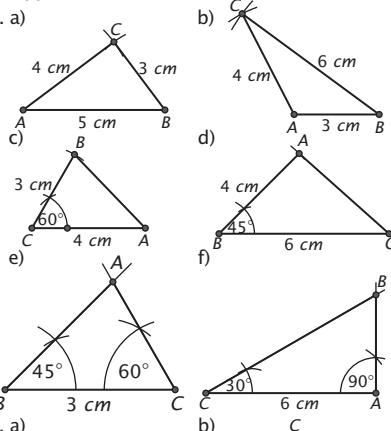
3.

$\alpha$	$\beta$	$\gamma$
25°	65°	90°
42°	48°	90°
67°	23°	90°
40°	50°	90°

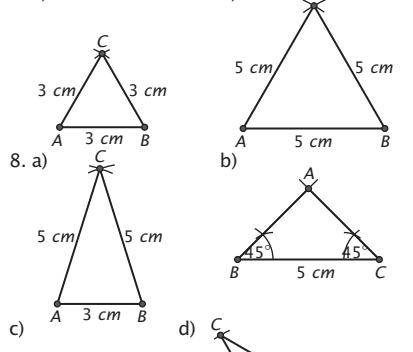
4. 70°.

5. 100°.

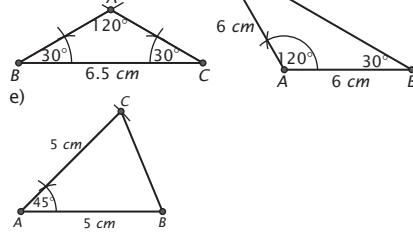
6. a)



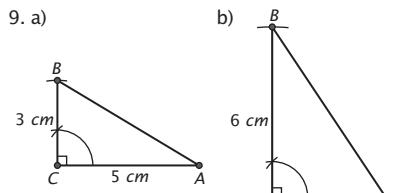
7. a)



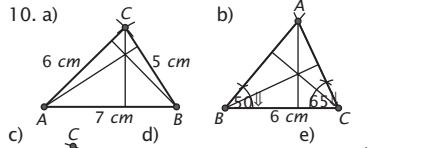
8. a)



9. a)



10. a)



11. a)

$$\begin{aligned} \text{a) } P &= 5 \text{ cm}^2; \\ \text{b) } P &= 70 \text{ dm}^2; \\ \text{c) } P &= 21 \text{ m}^2; \\ \text{d) } P &= 9.8 \text{ cm}^2. \end{aligned}$$

12. Potrebno je 48.96 m<sup>2</sup> lima, što treba platiti 979.20 kn.

13. c = 5 m.

14. a) O = 16 cm

b) O = 20 cm

c) O = 24 cm

d) O = 30 cm

e) O = 36 cm

f) O = 40 cm

g) O = 48 cm

h) O = 52 cm

i) O = 56 cm

j) O = 60 cm

k) O = 64 cm

l) O = 68 cm

m) O = 72 cm

n) O = 76 cm

o) O = 80 cm

p) O = 84 cm

q) O = 88 cm

r) O = 92 cm

s) O = 96 cm

t) O = 100 cm

u) O = 104 cm

v) O = 108 cm

w) O = 112 cm

x) O = 116 cm

y) O = 120 cm

z) O = 124 cm

aa) O = 128 cm

bb) O = 132 cm

cc) O = 136 cm

dd) O = 140 cm

ee) O = 144 cm

ff) O = 148 cm

gg) O = 152 cm

hh) O = 156 cm

ii) O = 160 cm

jj) O = 164 cm

kk) O = 168 cm

ll) O = 172 cm

mm) O = 176 cm

nn) O = 180 cm

oo) O = 184 cm

pp) O = 188 cm

qq) O = 192 cm

rr) O = 196 cm

ss) O = 200 cm

tt) O = 204 cm

uu) O = 208 cm

vv) O = 212 cm

ww) O = 216 cm

xx) O = 220 cm

yy) O = 224 cm

zz) O = 228 cm

aa) O = 232 cm

bb) O = 236 cm

cc) O = 240 cm

dd) O = 244 cm

ee) O = 248 cm

ff) O = 252 cm

gg) O = 256 cm

hh) O = 260 cm

ii) O = 264 cm

jj) O = 268 cm

kk) O = 272 cm

ll) O = 276 cm

mm) O = 280 cm

nn) O = 284 cm

oo) O = 288 cm

pp) O = 292 cm

qq) O = 296 cm

rr) O = 300 cm

ss) O = 304 cm

tt) O = 308 cm

uu) O = 312 cm

vv) O = 316 cm

ww) O = 320 cm

xx) O = 324 cm

yy) O = 328 cm

zz) O = 332 cm

aa) O = 336 cm

bb) O = 340 cm

cc) O = 344 cm

dd) O = 348 cm

ee) O = 352 cm

ff) O = 356 cm

gg) O = 360 cm

hh) O = 364 cm

ii) O = 368 cm

jj) O = 372 cm

kk) O = 376 cm

ll) O = 380 cm

mm) O = 384 cm

nn) O = 388 cm

oo) O = 392 cm

pp) O = 396 cm

qq) O = 400 cm

rr) O = 404 cm

ss) O = 408 cm

tt) O = 412 cm

uu) O = 416 cm

vv) O = 420 cm

ww) O = 424 cm

xx) O = 428 cm

yy) O = 432 cm

zz) O = 436 cm

aa) O = 440 cm

bb) O = 444 cm

cc) O = 448 cm

dd) O = 452 cm

ee) O = 456 cm

ff) O = 460 cm

gg) O = 464 cm

hh) O = 468 cm

ii) O = 472 cm

jj) O = 476 cm

kk) O = 480 cm

ll) O = 484 cm

mm) O = 488 cm

nn) O = 492 cm

oo) O = 496 cm

pp) O = 500 cm

qq) O = 504 cm

rr) O = 508 cm

ss) O = 512 cm

tt) O = 516 cm

uu) O = 520 cm

vv) O = 524 cm

ww) O = 528 cm

xx) O = 532 cm

yy) O = 536 cm

zz) O = 540 cm

aa) O = 544 cm

bb) O = 548 cm

cc) O = 552 cm

dd) O = 556 cm

ee) O = 560 cm

ff) O = 564 cm

gg) O = 568 cm

hh) O = 572 cm

ii) O = 576 cm

jj) O = 580 cm

kk) O = 584 cm

ll) O = 588 cm

mm) O = 592 cm

nn) O = 596 cm

oo) O = 600 cm

pp) O = 604 cm

qq) O = 608 cm

rr) O = 608 cm

ss) O = 612 cm

tt) O = 616 cm

uu) O = 620 cm

vv) O = 624 cm

ww) O = 628 cm

xx) O = 632 cm

yy) O = 636 cm

zz) O = 640 cm

aa) O = 644 cm

bb) O = 648 cm

cc) O = 652 cm

dd) O = 656 cm

ee) O = 660 cm

ff) O = 664 cm

gg) O = 668 cm

hh) O = 672 cm

ii) O = 676 cm

jj) O = 680 cm

kk) O = 684 cm

ll) O = 688 cm

mm) O = 692 cm

nn) O = 696 cm

oo) O = 700 cm

pp) O = 704 cm

qq) O = 708 cm

rr) O = 712 cm

ss) O = 720 cm

tt) O = 724 cm

uu) O = 728 cm

vv) O = 732 cm

ww) O = 736 cm

xx) O = 740 cm

yy) O = 744 cm

zz) O = 748 cm

aa) O = 752 cm

bb) O = 756 cm

cc) O = 760 cm

dd) O = 764 cm

ee) O = 768 cm

ff) O = 772 cm

gg) O = 776 cm

hh) O = 780 cm

ii) O = 784 cm

jj) O = 788 cm

kk) O = 792 cm

ll) O = 796 cm

mm) O = 800 cm

nn) O = 804 cm

oo) O = 808 cm

pp) O = 812 cm

qq) O = 816 cm

rr) O = 820 cm

ss) O = 824 cm

tt) O = 828 cm

uu) O = 824 cm

vv) O = 828 cm

ww) O = 832 cm

xx) O = 836 cm

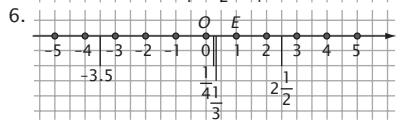
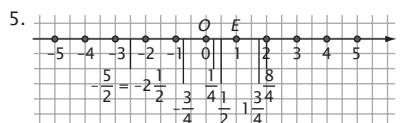
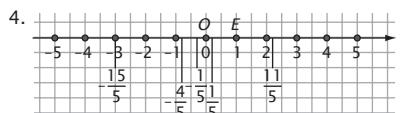
yy) O = 840 cm

zz) O = 844 cm

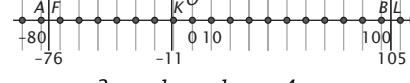
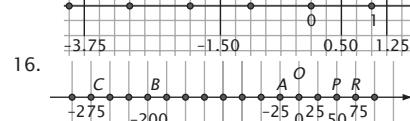
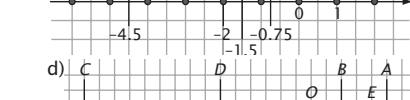
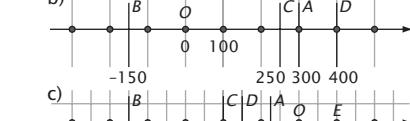
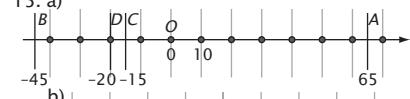
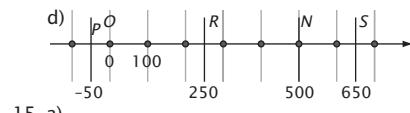
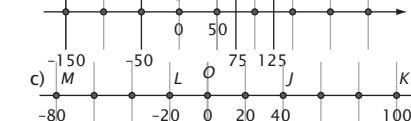
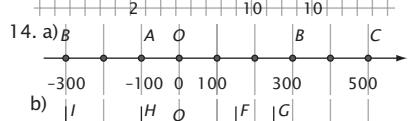
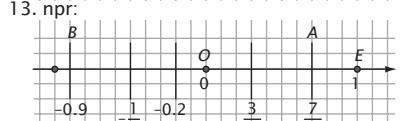
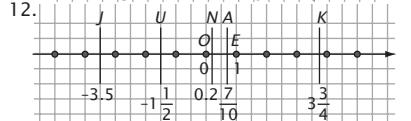
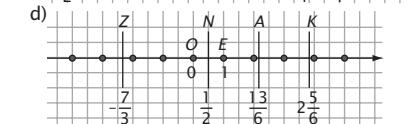
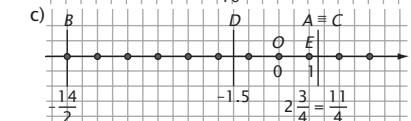
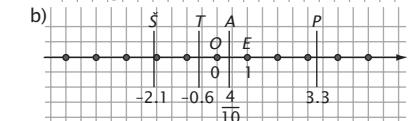
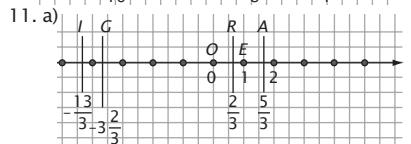
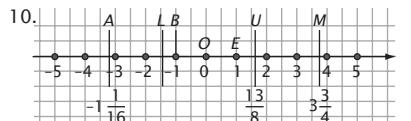
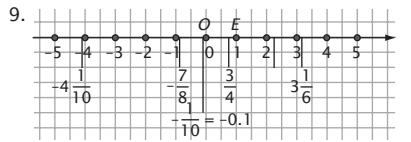
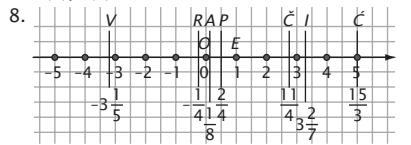
aa) O = 848 cm

bb) O = 852 cm

cc) O = 856 cm



7.  $O(0)$ ,  $E(1)$ .



18. a)  $A(\frac{2}{5}), B(-\frac{1}{5}), C(1\frac{1}{5}), H(-\frac{4}{5})$ ;

b)  $A(\frac{1}{2}), B(\frac{1}{2}), C(-1\frac{1}{2}), D(-1)$ ;

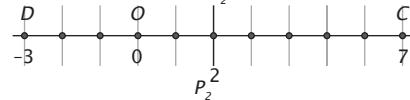
c)  $A(\frac{1}{2}), B(1\frac{1}{2}), C(-\frac{1}{4}), D(-2)$ .

19. a)  $A(200), B(-100), C(600), D(-400)$ ;

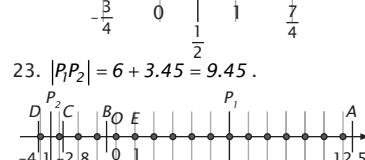
b)  $A(-15), B(-5), C(-30), D(-35)$ ;

c)  $A(250), B(350), C(325), D(175)$ .

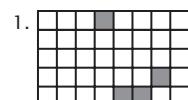
20.  $A(-3.8), B(0.4), C(5), D(-0.2)$ .



23.  $|P_1P_2| = 6 + 3.45 = 9.45$ .



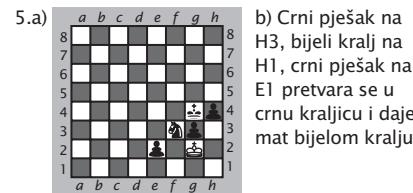
## 1.2 Uređeni par



2. Zauzeta su sjedala (1, 6), (4, 7), (6, 7), (3, 3), (6, 11), (5, 11), (5, 10), (2, 8).

4. b) bijeli kralj C3, crni pješak E4, bijeli skakač C5, crni konj E5, bijela kula D6, bijela kraljica E6, crni kralj C7;

c) Bijela kula na B4, crni može igrati pješakom ili konjem, a u oba slučaja je mat s bijelom kulom na B7 ili bijelom kraljicom na D7.



b) Crni pješak na H3, bijeli kralj na H1, crni pješak na E1 pretvara se u crnu kraljicu i daje mat bijelom kralju.

6.  $(-1, -1), (-1, 2), (-1, -3), (2, -1), (2, 2), (2, -3), (-3, -1), (-3, 2), (-3, -3)$ .

7.  $(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6), (7, 7), (8, 8), (9, 9), (10, 10)$ .

8.  $(4, 2), (8, 4)$ .

9.  $(2, 8), (3, 9), (5, 11), (7, 13)$ .

10.  $(3, 5), (5, 3), (1, 7), (7, 1)$ .

11.  $(2, -1), (-1, 2), (4, -3), (-3, 4)$ .

12.  $(1, 4), (4, 1), (2, 3), (3, 2)$ .

13.  $(1, 12), (2, 12), (3, 12), (4, 12), (6, 12), (12, 12)$ .

14. a)  $(1, 7), (7, 1), (2, 6)$ ,

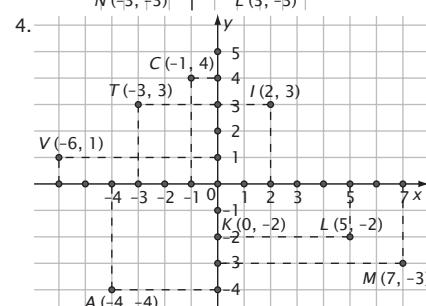
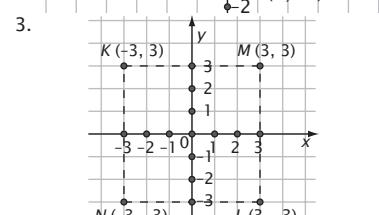
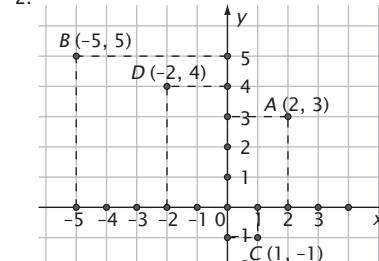
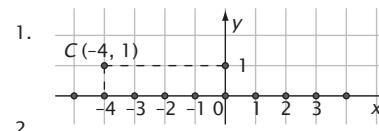
$(6, 2), (3, 5), (5, 3), (4, 4)$ ;

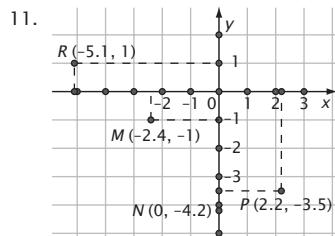
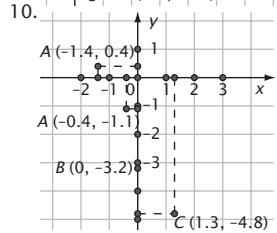
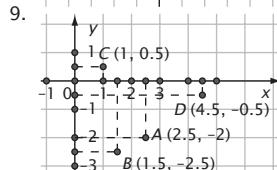
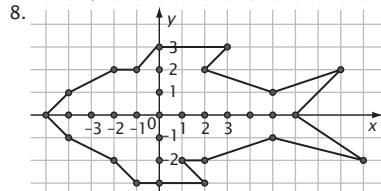
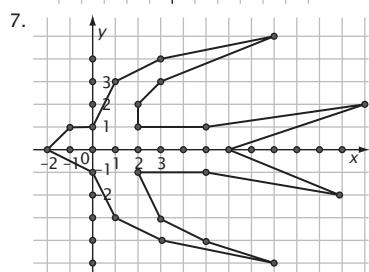
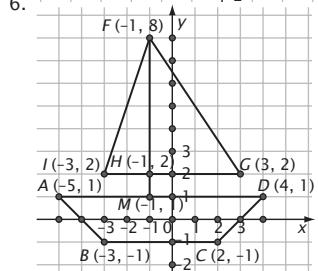
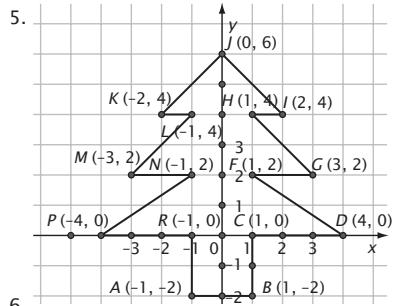
b)  $(1, 12), (12, 1), (2, 6), (6, 2), (3, 4), (4, 3)$ ;

c)  $(1, 1), (2, 2), (3, 3), \dots$ ;

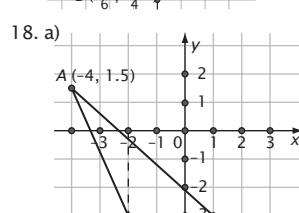
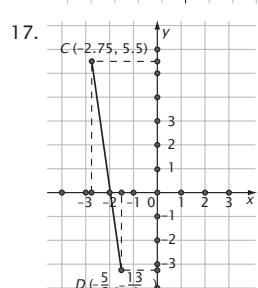
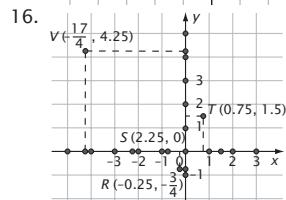
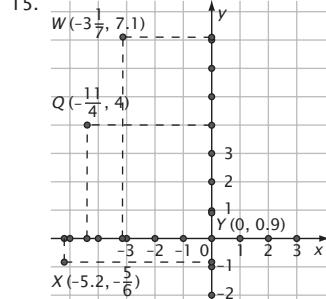
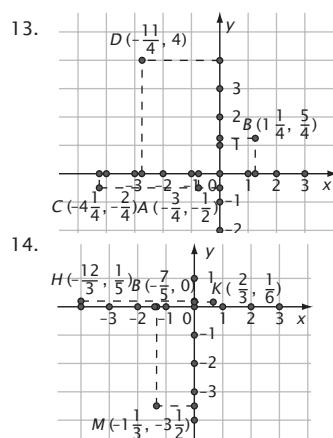
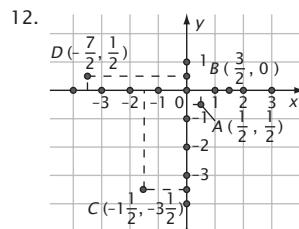
d)  $(1, 3), (3, 2), (5, 1)$ .

## 1.3 Koordinatni sustav u ravni



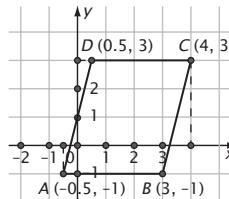


c) Najbliža točka ishodištu je M (udaljenost  $\approx 2.6$  jediničnih duljina), a najudaljenija točka je R (udaljenost  $\approx 5.2$  jed. dulj.).



b) trokut je raznostraničan;  
c) trokut je tupokutan.

19. četverokut je paralelogram.



20. a) A(-1, -2), B(1, -2), C(-2, 2);

b) A(-1.5, 0), B(1.5, -1.5), C(0.4, 1);

c) A(0, 30), B(-250, 30), C(100, -30).

21. a)  $L_p(0,0), L_z(5,3)$ ; b)  $B(4, 3)$ ;

c)  $M_{lp}(2,7), M_{lz}(4,3)$ ;

d)  $M_{2p}(8,6), M_{2z}(5,3)$ .

22. X(-1, 1).

24. O(0, 0).

25.  $E_1(1,0), E_2(0,1)$ .

26. a) Crni kralj nalazi se na b8 ili (b, 8);  
b) bijeli skakač nalazi se na (c, 5), a može skočiti na (a, 6), (a, 4), (b, 7), (b, 3), (d, 7), (d, 3), (e, 6), (e, 4).

27. Zagreb (15.9, 45.8), Samobor (15.7, 45.8), Varaždin (16.3, 46.3), Ludbreg (16.6, 46.2), Ivanić Grad (16.4, 45.7), Korčula (17.2, 42.9), Osijek (18.7, 45.6).

28. New York (41, -74), Budimpešta (18.9, 47.5), Berlin (52.5, 11.5), London (-0.5, 51.5), Bruxelles (4.3, 50.9), Rio de Janeiro (-44, -23).

29. A- IV kvadrant, B- I kvadrant, C- III kvadrant, D- I kvadrant, F- II kvadrant.

30. A- III kvadrant, B- leži na osi y, C- leži na osi x, D- II kvadrant, F- I kvadrant.

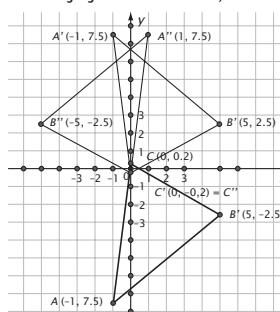
31. T(-25, 0), U(0, 0).

35. Npr. A(-3, 0), C(3, 0), B(0, -3), D(0, 3).

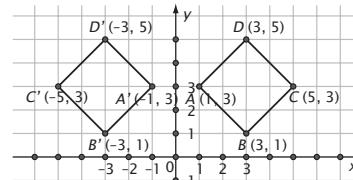
36. a)  $A'(-6, 8), B'\left(1.5, \frac{5}{2}\right)$  i  $C'(-2, -0.4)$ ,

b)  $A''(6, -8), B''\left(-1.5, -\frac{5}{2}\right)$  i  $C''(2, 0.4)$ .

37. Trokut je jednakokračan,



38. Taj četverokut je kvadrat,



#### 1.4. Ponavljanje

Pitanja za ponavljanje:

1. O(0). 2. O(0, 0). 3. E(1).

4.  $E_1(1, 0), E_2(0, 1)$ .

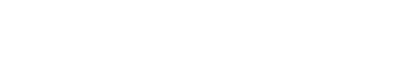
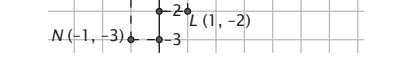
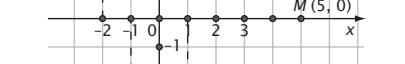
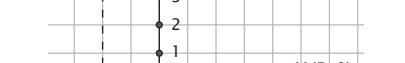
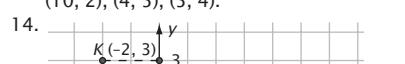
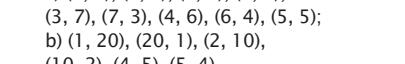
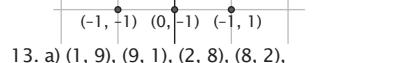
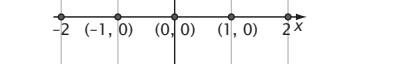
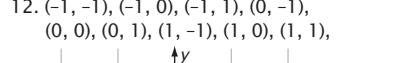
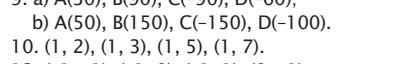
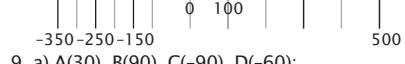
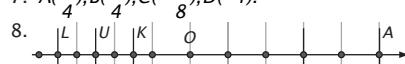
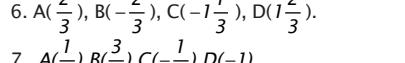
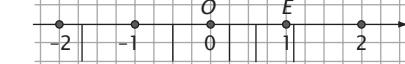
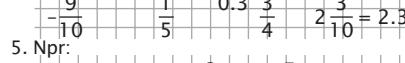
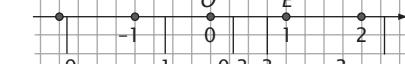
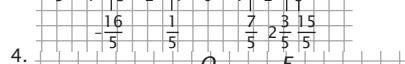
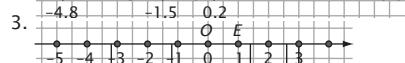
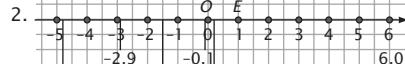
5. Koordinatnom sustavu na pravcu pripadaju: B i F, a koordinatnom sustavu u ravnini pripadaju: A, C, D i E.

6. Ishodište. 7. ... os apscisa.

8. ... os ordinata. 9. ... kvadrant.  
 10. Koordinatnu ravninu dijelimo na četiri kvadranta.  
 11. Da bismo odredili kojem kvadrantu pripada koja točka dovoljno je pogledati predznake njenih koordinata: I kvadrant (+, +), II kvadrant (-, +), III kvadrant (-, -), IV kvadrant (+, -).

Zadaci za ponavljanje:

1. Između A i B su točke: D, G i H.



5. Duljina skakavca je 7.05 cm.  
 6. Udaljenost između Vinkovaca i Đakova u stvarnosti je 30 km, to nije cestovna udaljenost jer cesta ne može ići samo ravno.  
 7. Udaljenost između Stuttgarta i Münchena u stvarnosti je 188 km.  
 8. Udaljenost između Zagreba i Ljubljane na karti je 13 mm.  
 9. Udaljenost između Zagreba i Splita u stvarnosti je 243 km.  
 10. a) npr.  $5 : 9 = 10 : 18 = 15 : 27 = 20 : 36 \dots$ ; b) npr.  $200 : 40 = 20 : 4 = 10 : 2 = 5 : 1 \dots$   
 11. a) 2; b) 24; c) 16.  
 12. Staviti će 10 dag šećera, 1 puding, 2 žlice brašna, 0.7 litre mlijeka.  
 13. Potrebno joj je 6 pudinga i 15 žlica šećera.  
 14. Treba staviti pola čepa omekšivača.  
 15. a)  $10 l : 1 \text{ žličica}$ ; b) na 5 l vode ide pola žličice gnojiva; c) Majin ujak potroši 12 žličica gnojiva.  
 16. Treba 4 kg brašna.  
 17. Treba 1400 kg bakra.  
 18. Marko će dobiti 300 kn, a Darko 400 kn.  
 19.  $1239 = 885 + 354$ .  
 20. Masa bakra je 658 kg, a kositra je 42 kg.  
 21. Masa cinka je 37.5 kg, a bakra 87.5 kg.  
 22. a)  $30^\circ, 50^\circ, 100^\circ$ ; b)  $40^\circ, 20^\circ, 120^\circ$ .  
 23. a)  $36^\circ, 72^\circ, 108^\circ, 144^\circ$ ; b)  $100^\circ, 80^\circ, 140^\circ, 40^\circ$ ; c)  $80^\circ, 140^\circ, 20^\circ, 120^\circ$ .  
 24. Stranice trokuta su 6 cm, 8 cm i 10 cm.  
 25.  $252 = 42 + 98 + 112$ .  
 26. Ana je dobila 75 kn, a Luka 65 kn.  
 27. a) Drugi ispiše 36 fotografiju; b) prvi ispiše 45 fotografiju; c) na prvom je ispisano 200, a na drugom 360 fotografija.  
 28. a)  $2 : 1$ ; b)  $18 : 35$ ; c)  $2 : 1$ ; d)  $1 : 2$ ; e)  $1 : 5$ ; f)  $8 : 7$ .  
 29. a)  $1 : 2 : 3$ ; b)  $4 : 6 : 10 : 3$ ; c)  $125 : 30 : 20$ .  
 30. Ante će dobiti 84 375 dolara, Borna 16 875 dolara, Filip 50 625 dolara, Josip 67 500 dolara i Tomislav 236 250 dolara.  
 31. Treba kupiti 45 litara bijele boje, 1 litru oker i 4 litre zelenog pigmenta.  
 32. Cementa treba 125 kg, a vode 625 litara (približno je 1 l vode = 1 kg vode).  
 33. Prvi će dobiti 28 sličica, drugi 42, treći 56, a četvrti 84.  
 34. Ana je dobila 900, a Iva 1600 kn.  
 35. To su brojevi 180, 240 i 400.

## 2.2. Proporcije ili razmjeri

1. a)  $x = 4$ ; b)  $y = 7$ ; c)  $y = 2$ ; d)  $y = 15$ ; e)  $x = 138$ ; f)  $x = 72$ .  
 2. a)  $x = 16$ ; b)  $y = 7$ ; c)  $x = 5$ .  
 3. a)  $x = 12$ ; b)  $y = 15$ ; c)  $x = 75$ ; d)  $y = 48$ ; e)  $x = 72$ ; f)  $x = 196$ .  
 4. a)  $x = 8$ ; b)  $x = 12$ ; c)  $y = 48$ .  
 5. a)  $y = 3$ ; b)  $x = 625$ ; c)  $y = 48$ .  
 6. a)  $y = 7.5$ ; b)  $x = 23.85$ ; c)  $y = 138$ ; d)  $x = 69$ ; e)  $x = 455$ ; f)  $y = 32.5$ ; g)  $x = 1341.25$ ; h)  $x = 112$ ; i)  $y = 520000$ .  
 8. Breza je visoka 4.5 m.  
 9. Sjena drveta je 0.5 m.  
 10. Zgrada je visoka 15 m.  
 11. Možemo kupiti 4 olovke.  
 12. 42 perlice. 13. 35 sličica.  
 14. Matija je visok 165 cm.  
 15. A je napravio 3 okreta. B je napravio 60 okreta.  
 16. B je napravio 42 okreta. A je napravio 24 okreta.  
 17. B je napravio 120 okreta. A je napravio 42

- okreta. A je napravio 57 okreta.  
 18.  $x = 7$ . 19.  $x = -2$ . 20.  $x = 5$ .  
 21.  $x = 2$ . 22.  $x = 5$ .

## 2.3. Proporcionalne veličine

1. a) više; b) više; c) manje; d) manju.  
 2. a) 27, trostruko; b) 42, šesterostruko; c) 5, peterostruko; d) 375, deseterostruko; e) 24, dvostruko; f) 5, četverostruko.  
 3. Proporcionalne su veličine u zadacima a), b), d) i e).  
 4. Proporcionalne su veličine u zadacima a), b), c), d) i g).  
 5. Platila bi 132 kn. 6. Platio bi 2.5 kn.  
 7. Može zamijeniti 4 sličice. 8. Prešla je 8 km.  
 9. Treba 24 jaja. 10. Preveze 1.5 tona.  
 11. a) 1 kg, 6 kn; b) 1 l, 8 kn; c) 1 kg, 7 kn; d) 1 kg, 5 kn; e) 1 l, 35 kn.  
 12. Za jedan sat prijeđe 4 km; brzina hoda joj je 4 km/h; to je prosječna brzina hoda čovjeka.  
 13. Povoljnije je kupiti 6 kg za 90 kn.  
 14. Povoljnije je kupiti 50 olovaka za 40 kn.  
 15. Više se isplati voziti auto koji troši 30 l na 186 km.  
 16. Maja je prošla jeftinije.  
 17. Isto je kupiti pakiranje hrane za psa od 2500 g po cijeni od 50 kn ili pakiranje od 1500 g po cijeni od 30 kn.

5 l	80 km	16	1 l na 16 km
10 komada kruha	4 kg	0.4	težina 1 kruha
18 l	149.40 kn	8.3	cijena 1 l
1.5 h	24 km	16	brzina na sat

19. a) Kretao se brzinom 115 kn/sat; b) prijeći će 805 km; c) takvom brzinom dopušteno je voziti na autopisti.

20. a) Kretao se brzinom 62 km/sat; b) prijeći će 372 km.

21. a) 1 kg krumpira košta 2.5 kn; b) 25 kg košta 62.5 kn.

22. a) 1 kg luka košta 3.5 kn; b) 9 kg treba platiti 31.5 kn.

Benzin	Cijena
1 l	8.30 kn
3 l	24.90 kn
25 l	207.50 kn
42 l	348.60 kn
52 l	431.60 kn

Bilježnice	Cijena
1 kom	2.30 kn
6 kom	13.80 kn
24 kom	55.20 kn
28 kom	64.40 kn
44 kom	101.20 kn

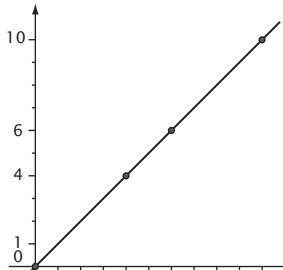
Dubina mora (u metrima)	Vrijeme potrebno da se zvuk vrati do sonde (u sekundama)
1200	1.6
1650	2.2
900	1.2
3900	5.2
300	0.4
1500	2

Jagode	Cijena
1 kg	14.60 kn
4.2 kg	61.32 kn
6.9 kg	100.74 kn
18 kg	262.80 kn
24.7 kg	360.62 kn

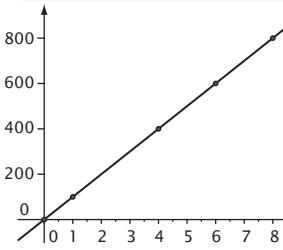
27. a) Treba mu 55.2 dana; b) sašije 3 odijela.  
 28. a) Treba 8.25 litara;  
 b) možemo obojiti  $20 \text{ m}^2$ .  
 29. a) Treba 5 klupka;  
 b) naštrikat će 18 pari rukavica.  
 30. a) 11 kutija košta 190.3 kn;  
 b) može se kupiti 27 kutija.  
 31. a) 5.7 kg košta 71.25 kn;  
 b) može se dobiti 6.3 kg mahuna.  
 32. a) Sjena mu je duga 1 m; b) visoko je 2.8 m.  
 33. a) Cijena stana je 75650 eura.  
 34. Ana može počastiti 15 prijatelja. Tri kremnите će koštati 25.5 kn.  
 35. a) U 250 ml soka ima 95 kcal;  
 b) 500 ml soka.  
 36. a) Stići će za 20 min;  
 b) trebat će joj 44 min;  
 c) prijeći će 11250 m.  
 37. a) Treba mu 230 min = 3 sata i 50 min;  
 b) 15 drva je obradio za 7 sati;  
 c) stroj obradi 1 drvo za 10 min;  
 d) obradi 19 drva.  
 38. a) Treba mu 4 sata; b) prijeđe 570 km;  
 c) treba mu 4 sata i 45 min.  
 39. a) Prosječna brzina mu je 75 km/h;  
 b) prijeđe 187.5 km;  
 c) treba mu 2.6 sati = 2 sata i 36 min.  
 40. a) Brzina aviona je 875 km/h;  
 b) prijeđe 3237.5 km;  
 c) trebalo mu je 2.6 sati = 2 sata i 36 min.  
 41. a) 3 litre košta 25.8 kn;  
 b) može se kupiti 11 litara.

## 2.4. Grafički prikaz proporcionalnosti

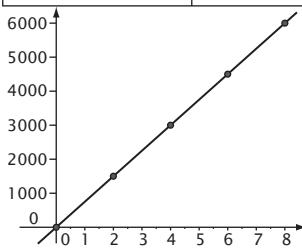
kg krumpira	0	2	3	5
cijena u kn	0	4	6	10



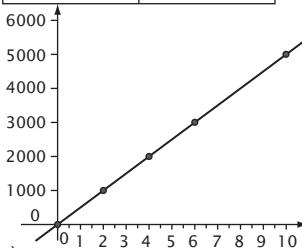
minute	1	4	6	8
broj km	100	400	600	800



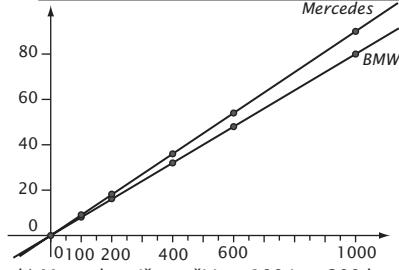
vrijeme (h)	prijeđeni put (km)
0	0
2	1500
4	3000
6	4500
8	6000



broj komada kruha	kg brašna
2	1000
4	2000
6	3000
10	5000

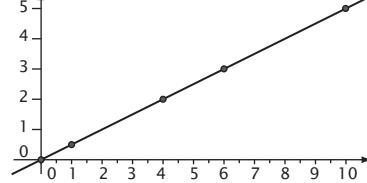


prijeđeni put (km)	potrošeni benzin (l)	
	BMW	Mercedes
100	8	9
200	16	18
400	32	36
600	48	54
1000	80	90

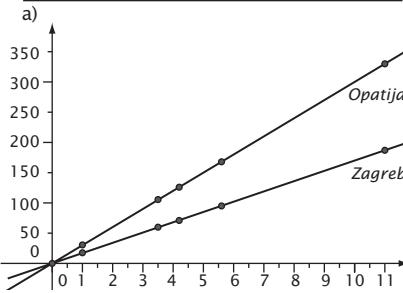


- b) Mercedes više troši i na 100 i na 200 km;  
c) BMW treba 24 litre, a Mercedes 27 l;  
d) razlika 10 litara;  
e) BMW može prijeći 9 km, a Mercedes 8 km.

broj boca	1	4	6	10
iznos kn	0.5	2	3	5

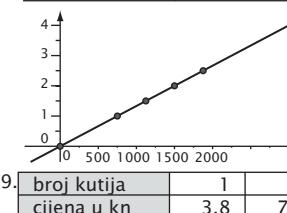


kg grožđa	ukupna cijena	
	u Opatiji	u Zagrebu
1	30	17
3.5	105	59.5
4.2	126	71.4
5.6	168	95.2
11	330	187

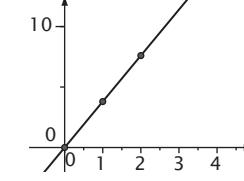


- a) povoljnija cijena je u Zagrebu;  
c) U Zagrebu se dobije 4.5 kg, a u Opatiji 2.55 kg grožđa;  
d) razlika u cijeni je 1300 kn.

Dubina mora (u metrima)	Vrijeme potrebno da se zvuk vrati do sonde (u sekundama)
1500	2
1125	1.5
1875	2.5
750	1



broj kutija	1	2
cijena u kn	3.8	7.6



### 2.5. Obrnuto proporcionalne veličine

1. a) manje; b) više; c) više; d) više.  
2. a) 45, trostruko; b) 100, pterostruko;  
c) 1, dvostruko; d) 4, deseterostruko;  
e) 4, pterostruko; f) 4, dvostruko.

3. Obrnuto proporcionalne veličine su:  
a), b), e), g) i h).

4. Obrnuto proporcionalne veličine su:  
a), b), c), e), g) i h).

A postaje:	Tada B postaje:
4 puta veća	4 puta manja
dvostruko manja	dvostruko veća
dvostruko veća	dvostruko manja
4 puta manja	4 puta veća

Broj pobjednika	Dobitak po pobjedniku
10	800 000
8	1 000 000
4	2 000 000
2	4 000 000
1	8 000 000

Što više pobjednika, to je manji dobitak po pobjedniku. Što manje pobjednika, to je veći dobitak po pobjedniku.

Broj dana	Može potrošiti u jednom danu
6	255
9	170
10	153
12	127.50
15	102

8. Bit će grupe po 3 učenika.

9. 12 slonova imalo bi hrane 5 dana.

10. 2 radnika bi izgradilo zid za 15 dana.

veličina x	25 radnika	50 km/h
veličina y	16 sati	6 h
koeficijent obr. prop. k	400	300
značenje	ukupan broj radnih sati	ukupan broj prijeđenih km

veličina x	10 kamiona	18 koraka	15 kanti
veličina y	nosivost 3 t	duljina koraka 65 cm	20 l vode u svakoj kanti
koeficijent obr. prop. k	30	1170	300
značenje	ukupno tona tereta	ukupno cm	ukupno litara vode

veličina x	14 gostiju	25 km/h	23 labuda
veličina y	2 kriške torte	7 h	11 kg hrane
koeficijent obr. prop. k	28	175	253
značenje	ukupno kriški torte	ukupno km	ukupno kg hrane

veličina x	5 pumpi	4 grupe
veličina y	3 sata punjenja	6 učenika
koefficijent obr. prop. k	15	24
značenje	ukupno sati punjenja	ukupno učenika

13. Zahtjevni je prvi posao.  
 14. Drugi automobil je prešao dulji put.  
 15. Više je pizze pojedeno na Majinom rođendanu.  
 16. a) Prešao je 78 km;  
     b) trebalo bi mu 1.2 sata.  
 17. a) Potrebno je 90 radnih sati;  
     b) potrebno je 9 radnika.  
 18. Bit će puni za 15 sati.  
 19. Duljina Anina koraka je 0.8 m.  
 20. a) Svaki učenik će platiti 75 kn;  
     b) platili bi 84 kn.  
 21. a) Napunile bi ga za 15 sati;  
     b) potrebno je 15 pumpi.  
 22. a) Debljina debla trebala bi biti 8.4 cm;  
     b) dobit ćemo 12 dasaka.  
 23. a) Trajat će 12 dana; b) možemo prehraniti 24 konja.  
 24. a) Trajao bi 15 sati; b) treba nam 9 strojeva;  
     c) 30 strojeva.  
 25. a) Svatko će dobiti 2 komada;  
     b) smije pozvati 6 gostiju.  
 26. a) Potrebno je 32 radnika;  
     b) završili bi za 64 dana.  
 27. a) Imala bi 78 redova;  
     b) imat će 234 stranice.  
 28. a) Tada će moći trošiti 375.20 kn;  
     b) skratit će boravak 6 dana.  
 29. a) Prijemljena zaliha potrajet će 5 mjeseci i 10 dana;  
     b) morali su nabaviti još 24 m<sup>3</sup> drva;  
     c) ukupni trošak je 20520 kn.  
 30. Potrebno je 3 radnice; u prvom slučaju svaka zaradi 300 kn, a u drugom svaka zaradi 200 kn.  
 31. a) Trebaju imati novost 16 tona;  
     b) treba 6 šlepera.  
 32. Moraju raditi 17 sati na dan.  
 33. Moraju raditi 2 sata i 15 minuta.  
 34. Trebalo bi raditi 30 učenika.  
 35. Svaki bi dobio 66688.50 kn.  
 36. Stigao je 20 minuta ranije.  
 37. Dimenzije kolača u obliku kvadrata mogu biti 6 x 6 cm ili 3 x 3 cm ili 2 x 2 cm.  
 Površine najmanjih kvadratnih kolača su 4 cm<sup>2</sup>, većih 9 cm<sup>2</sup>, a najvećih 36 cm<sup>2</sup>. Najviše će biti kolača površine 4 cm<sup>2</sup> (90 komada).  
 38. Crvenih pločica treba 200, a širina plavih pločica treba biti 16 cm. Isplati se kupiti plave pločice.  
 39. Žutih pločica treba 110 komada, a širina zelenih treba biti 16 cm. Isplati se kupiti žute pločice.

#### 2.6. Primjena proporcionalnosti

1. a) P; b) P; c) nezavisne veličine; d) OP;  
 e) P; f) P; g) OP; h) P.

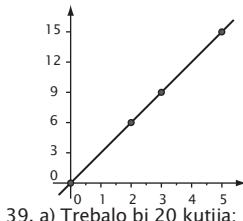
2. a) OP; b) OP; c) nezavisne veličine; d) P;  
 e) OP; f) P; g) P; h) OP.  
 3. 5 kg mandarina košta 20 kn.  
 4. S punim rezervoarom prijeći će 500 km.  
 5. Može se kupiti 15 kg krušaka.  
 6. 3 soboslikara radila bi 4 dana.  
 7. 45 radnika će obaviti taj posao za 14 dana.  
 8. a) 3 m bi platila 234 kn;  
     b) može se kupiti 5 metara tkanine.  
 9. Trebali bi voziti brzinom od 32 km/h.  
 10. Na 100 km troši 7.5 litara.  
 11. 45 radnika će obaviti taj posao za 7 dana.  
 12. a) Za dva sata prijeđe 25 km;  
     b) treba mu 3 sata.  
 13. a) Potrebno je ukupno 72 sata;  
     b) treba angažirati 6 radnika.  
 14. Punit će se 162 minute, tj. 5 sati i 12 minuta.  
 15. a) Svaki će platiti 94 kn; b) platili bi 116 kn.  
 16. Može prijeći približno 64 km.  
 17. U 2.5 dl mlijeka ima 160 kcal.  
 18. a) Treba 77 očica; b) biti će široko 70 cm.  
 19. Može zamjeniti za 88 sličica.  
 20. a) Debljina bi trebala biti 5.1 cm;  
     b) dobit ćemo 54 daske.  
 21. a) Posao bi trajao 6 sati;  
     b) trebat će nam 24 stroja.  
 22. 52 ribice imale bi hrane 2.5 dana.  
 23. Posao će biti gotov za 5 dana.  
 24. Potrošit će 4.725 kW struje.  
 25. Napunio bi se za 8 sati.  
 26. 9 mm ima 16.668 km.  
 27. 7200 km prijeđe za 10 sati.  
 28. 30 srna ima hrane za 2.3 dana.  
 29. a) Za 9 kn može se kupiti 2 litre;  
     b) 18 litara košta 81 kn.  
 30. Skratio bi se za 1.5 dan.  
 31. Produljiti će se za 1 dan.  
 32. Zgradu će završiti 10 dana ranije.  
 33. Bit će obran za 11 dana.  
 34. Berba je trajala 14 dana.  
 35. Isporučen je 3 dana ranije.  
 36. Proizvodnja se produžila za 5 dana.  
 37. Većih pločica treba 4374 komada.  
 38. Manjih pločica treba 4000 komada.  
 39. Zajedno bi je uništili za 9.375 sati,  
     tj. 9 sati, 22 minute i 30 sekundi.

#### 2.7. Ponavljanje

##### Pitanja za ponavljanje:

1. Povećanju jedne veličine odgovara proporcionalno povećanje druge veličine, odnosno smanjenju jedne veličine odgovara proporcionalno smanjenje druge veličine.  
 2. Ukoliko proporcionalne veličine označimo sa x i y, onda koefficijent proporcionalnosti računamo ovako:  $k = \frac{y}{x}$ .  
 3. Koefficijent proporcionalnosti nam govori o vezi između jedinične količine jedne veličine i neke količine druge veličine.  
 4. Za proporcionalne veličine vrijedi jednakost  $x_1 : x_2 = y_1 : y_2$ .  
 5. Povećanju jedne veličine odgovara proporcionalno smanjenje druge veličine, odnosno smanjenju jedne veličine odgovara proporcionalno povećanje druge veličine.  
 6. Koefficijent obrnute proporcionalnosti zapisujemo ovako:  $k = x \cdot y$ .  
 7. Koefficijent obrnute proporcionalnosti može, primjerice znatići: duljinu puta, ukupnu količinu tereta, ukupan broj radnih sati, količinu vode u bazenu i sl.  
 8. Za obrnutu proporcionalnost vrijedi ova proporcija:  $x_1 : x_2 = y_2 : y_1$ .
9. Izraz oblika a : b zovemo omjerom.  
 10. Jednakost omjera naziva se proporcija ili razmjer.
- Zadaci za ponavljanje:**
1. a) 7 : 9; b) 15 : 12; c) 3 : 72;  
 d) 5 : 20; e) 11 : 45; f) 11 : 2.
  2. Za 3 sata prijeći će 360 km.
  3. 12 kutija treba platiti 90 kn.
  4. a) Trebat će im 2 sata i 40 minuta;  
 b) radnika kosilo bi 4 sata.
  5. U svakoj grupi će biti 6 učenika.
  6. Treba platiti 55.23 kn.
  7. Premjestio bi 32 kutije.
  8. Treba prevesti 117 tona tereta. Kamiona nosivosti 3 tone treba 39. Ako ih imamo 20, nosivost mora biti barem 5.85 tona.
  9. Na Majinom rođendanu je pojedeno više torte.
  10. Pobojao bi 75 m<sup>2</sup> površine.
  11. Sirupa treba 1.5 litre, time se dobije 7.5 litara soka.
  12. Crnih cipela je prodano 2800 pari.
  13. Radili bi 8 sati dnevno.
  14. Javnim prijevozom ih dolazi 2700.
  15. Matija je visok 140 cm.
  16. a) Trebala bi imati 45 redova;  
 b) imat će 225 stranica.
  17. Prodano je 63 hot doga.
  18. Radili bi 6 dana po 6 sati.
  19. Trebat će joj 45 minuta.
  20. a) Moći će potrošiti 512.50 kn na dan;  
 b) skratit će boravak za 1 dan.
  21. Otišne 1250 novčanica.
  22. U jednom satu sleti 30 aviona.
  23. Od stropa treba odmjeriti 120 cm.  
 Plavo : bijelo = 3 : 2. Bijele boje treba 0.72 litre, a plave treba 1.08 litara.
  24. a) Širina prikazuje 450 km;  
 b) duljina prikazuje 300 km;  
 c) prikazana je površina od 135 000 km<sup>2</sup>;  
 d) udaljenost gradova Egon i Karls je 200 km;  
 e) cesta od Tvida do Perle duga je 64 cm na karti.
  25. a) 500 : 600 : 2 : 4;  
 b) 4000 ml mješavine, 4800 ml mlijeka,  
 16 jaja, 32 ml ulja;  
 c) 2500 ml mješavine, 3000 ml mlijeka,  
 10 jaja, 20 ml ulja;  
 d) 450 : 650 : 2 : 4;  
 e) potrebno joj je 3250 ml mlijeka.
  26. 32 + 48 + 56 = 136.
  27. a) x = 4; b) x = 7.5; c) x = 1;  
 d) x = 4.5; e) x = -1  $\frac{1}{7}$ .
  28. Stvarna udaljenost je 150 km.
  29. Udaljenost na karti je 50.8 cm.
  30. B napravi 35 okreta. A napravi 39 okreta.
  31. Moraju raditi 10 sati na dan.
  32. Manjih treba 375 komada.
  33. Od Ogulina do Krapine je 112.45 km zračne linije, da je cesta ravna trebalo bi nam 1.73 sata.
  34. Treba još 6 volontera.
  35. Berba će kasniti 1 dan.
  36. Troškovi za prvu vrstu robe su 12960 kn, za drugu 9000 kn, a za treću 5040 kn.
  37. Zajedno pune 4 sata.
  38. 

kg jabuka	0	2	3	5
cijena jabuka u kn	0	6	9	15



39. a) Trebalo bi 20 kutija;  
b) u svakoj je 8 kalkulatora;  
c) obrnuto su proporcionalni.

Primjerak oglednog testa:

1. Npr.  $4 : 7 = 8 : 14 \dots$
2. Lukin džeparac je 150 kn, a Matijin 120 kn.
3. a) Taj omjer govori da je 1 cm na karti jednak 40 000 cm u prirodi;  
b) u prirodi su udaljeni 1 km;  
c) na karti su udaljeni 17.5 cm.
4. a) 15 litara vode : 3 žličice;  
b) treba staviti 1 žličicu;  
c) potroši 24 žličice gnojiva.
5. Sjena drveta duga je 0.5 m.
6. Dobije se 535,50 kn.
7. Može se sašti 12 odjela.
8. a)  $x = 48$ ; b)  $x = -2$ .
9. Treba zaposliti još 42 radnika.
10. a) Treba 32 sanduka;  
b) u svakom sanduku je 40 kg jabuka;  
c) obrnuto su proporcionalni.

3. Postotni i kamatni račun

3.0. Uvod

1. Dekadski razlomci.

2. a)  $\frac{5}{2}$ ; b)  $\frac{3}{5}$ ; c)  $\frac{29}{25}$ ; d)  $\frac{7}{100}$ .

3.  $0.06; 0.12; 4.53; \approx 1.71; 0.75; \approx 0.33$ .

4.  $\frac{3}{8}, \frac{1}{2}, \frac{5}{16}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3} = 1$ .

3.1. Pojam postotka

1. a) 84% stanovništva ima završenu barem OŠ;  
b) 50% učenika se ne vozi biciklom;  
c) 29% površine Zemlje zauzima kopno;  
d) na kopnenoj polutki more zauzima 51% površine, a na vodenoj 91% površine.

2. a) Maja je dobila 35%, Maja je dobila manje;  
b) treći radnik će dobiti 38%, i on je najviše i zaradio;  
c) Peti stan bi trebao zauzimati -12%, a to nije moguće, znači da nisu dobro podijelili površinu.

3. a)  $3 : 100$ ; b)  $7 : 100$ ; c)  $29 : 100$ ;  
d)  $53 : 100$ ; e)  $61 : 100$ ; f)  $77 : 100$ ;  
g)  $91 : 100$ .

4. a)  $\frac{3}{10}$ ; b)  $\frac{39}{50}$ ; c)  $\frac{1}{5}$ ; d)  $\frac{11}{20}$ ;  
e)  $\frac{3}{5}$ ; f)  $\frac{9}{20}$ ; g)  $\frac{9}{10}$ .

5.

Postotak	Omjer	Decimalni broj
78%	78 : 100	0.78
14%	14 : 100	0.14
5%	5 : 100	0.05
24%	24 : 100	0.24
8%	8 : 100	0.08
15%	15 : 100	0.15
50%	50 : 100	0.5
25%	25 : 100	0.25
6%	6 : 100	0.06

Postotak	Omjer	Decimalni broj
12%	12 : 100	0.12
27%	27 : 100	0.27
38%	38 : 100	0.38
56%	56 : 100	0.56
75%	75 : 100	0.75
60%	60 : 100	0.6
89%	89 : 100	0.89
61%	61 : 100	0.61
99%	99 : 100	0.99
55%	55 : 100	0.55

Decimalni broj	Postotak
0.234	23.4%
0.145	14.5%
0.6	60%
0.19	19%
0.007	0.7%
0.35	35%
0.5	50%
0.385	38.5%
0.99	99%
0.67	67%
0.09	9%
0.03	3%

8. a) 75% učenika; b) 80% učenika;  
c) 56% pogodaka; d) 80% točnih zadataka;  
e) 70% kupaca; f) 54.17% dobitnih;  
g) izgubi 25%.
9. a) 13% učenika; b) 66.67% studenata;  
c) u 80% auta; d) spuste za 37.5%;  
e) 79.41% vrsta kolača; f) 54.6% stanovnika;  
g) 90% mjesta.
10. b) 60%; c) 50%; d) 20%;  
e) 43.75%; f) 37.5%, 50%; g) 31.25%, 25%.

11.

Postotak	Omjer	Razlomak	Dec. broj
178%	178 : 100	$\frac{178}{100}$	1.78
64%	64 : 100	$\frac{64}{100} = \frac{16}{25}$	0.64
500%	500 : 100	$\frac{500}{100}$	5
240%	240 : 100	$\frac{240}{100}$	2.4
86%	86 : 100	$\frac{86}{100} = \frac{43}{50}$	0.86
55%	55 : 100	$\frac{55}{100} = \frac{11}{20}$	0.55
10.1%	10.1 : 100	$\frac{10.1}{100} = \frac{101}{1000}$	0.101
2.5%	2.5 : 100	$\frac{2.5}{100} = \frac{1}{40}$	0.025
325%	325 : 100	$\frac{325}{100} = \frac{13}{4}$	3.25

12.

Postotak	Omjer	Razlomak	Dec. broj
18%	18 : 100	$\frac{9}{50}$	0.18
15%	3 : 20	$\frac{3}{20}$	0.15
40%	2 : 5	$\frac{2}{5}$	0.4
298%	298 : 100	$\frac{298}{100}$	2.98

Postotak	Omjer	Razlomak	Dec. broj
125%	125 : 100	$\frac{5}{4}$	1.25
83.33%	5 : 6	$\frac{5}{6}$	0.83
78%	39 : 50	$\frac{39}{50}$	0.78
457%	457 : 100	$\frac{457}{100}$	4.57
85%	17 : 20	$\frac{17}{20}$	0.85
325%	13 : 4	$\frac{13}{4}$	3.25

13.

Postotak	Omjer	Razlomak	Dec. broj
24%	6 : 25	$\frac{6}{25}$	0.24
25%	2 : 8	$\frac{1}{4}$	0.25
140%	7 : 5	$1\frac{2}{5}$	1.4
56%	14 : 25	$\frac{14}{25}$	0.56
147%	147 : 100	$\frac{147}{100}$	1.47
455%	91 : 20	$\frac{91}{20}$	4.55
42.86%	3 : 7	$\frac{3}{7}$	0.43
220%	11 : 5	$\frac{11}{5}$	2.2

3.2. Računanje s postocima

1. U trećoj smjeni radi 33 radnika.
2. Prošli tjedan joj je platila 300 kn.
3. Broj učenika se povećao za 150.
4. Iznos poreza je 143 kn.
5. Nakon godinu dana cijena bi bila 93 750 kn.
6. Te žitarice voli 2632 ispitanika.
7. Platila ga je 540 kn.
8. Rukavice je platio 79.25 kn.
9. Obitelji s djecom je 646.
10. a) 37.5; b) 2009.84; c) 7.5; d) 24.75;  
e) 30.5855; f) 6.72; g) 5.07; h) 46.08;  
i) 6.225; j) 124.8; k) 70.2.
11. Uspešnost mu je 62.5%.
12. Svibanjska prodaja je 72% travanske.
13. Snijena je za 20%. 14. Točnost mu je 85%.
15. Prešli su 20% puta.
16. a) Riješio je 80% zadaće;  
b) točno je riješio 75% od onog što je riješio;  
c) od cijele zadaće riješio je 60%.
17. U školskoj kuhinji ruča 8.24%.
18. Uspešnost mu je 70%.
19. Telefonskih računa ima 46.875%.
20. Domaćih turista je bilo 17.5%.
21. a) 50%; b) 90.91%; c) 75%; d) 150%;  
e) 25%; f) 25%; g) 100%; h) 500%;  
i) 125%; j) 200%; k) 160%.
22. Može narasti do 5.6 m.
23. Škola ima 700 učenika.
24. Knjiga ima 300 stranica.
25. Može proizvesti 480 kutija čavlića.
26. Glasovalo je 400 učenika.
27. Potrebno je 880 bodova.

28. Matija je napravio 32 ukrasa.  
 29. Ani je potrebno 406.75 kn.  
 30. Stane 3.6 tone papira.  
 31. Želi ispeći 300 kolača.  
 32. a) 185; b) 13.6; c) 100; d) 125;  
     e) 40; f) 130; g) 90; h) 2;  
     i) 60; j) 9; k) 70.
- | postotak | osnovna vrijednost | postotni iznos |
|----------|--------------------|----------------|
| 12%      | 2.56               | 0.3072         |
| 20%      | 34.5               | 6.9            |
| 24%      | 1485               | 356.4          |
| 30%      | 33                 | 9.9            |
| 18%      | 25                 | 4.5            |
33. 34. Stiglo je 12 kg pastrva.  
 35. U vlaku je 200 putnika.  
 36. 76.47% obitelji ima kućnog ljubimca.  
 37. Održano je 93.33% sati.  
 38. Gadao je 20 puta.  
 39. Zadaču nema 40% učenika, a ima 60%.  
 40. Vrijednost prodane robe je 68880 kn.  
 41. Ukupno dugovanje je 15000 kn.  
 42. 30% je vrlo dobrih ocjena.  
 43. Pisalo je 32 učenika.  
 44. Uspješnost mu je 43.75%.  
 45. Trebaju platiti 21000 kn poreza.  
 46. a) Prolaznost je 69.44%;  
     b) to je 9 učenika.  
 Uspješnije je riješen test u a) slučaju.

### 3.3. Postoci u svakodnevnom životu

1. Sada košta 13.5 kn.  
 2. Prije je koštalo 1240 kn.  
 3. Sada je 63 kn.  
 4. Prije je koštalo 8 kn po litri.  
 5. Pojeftinila je 40.82%.  
 6. Prije su bile široke 50 cm.  
 7. Sniženo je za 31.25%.  
 8. Prije povećanja cijena je bila 125 kn, i povećala se za 12%.  
 9. Porez je 29.7 kn, a cijena s porezom je 164.70 kn.  
 10. Napravio je prometa za 14 000 kn.  
 11. Platila bi ga 2800 kn.  
 12. Luka će bicikl platiti 1350 kn. Rata će morati biti 450 kn.  
 13. a) Platila bi 198 kn;  
     b) karticom bi platila 280 kn.  
 14. a) Karticom bi platila 140 kn;  
     b) gotovinom bi platila 270 kn.  
 15. a) 28.78 kn; b) 57.58 kn; c) 142.38 kn;  
     d) 345.49 kn; e) 834.99 kn; f) 1422.31 kn.  
 16. Prodajna cijena je 382.93 kn.  
 17. Prodajna cijena je 496 kn.  
 18. a) 33.33 kn; b) 133.33 kn; c) 2000 kn.  
 19. Marža je 13.38%.  
 20. Nabavna cijena trebala bi morati biti 800 kn.  
 21. Umire 0.18 % pušača. U ovom slučaju to je 90 000 ljudi.  
 22. Poskupio je za 6.32%.  
 23. Plaća je 3349.50 kn.  
 24. Plaća je 3118.50 kn.  
 25. Cijena mu je 9504 eura.  
 26. Najnovija cijena je 7.55 kn.  
 27. Cijena je morala biti 200 kn, mora spustiti novu cijenu za 13.04%.  
 28. Smanjila se za 13.75%. Početna cijena je bila 1200 kn.  
 29. Treba ju sniziti za 16.67%.  
 30. Početna cijena bila je 3000 kn.  
 31. Smanjila se za 12%. Početna cijena je bila 1500 kn.  
 32. Povećale su se za 5.8%. U siječnju je plaća

- iznosila 4500 kn.  
 33. Dobije se 31.25 kg suhih šljiva.  
 34. Dobije se 200 kg sušenih smokava.  
 35. Dobije se 10 kg čipsa.  
 36. Težina vreće je približno 85.71 kg.  
 37. Nazvala je 24 osobe.  
 38. U rezervoaru ima 200 litara.  
 39. Uklonjeno je 420 m<sup>3</sup> zemlje.  
 40. Ukupno je vraćeno 300 knjiga.  
 41. Prošle godine je upisano 390 učenika.  
 42. Engleskog ljetlja ima 1.875 kg.  
 43. Glasalo je 75%.  
 44. Ima 1.575 kg mlijecne masti.  
 45. Riješenost je 68%.  
 46. U 8. razredu ima 306 učenika.  
 47. Prodano je 111 dječjih bicikala.  
 48. Točno je riješio 36 zadatka.  
 49. Popunjeno je 27 sjedala.  
 50. Dostavljena je u 95% kuća.  
 51. Cijena bez poreza je 16210 eura.  
 52. Snižene su za 19.44%.  
 53. Skuplje je 10%.  
 54. U postocima najviše su snižene krafne (25.64%).  
 55. Muških članova koji igraju nogomet ima 51.  
 56. a) Prije godinu dana bila je visoka približno 1.40 m;  
     b) prije dvije godine bila je visoka približno 1.30 m.  
 57. b) Za 3 godine veću plaću će imati tata;  
     c) zajedno će zarađivati 11093.92 kn.  
 58. Početna cijena je 6654.42 kn.  
 59. Autobus košta 272.80 kn, smještaj 806 kn, ulaznice 111.60 kn i završna večera 49.60 kn.  
 60. a) 0.85 g/dm<sup>3</sup>; b) 1 g/dm<sup>3</sup>; c) 1.13 g/dm<sup>3</sup>.  
 61. a) Lukina soba zauzima 10% stana;  
     b) ponovo mora obojati 37.5%;  
     c) mogu, jer je 20 m<sup>2</sup> 50% kupaonice;  
     d) preostalo im je 8.33% posla.

### 3.4. Jednostavni kamatni račun

1. Ukupno 5580 kn.  
 2. Kamate su 378 kn.  
 3. Dobit će 1241.4 kn.  
 4.
- | glavnica (kn) | kamatna stopa | vrijeme (g) | kamata |
|---------------|---------------|-------------|--------|
| 2500          | 10%           | 2           | 500    |
| 400           | 12%           | 6           | 288    |
| 5550          | 8%            | 1.5         | 666    |
| 1500          | 4.5%          | 16          | 1080   |
| 824           | 16%           | 10          | 1318.4 |
| 2890          | 3.2%          | 2.5         | 231.2  |
| 100 000       | 35%           | 25          | 875000 |
5. Kamate su 810 kn.  
 6. Dobit će 52.5 kn kamata.  
 7. Kamate su 6000 kn.  
 8. Kamate će biti  
     a) 324 kn; b) 291.6 kn; c) 67.5 kn.  
 9. Dobit će ukupno  
     a) 11600 eura; b) 10896 eura;  
     c) 10186.67 eura; d) 11013.33 eura.  
 10. Kamate će biti  
     a) 9384 kn; b) 5474 kn; c) 3258.33 kn.  
 11. Ukupno vraća 2 940 365.33 kn.

12. Imat će mo 33125 kn.  
 13. Kamatna stopa je 15%.  
 14. Kamatna stopa je 6.25%.  
 15.
- | g (kn)  | s (%) | v (g) | k (kn)  |
|---------|-------|-------|---------|
| 2504    | 2.5%  | 3     | 187.8   |
| 4200    | 5%    | 4     | 840     |
| 15560   | 10%   | 2.5   | 3890    |
| 1500    | 15%   | 15    | 3375    |
| 800     | 19%   | 20    | 3040    |
| 2900    | 8%    | 6.25  | 1450    |
| 100 000 | 9.8%  | 30    | 294 000 |
16. Kamatna stopa je 3.63%.  
 17. Kamatna stopa je 3.54%.  
 18. Treba uložiti 62 500 kn.  
 19. Treba uložiti 142857.14 kn.  
 20. Uloženo je 400 kn.  
 21.
- | g (kn)    | s (%) | v (g) | k (kn)    |
|-----------|-------|-------|-----------|
| 500       | 5%    | 5     | 125       |
| 52100     | 6.3%  | 2     | 6564.6    |
| 68450     | 1.9%  | 12    | 15606.6   |
| 200 000   | 3.99% | 1.5   | 11970     |
| 999       | 25%   | 24    | 5994      |
| 24100     | 15%   | 3.5   | 12652.5   |
| 1 000 000 | 8%    | 24    | 1 920 000 |
22. Iznos kredita je 22 000 kn.  
 23. Treba štedjeti 10 godina.  
 24. Treba štedjeti 15 mjeseci.  
 25. a) Kredit će raspodjeliti 16 mjeseci;  
     b) rata će joj biti 2902.50 kn;  
     c) tada bi kamate bile 2880 kn;  
     d) konačna cijena bi bila 47 880 kn;  
     e) mjesечna rata bi bila 1496.25 kn;  
     f) uvijek se najviše isplati bez kredita, ali sve ovisi o osobnim mjesечnim primanjima, mogućnostima i željama.
- | g       | s    | v   | k       |
|---------|------|-----|---------|
| 6000 kn | 4.5% | 6 g | 1620 kn |
| 7000 kn | 2.3% | 2 g | 322 kn  |
| 8000 kn | 4.5% | 4 g | 1440 kn |
| 9000 kn | 3.6% | 5 g | 1620 kn |
- 26.
- | g       | s    | v   | k       |
|---------|------|-----|---------|
| 4000 kn | 5.2% | 7 g | 1456 kn |
| 5000 kn | 1.7% | 6 g | 510 kn  |
| 9000 kn | 5.7% | 3 g | 1539 kn |
| 8000 kn | 4.4% | 2 g | 704 kn  |
28. Firma vraća 176 000 kn, mjesечna rata im je 1222.22 kn.  
 29. Narast će 478.33 eura.  
 30. Kamatna stopa je 3.5%.  
 31. Kamatna stopa je 1.5%.  
 32. U "minusu" je bila 2510 kn.  
 33. Treba uložiti 8055.94 kn.  
 34. Povoljniji je drugi kredit (kredit od 4500 kn, na 5 godina).  
 35. Više se isplati štedjeti u prvoj banci (uloženih 500 eura, za 40 mjeseci naraste za 80 eura).  
 36. Cijena stana bez kredita bila je 1025 eura po m<sup>2</sup>, mjesечna rata kredita je 410 eura, a u kunama se svaki mjesec preračunava po srednjem tečaju narodne banke na dan uplate.  
 37. Povoljnija je druga vrsta kredita, bez depozita.  
 38. Dulje traje otplata prvog kredita (45 000 uz kamatnu stopu 6.5%).  
 39. Trebali bi staviti 454 545.45 kn.  
 40. Nakon dvije godine ušteđevina će iznositi a) 2160 kn; b) 2163.20 kn; c) 2164.86 kn.

### 3.5. Ponavljanje

- Postotak je razlomak s nazivnikom 100.
- Veće je 15% od 1000, jer računamo isti postotak od većeg broja.
- Neće zato jer pojeftinjuje 10% nova, veća cijena.
- Pomnožimo postotak i osnovnu vrijednost.
- 1000.
- Kamata je naknada koju dužnik plaća za posuđeni novac ili banka daje za uloženi novac.
- Kamate ovise o glavnici, kamatnoj stopi i vremenu ukamačivanja.
- Novac koji ulažemo na štednju ili posudujemo od banke naziva se glavnica. Postotak koji određuje kamatu naziva se kamatna stopa.
- Vrijeme treba biti u godinama.
- Kamate računamo po formuli  $k = s \cdot g \cdot v$ .
- $s = \frac{k}{g \cdot v}$ . 12. Veće je 25. 13. Manje je 25.

### Zadaci za ponavljanje

- Drugi je dobio 63%.

Postotak	Omjer	Decimalni broj
32%	32 : 100	0.32
13%	13 : 100	0.13
67%	67 : 100	0.67

- a) 40% razreda ide na ples;
- b) 29.41% je bijele boje.

- Obojano je a) 33.33%; b) 37.5%.

5.

Postotak	Omjer	Razlomak	Dec. broj
32%	8 : 25	$\frac{8}{25}$	0.32
75%	3 : 4	$\frac{3}{4}$	0.75
250%	5 : 2	$2\frac{1}{2}$	2.5
124%	31 : 25	$\frac{31}{25}$	1.24
0.4%	1 : 250	$\frac{1}{250}$	0.004

6. b) 15.

7. c) postotni iznos

postotak	osnovna vrijednost	postotni iznos
3.2%	375	12
11%	405	44.55
88%	200	176
68.27%	1.45	0.99
235%	425	998.75

9. 78; 156; 390; 780.

10. Prolaznih ocjena je 73.33%.

11. Napravio je 16000 kn prometa.

12. Marža je 44.44%.

13. Uspješnost mu je 31.25%.

14. Matija može baciti loptu 350 cm.

15. Cijela knjiga ima 200 stranica.

16. Platila je 400 000 kn.

17. c) osnovna vrijednost uvećana za postotni iznos.

18. Cijena bez poreza je 5320 kn, a porez iznosi 1170.40 kn.

19. Tada je cijena 78.32 kn.

20. Snižena cijena je 175.50 kn.

21. Postotak povećanja je 6%.

22. Promjenila se približno 20%.

- Plaća je bila 4230 kn.
- Plaća je bila 3254 kn.
- Umanjena je za 196 kn.
- a) Gotovinom treba platiti 382.50 kn;  
b) postotak sniženja je 30.59%.
- Cijena mu je 982.56 kn.
- a) Konačna cijena je veća od početne cijene;  
b) treba je sniziti za 20%.
- Dobije se 2.5 kg sušene papaje.
- Dobije se 12 kg sušenog voća.
- b) 31.

g	s	v	k
1200 kn	1.2%	5 g	72 kn
2540 kn	7.5%	4 g	762 kn
700 eura	6.6%	8 g	369.60 eura
1100 kn	11.3%	4 g	497.20 kn

- Treba štedjeti 5 godina.
- Otplata kredita traje 10 godina.
- Treba oručiti 2500 kn.
- Kamatna stopa je 6.25%.
- Ukupno treba vratiti 72940 eura, i mjesecna mu je rata 1105.15 eura.
- Iznos kredita je 25000 kn.
- Kamatna stopa je 2.5%.
- Kamatna stopa je 4%.
- Povoljniji je prvi kredit (6200 kn).
- Treba uložiti 120 000 eura.
- Dulje traje prvi kredit (4000 eura).
- Neće, uštedjet će 1728 kn.

### Primerak oglednog testa:

- a) 1600; b) 16000; c) 25%.
- 25% puta je prešao.
- Moglo bi biti loše proizvedeno 350 igračaka.

	početna cijena	cijena nakon sniženja
hlače	250 kn	212.5 kn
jakna	475 kn	403.75 kn
majica	99 kn	84.15 kn

- Dobit će 750 kn kamata.
- Kamatna stopa je 7.5%.

### 4. Statistika i vjerojatnost

#### 4.0. Uvod

- 88% od 1000 = 880 komada.
- Prosječna ocjena mu je 4.25.
- Pola je dobitnih. 4. Šanse su iste.
- Ana troši najviše vremena na spavanje.  
Zbroj mora biti 100%.

### 4.1. Grafičko prikazivanje podataka

1. a)

Dani	pon	uto	sri	čet	pet
broj prodanih novina	4	8	5	9	11

- b) 4, 8, 5, 9, 11.

- 2.a)

Vrsta glazbe	Broj CD-a
rock	7
narodna	3
hiphop	11
klasična	2
jazz	0
rap	6
pop	1

- b) hiphop.

3. a) Najviši račun ima poduzeće E, a najniži

poduzeće D; b) poduzeće A je napravilo 225 poziva, a poduzeće D 25 poziva; c) 775 poziva.

4. a)

MERKUR	O
VENERA	O
ZEMLJA	O
MARS	OO
JUPITER	oooooooooooooooooooo
SATURN	oooooooooooooooooooo
URAN	oooooooooooooooooooo
NEPTUN	ooooooo
PLUTON	O

b) Uran; c) nemaju satelita; d) devet satelita; e) devet puta više.

5. a)  $O = 5 \cdot CD-a$

MATIJA	oooooooooooo
LUKA	oooo
ANA	oooooo
MAJA	ooooooo
TANJA	OO

- b)  $\square = 4 \text{ pisma}$

HORVAT	□ □ □ □
JURIĆ	□ □
MATIĆ	□ □ □
HERCEG	□ □ □ □ □
KRALJ	□ □ □ □ □

7. a) Najviše bodova imala je Maja,

a najmanje Matija;

- b) Maja ima 50 bodova, a Ivana 25;

c) Ivana ima dvostruko manje bodova,

a Matija pet puta manje;

- d) 125 bodova.

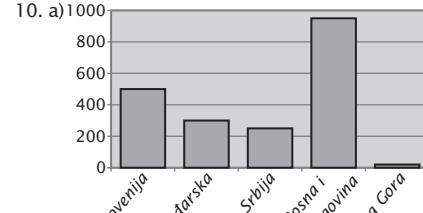
8. a) U našem tijelu kisika ima 65%, ugljika 19%, vodika 10% i ostalih elemenata 8%;

b)

element	kisik	ugljik	vodik	ostali
postotak	65	19	10	8

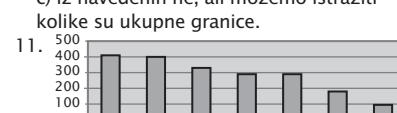
9. vrh visina

Mont	8848 m
Everest	6960 m
Acon-cagua	6190 m
McKinley	5895 m
Kilim-anjaro	4807 m
Mont Blanc	4300 m
Markken	2230 m
Kosciusko	

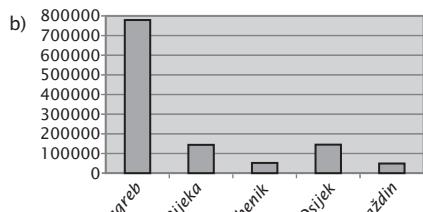


- b) Hrvatska s BiH ima najdužu granicu, a Crnom Gorom najkratku;

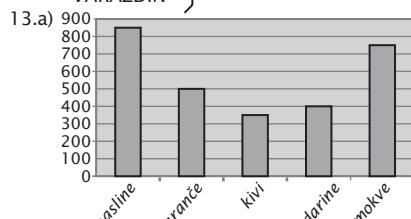
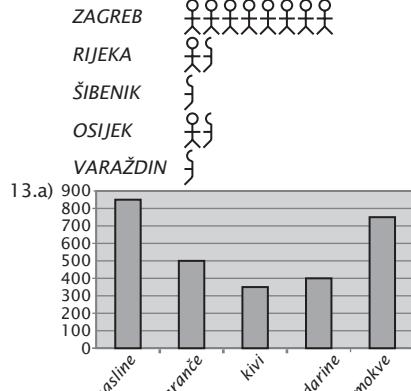
- c) iz navedenih ne, ali možemo istražiti kolike su ukupne granice.



Grad	Broj stanovnika	broj stanovnika zaokružen na tisućice
Zagreb	779 145	779 000
Rijeka	144 043	144 000
Sibenik	51 553	52 000
Osijek	144 616	145 000
Varaždin	49 075	49 000



c)  $\textcircled{O} = 100\ 000 \text{ stanovnika}$



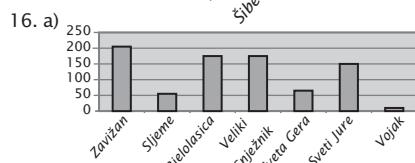
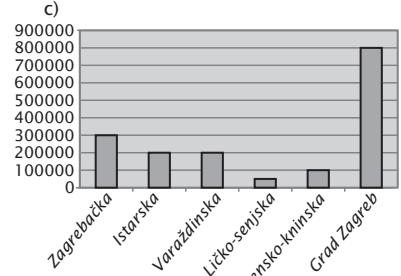
b)  $\textcircled{O} = 100 \text{ stabala}$

Mesec	Broj stabala
MASLINE	10
NARANČE	5
KIVI	3
MANDARINE	2
SMOKVE	8

14. a) Dijagram prikazuje broj stanovnika zaokružen na sto tisuće, po županijama RH;

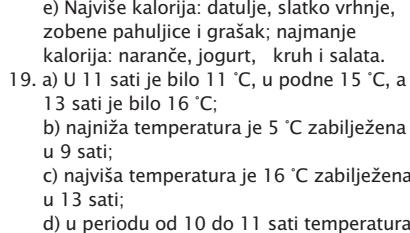
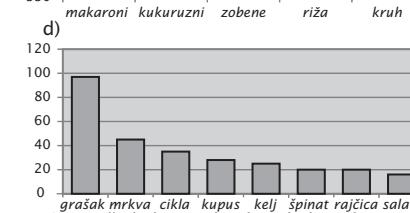
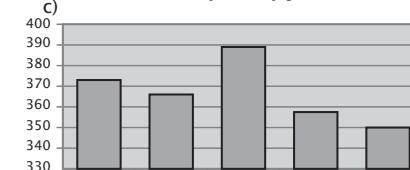
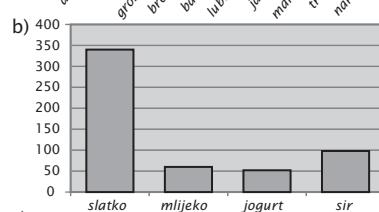
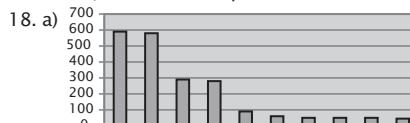
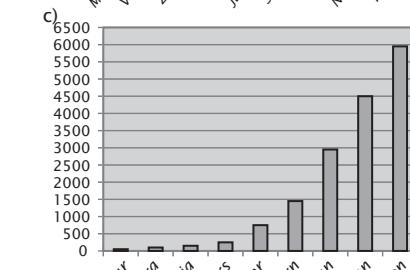
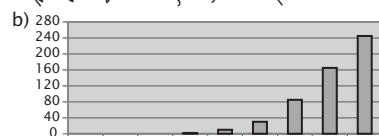
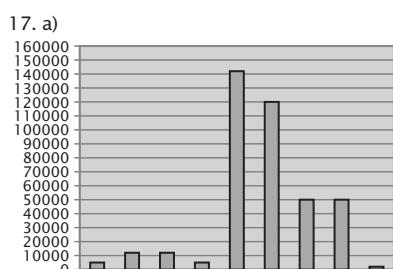
b)

županija	broj stanovnika
Zagrebačka	300 000
Istarska	200 000
Varaždinska	200 000
Ličko-senjska	50 000
Šibensko-kninska	100 000
Grad Zagreb	800 000



a) Najviše snijega ima na Zavižanu, a najmanje na Vojaku;

b) ne može se zaključiti koji je vrh najviši.



je rasla, od 11 do podneva također je rasla, a od 13 do 14 sati je padala.

21. a) Prodaja raste od lipnja do srpnja, pada od srpnja do kolovoza, stagnira od kolovoza do rujna i pada od rujna do studenog;

b) najviše su prodali u srpnju, a najmanje

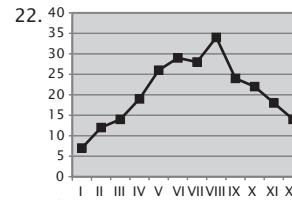
u studenom;

c) prodaja se nije mijenjala u kolovozu i rujnu;

d) u posljednja tri mjeseca prodaja je padala;

e)

mjesec	broj prodanih primjeraka
lipanj	800
srpanj	900
kolovoz	700
rujan	700
listopad	600
studeni	500



23. a) 28. i 30. travanj;

b) 22. travanj;

c) 26. travnja;

d) 9., 10., 11., 12., 17., 18., 20., 21., 25., i 26. travnja.

25. 200; 100; 25; 175.

26. 12; 2.4; 2.4; 6.

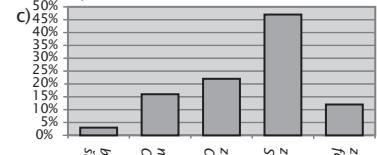
27. a) Predsjednik je Maja, a zamjenik Jan;



c) Jan je dobio 7 glasova, Maja 9, a Luka 4 glasa.



b) najviše ima ljudi sa završenom srednjom školom;

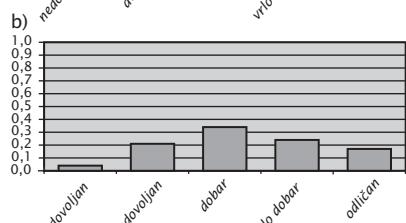
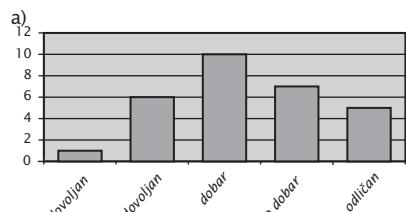


d) bez škole je 133124, s nezavršenom OŠ je 709994, sa završenom OŠ je 976241, sa završenom SŠ je 2085606 i sa završenim fakultetom je 532495 stanovnika.

#### 4.2. Analiza podataka

3.

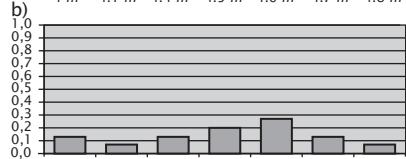
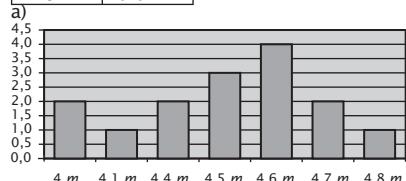
ocjene	relativne frekvencije
1	0.04
2	0.21
3	0.34
4	0.24
5	0.17



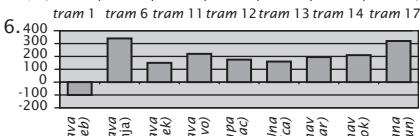
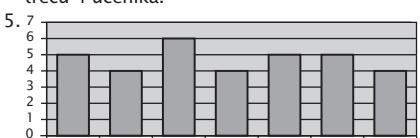
c) nedovoljnih 4%, dovoljnih 21%, dobrih 34%, vrlo dobrih 24%, odličnih 17%;  
d) prosječna ocjena je 3.31.

4.

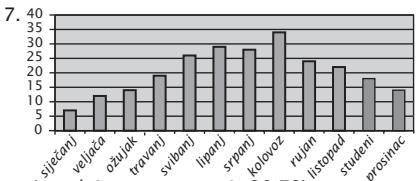
4 m	0.13
4.1 m	0.07
4.4 m	0.13
4.5 m	0.2
4.6 m	0.27
4.7 m	0.13
4.8 m	0.07



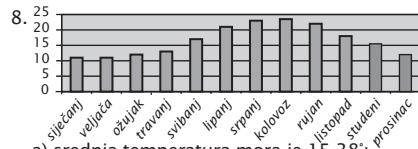
c) Prvu nagradu dobio je 1 učenik, drugu 2, a treću 4 učenika.



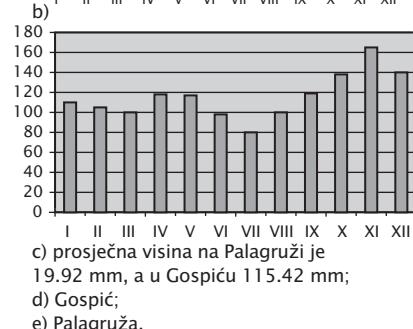
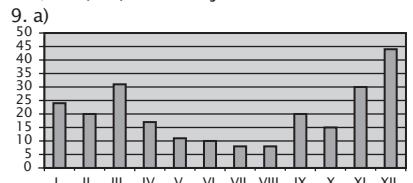
a) najviši vodostaj je na području Sava Županja, a najniži Sava Zagreb;  
b) ne.



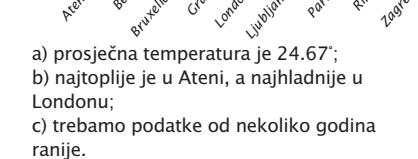
a) srednja temperatura je 20.78°;  
b) najniža temperatura je u siječnju, a najviša u kolovozu;  
c) razlika temperature je 25.9°.



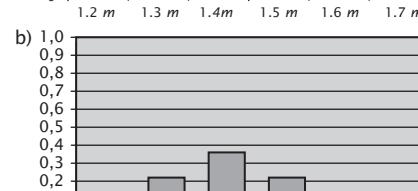
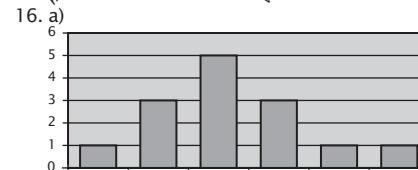
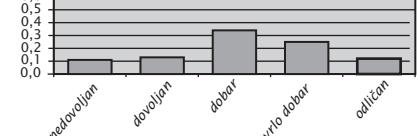
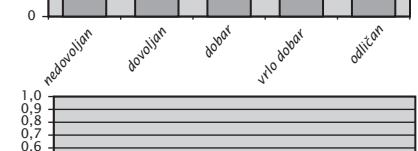
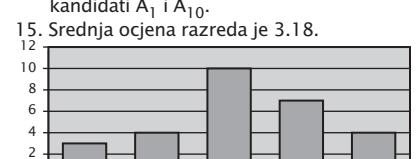
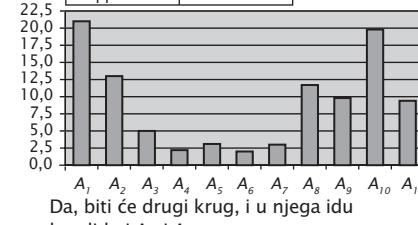
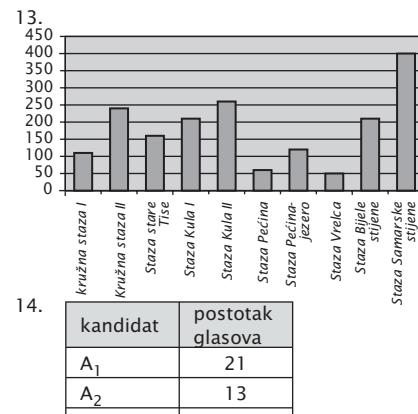
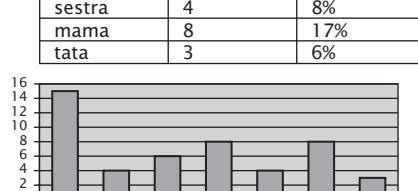
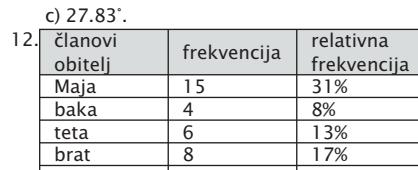
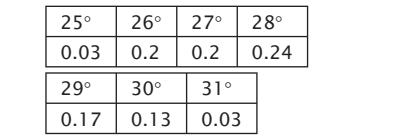
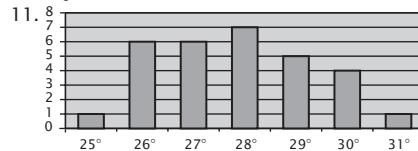
a) srednja temperatura mora je 15.38°;  
b) najviša je u kolovozu, najniža u veljači, a najbliže srednjoj u studenom;  
c) u VI, VII, VIII i IX mjesecu.



c) prosječna visina na Palagruži je 19.92 mm, a u Gospiću 115.42 mm;  
d) Gospic;e) Palagruža.



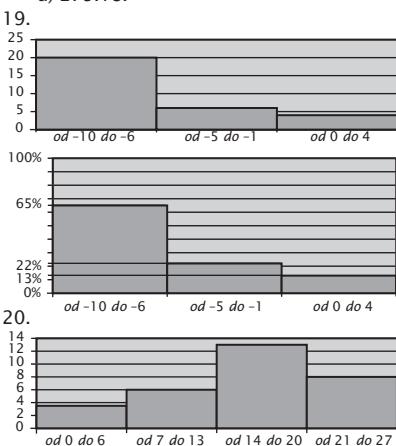
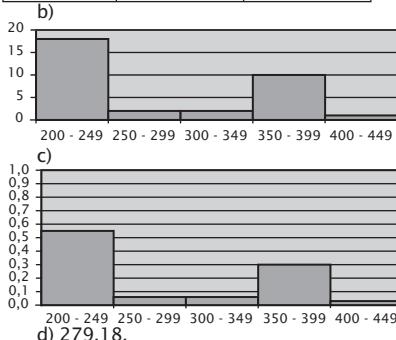
a) prosječna temperatura je 24.67°;  
b) najtoplje je u Ateni, a najhladnije u Londonu;  
c) trebamo podatke od nekoliko godina ranije.



visina skoka	frekvencija	relativna frekvencija	postotak
1.2 m	1	0.07	7%
1.3 m	3	0.22	22%
1.4 m	5	0.35	35%
1.5 m	3	0.22	22%
1.6 m	1	0.07	7%
1.7 m	1	0.07	7%

d) Prvu i drugu nagradu dobila je po jedna učenica, a treću su dobitile 3 učenice.

razred	frekvencija	relativna frekvencija
200-249	18	0.55
250-299	2	0.06
300-349	2	0.06
350-399	10	0.30
400-449	1	0.03

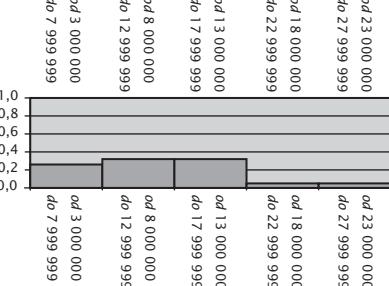
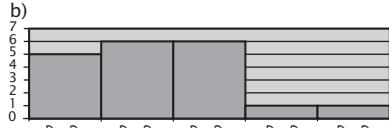


a) 17.07;  
c) 63.21%.

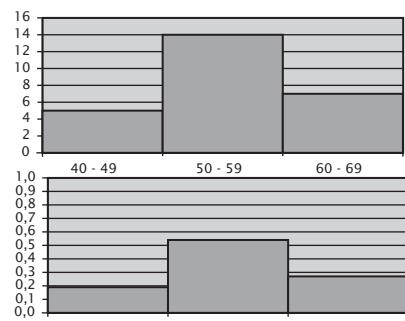
br. stanovnika po razredima	frekvencija	relativna frekvencija
od 3 000 000 do 7 999 999	5	0.26
od 8 000 000 do 12 999 999	6	0.32
od 13 000 000 do 17 999 999	6	0.32
od 18 000 000 do 22 999 999	1	0.05
od 23 000 000 do 27 999 999	1	0.05

21.

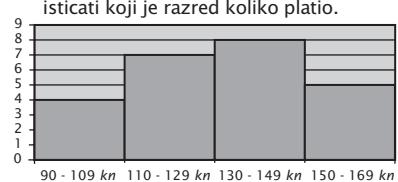
a) Zagreb ima 779 145 stanovnika, ne bi bio niti u jednoj od ovih grupa; c) ne.



težina učenika u kg	frekvencija	relativna frekvencija
40-49	5	19%
50-59	14	54%
60-69	7	27%



Aritmetička sredina težina učenika je 56,58 kg.  
23. a) Najbolji je histogram ako ne želimo isticati koji je razred koliko platio.



#### 4.3. Vjerovatnost slučajnog događaja

4. Elementarnih događaja ima 16:

a)  $P = \frac{1}{4}$ ; b)  $P = \frac{1}{16}$ ; c)  $P = \frac{1}{2}$ ; d)  $P = \frac{3}{16}$ ;

najviše bodova nosi bijela, a najmanje zelena boja.

5. a) Elementarnih događaja ima 24;

b)  $P = \frac{1}{6}$ ; c)  $P = \frac{2}{3}$ ; d)  $P = \frac{7}{12}$ .

6. a)  $P = \frac{1}{7}$ ; b)  $P = \frac{8}{21}$ ; c)  $P = \frac{16}{21}$ ; d)  $P = \frac{9}{14}$ .

7. a)  $P = \frac{5}{11}$ ; b)  $P = \frac{4}{11}$ ; c)  $P = \frac{6}{11}$ ;

d)  $P = \frac{4}{11}$ ; e)  $P = \frac{5}{11}$ .

8. a)  $P = \frac{1}{2}$ ; b)  $P = \frac{1}{2}$ ; c)  $P = \frac{2}{3}$ ;

d)  $P = \frac{1}{2}$ ; e)  $P = \frac{1}{2}$ .

9. a)  $P = \frac{1}{2}$ ; b)  $P = \frac{1}{2}$ ; c)  $P = \frac{1}{3}$ ; d)  $P = \frac{1}{3}$ .

10. a) U posudi ima 44 žute, 74 bijele,

38 crvenih, 40 plavih i 4 šarene kuglice;

b)  $P = \frac{11}{50}$ ; c)  $P = \frac{14}{25}$ ; d)  $P = \frac{49}{50}$ ;

e) koliko posto ima kojih kuglica proporcionalna je i vjerojatnost da će kuglica biti izvučena.

11. a) 25;

b) kupona s voćem ima 5, s povrćem 4, s voćnim sokovima 6, s gaziranim sokovima 2 i 8 sa školskim priborom;

c)  $P = \frac{8}{25}$ ; d)  $P = \frac{3}{5}$ ; e)  $P = \frac{8}{25}$ ;

f) vjerojatnost = postotak.

12. a)  $P = 0.4$ ; b)  $P = 0.2$ ; c)  $P = 0.1$ ;

d)  $P = 0.6$ ; e)  $P = 0.7$ ; f) zelenu.

13. a)  $P = 0.15$ ; b)  $P = 0.2$ ; c)  $P = 0.87$ ;

d)  $P = 0.13$ ; e) Matija.

14. a)  $P = \frac{1}{3}$ ; b)  $P = 0$ ; c)  $P = 1$ ; d)  $P = 0$ .

16. a)  $P = 0$ ; b)  $P = 1$ ; c)  $P = \frac{1}{3}$ ; d)  $P = \frac{1}{2}$ .

17. a) U posudi ima 75 žutih, 63 bijele, 93 crvene, 60 plavih i 9 zelenih kuglica;

b)  $P = 0.25$ ; c)  $P = 0.52$ ; d)  $P = 1$ ; e)  $P = 0$ .

18. a) 23; b)  $P = \frac{6}{23}$ ; c)  $P = \frac{14}{23}$ ;

d)  $P = \frac{4}{23}$ ; e)  $P = \frac{12}{23}$ .

19. a)  $P = \frac{16}{31}$ ; b)  $P = \frac{8}{31}$ ; c)  $P = 0$ ; d)  $P = 1$ .

20. a)  $P = 0$ ; b)  $P = 1$ ; c)  $P = \frac{5}{6}$ ; d)  $P = \frac{1}{2}$ .

21. a) 104; b)  $P = 0$ ; c)  $P = \frac{5}{13}$ ; d)  $P = 1$ .

22. a)  $P = \frac{1}{2}$ ; b)  $P = \frac{5}{8}$ ; c)  $P = \frac{1}{2}$ .

23.  $P = \frac{1}{5}$ ; Matija ima veće šanse za pogodak ako je manje ponuđenih odgovora; Matija ima veće šanse za pogrešku ako je više ponuđenih odgovora.

24. U jezeru ima 100 pastrva, 50 somova, 175 šarana, 75 smudeva i 100 ostalih riba;

a)  $P = 0.35$ ; b)  $P = 0.2$ ; c)  $P = 0.8$ ; d)  $P = 0$ .

25. a) 60; b)  $P = \frac{3}{4}$ ; c)  $P = 0.45$ ; d)  $P = 0.55$ ;

e) Ana jer karata s nogometarsima ima više.

26. a)  $P = \frac{1}{8}$ ; b)  $P = 0$ ; c)  $P = \frac{1}{2}$ ; d)  $P = \frac{1}{4}$ .

27. a)  $P = \frac{1}{2}$ ; b)  $P = \frac{1}{2}$ .

28. a)  $P = \frac{9}{20}$ ; b)  $P = \frac{9}{20}$ ; c)  $P = \frac{1}{10}$ .

29. a)  $P = 0.311293$ ; b)  $P = 0.688707$ ;

c)  $P = 0.0008$ ; d)  $P = 0.000001$ ;

e)  $P = 0.26$ ;

f) najvjerojatnije je da neće dobiti ništa.

30. a)  $P = \frac{1}{2}$ ; b)  $P = 0$ ; c)  $P = 1$ .

31. a)  $P = 0$ ; b)  $P = 1$ ; c)  $P = \frac{1}{10}$ ; d)  $P = 0$ .

32. Vjerovatnost da izvučemo kraću je  $P = \frac{1}{5}$ ; da izvučemo dulju je  $\frac{4}{5}$ ;

veće su šanse za izvlačenje dulje slamčice.

33. a)  $P = \frac{4}{9}$ ; b)  $P = \frac{1}{3}$ .

34. a)  $P = 0$ ; b)  $P = 0.53$ ; c)  $P = 0.27$ .

35. a)  $P = \frac{11}{12}$ ; b)  $P = \frac{1}{12}$ ; c)  $P = \frac{1}{4}$ .

36. a)  $P = \frac{1}{7}$ ; b)  $P = \frac{6}{7}$ ; c)  $P = \frac{2}{7}$ ; d)  $P = \frac{5}{7}$ .

37.  $P = 0.999999$ .

38.  $P = 0.65$ ; veće su šanse za lijepo vrijeme.

39. a)  $P = \frac{1}{18}$ ; b)  $P = \frac{1}{12}$ ; c)  $P = 0$ ;

d)  $P = 1$ ; e)  $P = 0$ ; f)  $P = \frac{5}{6}$ .

40. c)  $P = \frac{2}{3}$ ; d)  $P = \frac{1}{3}$ .

41. a)  $P = \frac{1}{9}$ ; b)  $P = \frac{7}{36}$ ; c)  $P = \frac{7}{18}$ .

d)  $P = \frac{11}{36}$ ; e)  $P = \frac{1}{3}$ ; f)  $P = \frac{1}{6}$ .

42. a)  $P = \frac{1}{4}$ ; b)  $P = \frac{1}{4}$ ; c)  $P = \frac{5}{6}$ .

d)  $P = \frac{4}{9}$ ; e)  $P = \frac{1}{9}$ ; f)  $P = \frac{11}{36}$ .

g)  $P = \frac{1}{18}$ ; h)  $P = \frac{1}{36}$ .

43. Vjerojatnost da će ga pitati je  $\frac{1}{30}$ , a da ga neće pitati je  $\frac{29}{30}$ , ali ipak treba učiti.

44. a)  $P = 0.15$ ; b)  $P = 0.13$ ;

c)  $P = 0.49$ ; d)  $P = 0.71$ .

45. a)  $P = 0.75$ ; b)  $P = 0.25$ .

46. a)  $P = \frac{2}{3}$ ; b)  $P = \frac{5}{6}$ .

47. a)  $P = \frac{1}{10}$ ; b)  $P = 0$ ; c)  $P = 0.6$ .

48. Vjerojatnost da će pogoditi je  $\frac{1}{3}$ ,

a da neće  $\frac{2}{3}$ .

49. a)  $P = \frac{1}{6}$ ; b)  $P = \frac{1}{6}$ .

50. a)  $x = 1$ , vjerojatnost je  $\frac{1}{6}$ ;

b)  $x < \frac{5}{3}$ , vjerojatnost je  $\frac{1}{6}$ .

51. a)  $P = \frac{1}{36}$ ; b)  $P = \frac{1}{9}$ .

52. a)  $x < 41$ , vjerojatnost je  $\frac{14}{23}$ ;

b)  $x \leq 31$ , vjerojatnost je  $\frac{5}{23}$ .

53. a)  $x \leq 36.25$ , vjerojatnost je  $\frac{1}{5}$ ;

b)  $x \geq 49$ , vjerojatnost je  $\frac{2}{5}$ .

54. a)  $x = 2$ , vjerojatnost je  $\frac{1}{6}$ ; b)  $P = \frac{5}{6}$ ;

c)  $x = 0$ , vjerojatnost je 0.

#### 4.4. Ponavljanje

1. Statistika je grana matematike koja se bavi načinima prikupljanja i obrade različitih podataka.

2. Statistički podaci se često pregledno prikazuju u tablicama, jer se na taj način lako očitava koji brojevi pripadaju kojoj veličini, te ih se lako uspoređuje.

3. Slikovni dijagram, stupčasti dijagram, kružni dijagram, linijski dijagram i drugi.

4. Kružni dijagram.

5. Frekvencija ili učestalost neke vrijednosti je broj koji nam kazuje koliko puta se ta vrijednost pojavila u nekom skupu.

6. Relativne frekvencije računamo tako da svaku frekvenciju podijelimo s ukupnim brojem pojavljivanja.

7. Aritmetička sredina niza brojčanih podataka je broj kojeg računamo tako da zbrojimo vrijednosti svih podataka, a zatim dobiveni zbroj podijelimo ukupnim brojem podataka.

8. Slučajni događaji su oni koji se mogu pojaviti kao ishod nekog pokusa.

9. Vjerojatnost nekog događaja A računamo kao omjer broja povoljnih i svih elementarnih događaja.  
 $P(A) = \frac{\text{broj povoljnih elementarnih događaja}}{\text{ukupan broj elementarnih događaja}}$ .

10. Vjerojatnost je uvijek broj između 0 i 1.

11. Razlomci, decimalni brojevi i postoci.

12. Radi se o sigurnom događaju.

13. Radi se o nemogućem događaju.

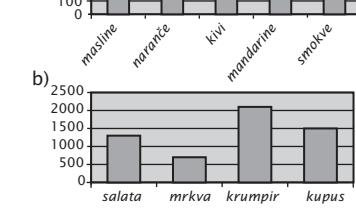
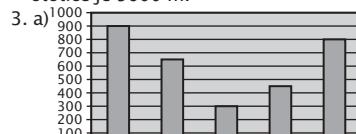
#### Zadaci za ponavljanje:

1. a) Najviše poziva je imalo poduzeće E, 275 poziva;  
 b) najmanje je imalo poduzeće D, 25 poziva;  
 c) poduzeće B je napravilo 100 poziva;  
 d) 500 poziva;  
 e) poduzeće E je dobilo najveći telefonski račun.

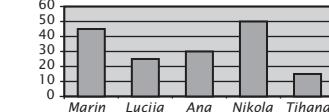
2. a) Stupčasti dijagram;  
 b) najviši vrh je Mont Everest, visina mu je 8848 m;  
 c)

vrh	visina
Mont Everest	9 000 m
Acon-cagua	7 000 m
McKinley	6 000 m
Kilim-anjaro	6 000 m
Mont Blanc	5 000 m
Markken	4 000 m
Kosciusko	2 000 m

d) prosječna visina tih vrhova zaokružena na stotice je 5600 m.



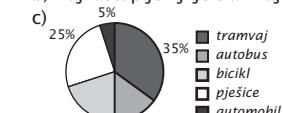
4.  $\bar{x} = 33$  boda.



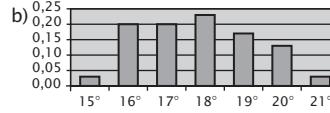
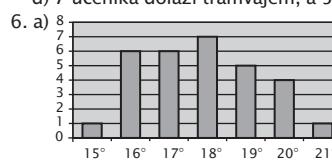
5. a)

Vrsta prijevoza	Postotak
Tramvaj	35%
Autobus	15%
Bicikl	20%
Pješice	25%
Automobil	5%

b) Najzastupljeniji je tramvaj.



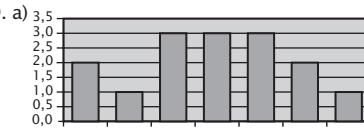
c) 7 učenika dolazi tramvajem, a 5 pješice.



c)  $\bar{x} = 17.83$ .

7. a) Srednja temperatura je  $15.99^{\circ}\text{C}$ ;  
 b) najviša temperatura je u kolovozu, najniža je u siječnju, a najbliža srednjoj je u listopadu.

8. a) Najviši vodostaj je Sava Županja, najniži Sava Zagreb;  
 b) još ne.



- c) prvu nagradu bi dobilo 3 učenika;  
 d) prosječna duljina skoka je 3.45 m.

10. a) Žutih kuglica ima 100, bijelih ima 140, crvenih ima 80, plavih ima 40, šarenih 40;

- b)  $P = 0.25$ ; c)  $P = 0.55$ ; d)  $P = 0.9$ .

11. a)  $P = \frac{1}{6}$ ; b)  $P = \frac{1}{2}$ ; c)  $P = \frac{1}{2}$ ;  
 d)  $P = \frac{1}{3}$ ; e)  $P = 0$ .

12. a)  $P = 0.1$ ; b)  $P = 0.5$ ; c)  $P = 1$ ;  
 d)  $P = 0.1$ ; e)  $P = 0$ .

13. a)  $P = \frac{20}{71}$ ; b)  $P = \frac{35}{71}$ ; c)  $P = \frac{12}{71}$ ;  
 d) Ana ima veće šanse jer karata s nogometarsima ima više.

14. a)  $P = 0.000002$ ; b)  $P = 0.248168$ ;  
 c)  $P = 0.0002$ ; d)  $P = 0.03$ ; e)  $P = 0.6$ .

15. a)  $P = 0.2$ ; b)  $P = 1$ ; c)  $P = \frac{1}{6}$ ; d)  $P = 0$ .

16. Vjerojatnost da se izvuče kraća je 0.2, a dulja 0.8. Veće su šanse za izvlačenje dulje slamčice.

17. a)  $P = 0.12$ ; b)  $P = 0.54$ ;  
 c)  $P = 0.26$ ; d)  $P = 0.25$ .

18. a)  $P = \frac{7}{12}$ ; b)  $P = 0$ ; c)  $P = \frac{11}{12}$ .

19. a)  $P = 0.1$ ; b)  $P = 0.05$ ; c)  $P = 0.7$ .

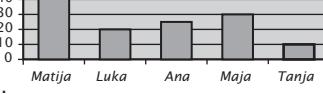
20. Vjerojatnost da će pogoditi je 0.2,

a da neće 0.8.

21. a)  $P = \frac{1}{2}$ ; b)  $P = \frac{1}{6}$ ; c)  $P = \frac{1}{6}$ .

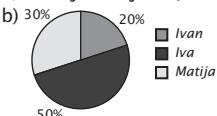
#### Primjerak oglednog testa:

1.  $\bar{x} = 28$  bodova



Temperatura	Broj dana	Relativne frekvencije
25 °C	1	0.04
26 °C	6	0.24
27 °C	3	0.12
28 °C	6	0.24
29 °C	4	0.16
30 °C	4	0.16
31 °C	1	0.04

3. a) Predsjednik je Iva, a zamjenik Matija;



c) Ivan je dobio 4 glasa, Iva 10, a Matija 6 glasova.

4. a)  $P = \frac{3}{20}$ ; b)  $P = \frac{1}{20}$ ; c)  $P = \frac{3}{5}$ ; d)  $P = \frac{1}{5}$ .

5. a)  $P = \frac{1}{30}$ ; b)  $P = \frac{7}{30}$ ; c)  $P = 1$ ;

d)  $P = 0$ ; e)  $P = \frac{1}{2}$ .

6. a)  $P = 0.1$ ; b)  $P = 0.26$ ; c)  $P = 0.39$ ; d)  $P = 0$ .

### 5. Sličnost

#### 5.1. Dijeljenje duljine na jednake dijelove i u jednakom omjeru

1. a) 2 : 1    b) 1 : 5    c) 6 : 1    d) 1 : 6

2. Kolika je duljina dužine  $MN$  ako je dužina  $OP$  duga 30 mm, a omjer

a) 18 mm; b) 6 mm; c) 45 mm.

3. Kolika je duljina dužine  $CD$  ako je dužina  $AB$  duga 7 cm, a omjer

a) 0.5 cm; b) 14 cm; c) 17.5 cm.

4. a) 2.4 m; b) 80 m; c) 3 m; d) 3 cm.

5. a)  $x = 2.25$  cm; b)  $x = 2$  cm; c)  $x = 7$  cm; d)  $x = 7.5$  cm; e)  $x = 5$  cm; f)  $x = 3.6$ .

6. a)  $x = 3$  cm; b)  $x = 4.8$  cm; c)  $x = 6$  cm; d)  $x = 5.25$  cm; e)  $x = 2.5$  cm; f)  $x = 7.5$  cm.

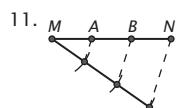
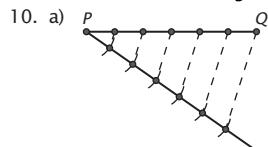
7. a)  $x = 3$  dm,  $y = 2$  dm;

b)  $x = 4.5$  dm,  $y = \frac{4}{3}$  dm;

c)  $x = 1.5$  dm,  $y = \frac{1}{30}$  dm;

d)  $x = 1.25$  dm,  $y = 0.9375$  dm.

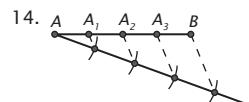
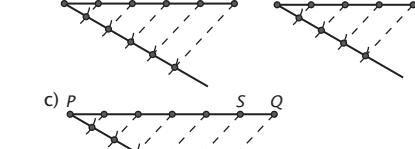
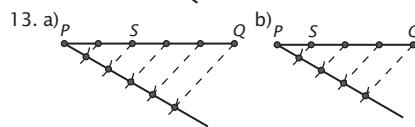
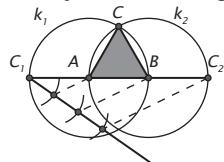
8. a)  $x = 2$  m; b)  $x = 37\frac{1}{3}$  m; c)  $x = 12.6$  m



a)  $|MA| : |AN| = 1 : 2$   
b)  $|MB| : |BN| = 2 : 1$

c)  $|MN| : |MA| = 3 : 1$   
d)  $|MN| : |MB| = 3 : 2$

12. Duljinu duljine 10 cm podijelimo na 3 jednaka dijela. U sjecištu kružnica  $k_1$  i  $k_2$  je treći vrh jednakostraničnog trokuta.



a)  $|AA_1| : |A_1B| = 1 : 3$ ;

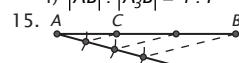
b)  $|AA_2| : |A_2B| = 2 : 2 = 1 : 1$ ;

c)  $|AA_3| : |A_3B| = 3 : 1$ ;

d)  $|AB| : |A_1B| = 4 : 3$ ;

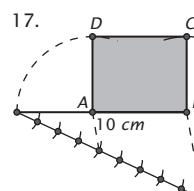
e)  $|AB| : |A_2B| = 4 : 2$ ;

f)  $|AB| : |A_3B| = 4 : 1$



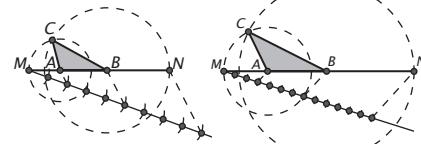
16.

Konstrukciju možemo izvesti pomoću simetrala dužina.



Nacrtamo dužinu kojoj je duljina jednaka polovini opsega, tj. 10 cm. Podijelimo je točkom A u omjeru 4 : 5.

18.



#### 5.2. Sličnost trokuta

1. 36 cm.

2. Satovi su slični jer su istog oblika, samo različitih veličina.

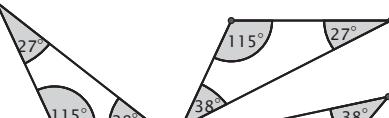
3. a) Jednakih veličina.

b) To znači da su omjeri svih triju odgovarajućih stranica jednak.

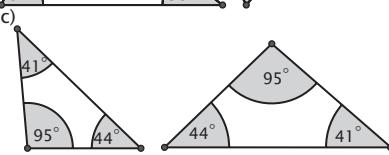
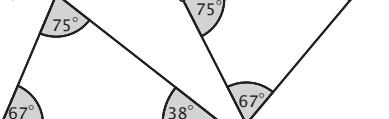
c) Iz omjera dviju odgovarajućih stranica; ili omjera njihovih opsega; ili omjera odgovarajućih visina.

d) Primjerice, ako je koeficijent sličnosti 3, onda su sve stranice većeg trokuta 3 puta dulje od odgovarajućih stranica drugog trokuta.

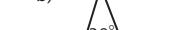
4. a)



b)



b)



5. a)
6. Svaka dva jednakostranična trokuta su međusobno slična. Ako je duljina stranice jednog jednakostraničnog trokuta  $a$ , a drugog  $a'$ , onda je omjer njihovih stranica  $a : a'$ .
7. Ti trokuti su slični s koeficijentom sličnosti je 2, tj. 0.5.
8.  $\angle D = 60^\circ$ ,  $\angle E = \angle B = 47^\circ$ .  
Trokuti  $\triangle ABC$  i  $\triangle CDE$  su slični.
9.  $\triangle GAC \sim \triangle FBC$ ,  $\triangle GAC \sim \triangle EBD$  i  $\triangle EBD \sim \triangle FBC$ .

#### 5.3. Poučci o sličnim trokutima

1. a) Da; b) Da; c) Ne; d) Ne; e) Da.

2. a)  $k = 1.5$ ; b)  $k = 1.5$ ; e)  $k = 1$ .

3. Kako su kod sukladnih trokuta parovi odgovarajućih stranica jednakih duljina, jasno je da će omjer sva tri para odgovarajućih stranica biti  $1 : 1$ .

4.  $a = 5 \cdot 6 \text{ cm} = 30 \text{ cm}$ ,

$b' = \frac{1}{5} \cdot 10.5 \text{ cm} = 2.1 \text{ cm}$  i

$c' = \frac{1}{5} \cdot 26.5 \text{ cm} = 5.3 \text{ cm}$ .

5. a) Ako je  $\triangle PQR$  manji trokut:  $p' = 18 \text{ cm}$ ,  $q' = 36 \text{ cm}$  i  $r' = 31.5 \text{ cm}$ .

b) Ako je  $\triangle PQR$  veći trokut:  $p' = 32 \text{ cm}$ ,  $q' = 64 \text{ cm}$  i  $r' = 56 \text{ cm}$ .

6. a)  $a' = 11\frac{1}{4} \text{ cm}$ ,  $b = 32 \text{ cm}$ ,  $c' = 27 \text{ cm}$ ;

b)  $b = 6 \text{ cm}$ , i  $a' = 9 \text{ cm}$ ,  $c = 9 \text{ cm}$ ;

c)  $a = 50 \text{ mm}$ ,  $b' = 40 \text{ mm}$ .

7. Duljine preostale dvije stranice njemu sličnog trokuta su:

a)  $42.5 \text{ mm}$  i  $35 \text{ mm}$ ;

b)  $24\frac{12}{17} \text{ mm}$  i  $21\frac{3}{17} \text{ mm}$ .

8. Visina čempresa iznosi 8 m.

9. Motka dodiruje stražnji zid na visini 19.5 m od tla.

10. Oba trokuta imaju kut od  $50^\circ$  i omjeri duljina stranica uz taj kut su jednakvi tj.

$b : b' = a : a'$ . Stoga, trokuti su slični po poučku SKS s koeficijentom sličnosti  $k = \frac{1}{3}$ .

11. Kako je  $\angle B \cong \angle G$  i  $\frac{16}{4} = \frac{24}{6} = 4$ ,

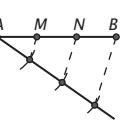
onda je  $\triangle ABC \sim \triangle EFG$  po poučku SKS. Iz sličnosti ovih trokuta slijedi da je  $\angle A \cong \angle E$

i  $\angle C \cong \angle F$ .  $|EF| = 20 : 4 = 5$ .

12. a) i b)  $\triangle MNO$  i  $\triangle NPQ$  slični su po poučku SKS:  $\angle MNO \cong \angle QNP$  (vršni kutovi)

- i  $\frac{56}{4} = \frac{84}{6} = 14$ . c)  $|MO| = 42$ .
13.  $\Delta ACD \sim \Delta ABE$  po poučku SKS: kut  $\alpha$  im je zajednički kut i omjeri stranica uz taj kut su jednaki, tj.  $\frac{9}{15} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ . Stoga je  $p : 12 = 3 : 5$ , tj.  $p = 7.2$  m.
14. Trokuti sa slika slični su po poučku KK.  
 a)  $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ ; b)  $\Delta QOM \sim \Delta NOP$   
 c)  $\Delta DEF \sim \Delta D'E'F'$
15. a)  $x = 5$ ,  $y = 1.8$ ; b)  $x = 5.6$ ,  $y = 21\frac{6}{7}$ ;
16.  $\Delta OAC \sim \Delta OBD$  (KK), pa je  $(d + 9.6) : d = 27 : 15$ , tj.  $d = 12$  m.
17.  $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$  po poučku KK.  
 $|\angle ABC| = 38^\circ$  i  $|\angle C'A'B'| = 52^\circ$ .
18. a)  $\Delta MOB \sim \Delta ACB$ ,  $|AB| = 7.2$ ,  $|BC| = 3$ .  
 b)  $\Delta ABC \sim \Delta ACD$ ,  $e = 14.4$ . (Zadatak se može riješiti i Pitagorinim poučkom.)
19. Crkveni toranj visok je 20 m.
20.  $\Delta ABC \sim \Delta ADB$  po poučku o sličnosti trokuta KK.
- 5.4. Opseg i površina sličnih trokuta**
1.  $o' = 96$  m.
2. a)  $k = \frac{4}{5}$ ,  $a' = 4$  dm,  $b' = 9.6$  dm i  $c' = 6.4$  dm;  
 b)  $k = \frac{3}{4}$ ,  $a' = 5.85$  m,  $b' = 6.75$  m i  $c' = 7.5$  m;  
 c)  $k = \frac{5}{8}$ ,  $a' = 2.5$  cm,  $b' = 3.125$  cm i  $c' = 4.375$  cm.
3. a)  $k = \frac{3}{5}$ . Opseg manjeg trokuta je 54.6 cm.  
 b)  $k = \frac{5}{3}$ . Opseg većeg trokuta je 105 cm.
4. a)  $\frac{a}{a'} = \frac{15}{3} = 5$ ,  $\frac{P}{P'} = 5 \cdot 5 = 25$ ;  
 b)  $P : P' = 49$ ; c)  $P : P' = 4 : 9$ .
5.  $P = \frac{60 \cdot 70}{2} = 2100 \text{ cm}^2$ ,  $k = \frac{3}{60} = \frac{1}{20}$ ,
- $\frac{P'}{P} = \left(\frac{1}{20}\right)^2$ ,  $P' = 5.25 \text{ cm}^2$ .
6. Duljine odgovarajućih stranica dvaju međusobno slična trokuta su 35 cm i 21 cm.  
 a) Površina manjeg trokuta je  $32.76 \text{ cm}^2$ ;  
 b) Površina većeg trokuta je  $175 \text{ cm}^2$ .  
 7. a) Površina travnjaka je  $63.75 \text{ m}^2$ .  
 b) Na gredicu za tulipane otpada jedna devetina travnjaka.  
 c) Približno 142 g sjemena ili precizno  $141\frac{2}{3}$  g.
8. Opseg manjeg trokuta 19 cm, a opseg većeg je  $5 + 7.8 + 9 = 21.8$  cm.
- 5.5. Ponavljanje gradiva**
- Zadaci za ponavljanje:
1. a)  $6 : 2$  ili  $3 : 1$ ; b)  $3 : 1$ .  
 2. a)  $2 : 4$  ili  $1 : 2$ ; b)  $1 : 2$ ; c)  $4 : 2$  ili  $2 : 1$ ; d)  $1 : 1$ ; e)  $4 : 3$ ; f)  $3 : 4$ ; g)  $5 : 2$ ; h)  $6 : 1$ .  
 3.  $x = 8$ .  
 4. a)  $x = 4$ ; b)  $x = 6$ ; c)  $x = 5$ ; d)  $x = 12$ ,  $y = 2.5$ .  
 5. a)  $x = \frac{8}{3}$ ; b)  $x = 12$ ; c)  $x = 4.8$ .  
 6. a)  $|AA_1| : |A_1B| = 1 : 3$ ;  
 b)  $|AA_2| : |A_2B| = 2 : 2 = 1 : 1$ ;  
 c)  $|AA_3| : |A_3B| = 3 : 1$ ;  
 d)  $|AB| : |A_1B| = 4 : 3$ ;  
 e)  $|AB| : |A_2B| = 4 : 2$ ;  
 f)  $|AB| : |A_3B| = 4 : 1$ .
7. a)  $|\angle A' | = 8 \text{ cm}$ ,  $|\angle B' | = 9 \text{ cm}$ ,  $|\angle C' | = 38^\circ$ ,  $|\angle A'B'C'| = 74^\circ$  i  $|\angle B'C'A'| = 105^\circ$ .  
 b)  $o = 16.5$  cm,  $o' = 33$  cm.  
 12.  $\Delta ABC \sim \Delta UVZ$ ,  $\Delta FDE \sim \Delta PQR$ ,  $\Delta JKL \sim \Delta HGI$ ,  $\Delta OMN \sim \Delta EST$ .  
 13. U svim zadacima od a) do e) zadani trokuti su slični.  
 14. a)  $a' = 45$  cm,  $b = 8$  cm,  $c' = 108$  cm.  
 b)  $b' = 34\frac{2}{7}$  mm i  $c' = 36$  cm;
- c)  $a = 68$  mm i  $b' = 13$  mm.  
 15. Bor je visok 7.5 m.  
 17. a) Opseg manjeg trokuta je 30 cm.  
 b) Opseg većeg trokuta je 27 cm.  
 18. Površine trokuta su u omjeru 1 : 16.  
 19.  $o : o' = 20 : 15$ , tj.  $o : o' = 4 : 3$ . Stoga je  $P : P' = 16 : 9$ , tj.  $P : 45 = 16 : 9$ , pa je  $P = 80 \text{ dm}^2$ .  
 20. Postoje dvije mogućnosti: Ako je stranica od 24 cm najkratča stranica, onda je to trokut sa stranicama 24 cm, 36 cm i 54 cm. Ako je stranica od 24 cm srednja po duljini, onda je to trokut sa stranicama 16 cm, 24 cm i 36 cm.

Primjerak oglednog testa:

1. a)  $2 : 5$ ; b)  $4 : 3$ ; c)  $1 : 6$ ; d)  $3 : 4$ .  
 2.  $x = 4.375$  cm.
3. a)  $|AM| : |AN| = 1 : 2$ ;  
 b)  $|MB| : |BN| = 2 : 1$ ;  
 c)  $|MN| : |MA| = 1 : 1$ ;  
 d)  $|MN| : |MB| = 1 : 2$ .
4. A 
5. a)  $p' = 9$  cm;  $q' = 18$  cm i  $r = 22.5$  cm;  
 b)  $p' = 16$  cm;  $q' = 32$  cm i  $r = 40$  cm.
6. Trokuti  $\Delta ABC$  i  $\Delta A'B'C'$  su slike su slični.  
 a)  $|\angle A' | = 8 \text{ cm}$ ,  $|\angle B' | = 9 \text{ cm}$ ,  $|\angle C' | = 38^\circ$ ,  $|\angle A'B'C'| = 74^\circ$  i  $|\angle B'C'A'| = 105^\circ$ .  
 b)  $o = 16.5$  cm,  $o' = 33$  cm.  
 7. a) Opseg manjeg je 54 cm;  
 b) Opseg većeg trokuta je 81 cm.  
 8. Površine trokuta su u omjeru 64 : 25.

# Kazalo pojmova

## A, B

aritmetička sredina, 108  
bacanje kockice, 117  
bacanje novčića , 116  
brojevni pravac, 16

## D, E

dijagram (grafikon), 94  
dijeljenje dužine na jednake dijelove, 142  
elementaran događaj, 114

## F, G

frekvencija, 106  
glavnica, 82  
grafikon (dijagram), 94

## I, J

ishodište, 16  
jedinična dužina, 16

## K, L

kamatna stopa, 82  
kamatni račun, 82  
koeficijent obrnute proporcionalnosti, 55  
koeficijent proporcionalnosti, 46  
koeficijent sličnosti, 147  
koordinata točke, 17  
koordinatna ravnina, 22  
koordinatne osi, 22  
koordinatni sustav, 16  
kružni dijagram, 103  
kvadrant, 27  
linijski dijagram, 101

## O

obrnuto proporcionalne veličine, 53  
omjer dužina, 136  
omjer, 34  
os apscisa, 22  
os ordinata, 22  
osnovna vrijednost, 72

## P, R

postotak, 68, 69, 72  
postotni iznos, 72  
poučci o sličnim trokutima, 150  
proporcija (razmjer), 40  
proporcionalne dužine, 136  
proporcionalne veličine, 44  
proporcionalno povećanje, 145  
proporcionalno smanjenje, 145  
razmjer (proporcija ), 40  
relativna frekvencija, 105  
René Descartes, 15

## S, T

sličnost pravokutnih trokuta, 157  
sličnost trokuta, 147  
sličnost, 134  
slikovni dijagram, 95  
slučajni događaj, 114  
statistika, 92  
stupčasti dijagram, 97  
Talesov poučak o proporcionalnim dužinama, 137

## U, V

uređeni par, 20  
vjerojatnost slučajnog događaja, 114  
vjerojatnost, 93





